

**COMPRENSIÓN Y CONSTRUCCIÓN DE  
CONCEPTOS GEOMÉTRICOS EN ALUMNOS DE  
SECUNDARIA UTILIZANDO SOFTWARE  
DINÁMICO Y EN CONTEXTOS TRADICIONALES**

**Coordinadora del proyecto:** María Sotos Serrano

UCLM

## **Introducción.**

La finalidad del proyecto no es otra que comparar el software de geometría dinámica frente al uso tradicional de lápiz y papel. El trabajo mediante resolución de problemas en ambos entornos educativos puede permitir analizar cómo las competencias argumentativas y comunicativas se ven modificadas por las distintas tecnologías de enseñanza. Finalmente, se pretende señalar los aspectos positivos y negativos de ambos entornos de aprendizaje para que, en función de cada situación particular, se pueda realizar la elección más adecuada para el aprendizaje de los alumnos.

Desde el principio se planteó la necesidad de trabajar en entornos de aula reales, en lugar de organizar grupos más reducidos mediante selección de estudiantes, ya que eso modifica la situación de enseñanza-aprendizaje que normalmente nos encontramos en los centros de educación secundaria. Así, se ha trabajado con dos grupos de 2º de E.S.O. para analizar las diferencias que pueden producirse entre el trabajo en un entorno clásico (lápiz y papel) y otro mediante software dinámico de geometría (Geogebra).

Se han diseñado actividades y problemas para trabajar en ambos grupos, y se han analizado tanto las sesiones de trabajo como los procesos de resolución y argumentación del alumnado.

Inicialmente se planteaba la hipótesis de que un entorno con software de geometría dinámica mejoraría la capacidad de razonamiento y argumentación del alumnado, pero los resultados no confirman dicha hipótesis. Hay otros factores que juegan un papel importante, por lo que no solo el uso de este tipo de tecnología garantiza la mejora planteada en la hipótesis.

## **A. Análisis descriptivo de los resultados.**

### **1. Finalidad del proyecto**

Pretendíamos averiguar con este proyecto si el software dinámico de geometría (SGD), aplicado a la enseñanza de las matemáticas en Educación Secundaria Obligatoria, mejora la capacidad de comprensión y argumentación del alumnado, especialmente a la hora de razonar sus propios procesos de resolución de problemas así como las conclusiones a las que puedan llegar. Para esto se tenían que comparar dos experiencias realizadas en dos grupos equivalentes, con similar carga de trabajo pero con diferentes metodologías, realizando después un análisis *ex post facto*.

Si bien no existe acuerdo en la delimitación de los estudios *ex post facto*<sup>1</sup>, este tipo de investigación se caracteriza porque el investigador se plantea la validación de la hipótesis cuando el estudio ya ha sucedido. En la concepción de ciertos autores se le da el tratamiento de un tipo de investigación preexperimental, para otros es un caso especial de los diseños cuasiexperimentales, y para otros se trata de una modalidad aparte. Incluso un grupo de investigadores los identifican con los estudios comparativos causales<sup>2</sup>.

Existe una línea de investigación que plantea que el uso de software dinámico de geometría permite al alumnado experimentar y generar conjeturas, verificarlas y comunicarlas a sus compañeros/as, pero muchos de los estudios que se incluyen en esta línea de investigación se realizan en entornos de trabajo artificiales (suelen ser grupos reducidos de alumnos/as, seleccionados para la ocasión, lo que aumenta la motivación inicial de los mismos, y se echa en falta un trabajo similar con metodologías tradicionales basadas en el uso de lápiz y papel). La utilidad de este tipo de trabajos debe ser la de conocer cuáles serían sus resultados si se aplicaran al trabajo docente

---

<sup>1</sup> Kerlinguer, F.N. (1985): *Investigación del comportamiento*. Interamericana, México.

<sup>2</sup> Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa*. Ceac, Barcelona

ordinario, en las situaciones en las que este tipo de trabajo se desarrolla (número de alumnos/as, competencias iniciales que poseen, motivación, ...). Por esta razón, nuestra experiencia se desarrolla en un centro de educación secundaria de nivel medio y con los grupos de alumnos que se establecieron desde la propia organización del centro para el desarrollo del curso académico 2011/2012, y con el profesorado asignado a cada uno de los grupos.

## **2. Objetivos alcanzados e hipótesis demostradas**

Se planteaba como **hipótesis principal** que el uso de SGD en educación secundaria influye en la comprensión del conocimiento geométrico, mejorando aspectos como la visualización, las estrategias de resolución de problemas y la argumentación, en comparación con el recurso tradicional de lápiz y papel.

Para esto se establecieron los siguientes objetivos:

- Caracterizar los procesos de construcción y el descubrimiento de propiedades y relaciones geométricas en alumnos de educación secundaria.
- Analizar la influencia del uso de software dinámico en la construcción y comprensión de conceptos geométricos en educación secundaria.
- Comparar el proceso de comprensión geométrica (visualización, estrategias, argumentación...) entre un entorno de trabajo clásico (lápiz y papel) y otro con SGD.

Finalmente la hipótesis no se ha confirmado, ya que no existen diferencias significativas entre los dos grupos, y se han elaborado las siguientes conclusiones:

1.- El trabajo en el aula mediante SGD requiere, como en el caso de cualquier otra herramienta, de un aprendizaje previo que garantice un mínimo nivel de competencia en su uso. Si se carece de ese nivel de competencia, el alumnado no puede centrar su trabajo en tareas de argumentación y razonamiento, ya que su atención se traslada a resolver las dificultades que puede plantearle el uso de dicho software.

2.- Los alumnos que han trabajado en el contexto tradicional de lápiz y papel (CT), en general, han resuelto mejor los problemas planteados, argumentando mejor el proceso de resolución. En contra de la hipótesis inicial, el trabajar en un entorno que se domina tiene mayor peso que las posibilidades que pueda brindar un entorno más atractivo pero menos conocido.

3.- El alumnado carece de un dominio mínimo del vocabulario propio de la asignatura, esto implica que sean incapaces de expresarse utilizando términos matemáticos y, por lo tanto, la argumentación y la comunicación son muy deficientes.

4.- En general, el alumnado carece de iniciativa y curiosidad, por lo que le resulta difícil conjeturar, investigar y reflexionar sobre las actividades propuestas. En este sentido, las capacidades de determinado software no pueden ser aprovechadas eficazmente. Sólo muy pocos alumnos han reflexionado sobre lo que hacían y obtenían, intentando dar una respuesta coherente.

### **3. Desarrollo de las fases respecto a los plazos establecidos**

#### **Fase 1**

1. Diseño y selección de una secuencia de problemas que permita generar diferentes procesos argumentativos y comunicativos en los estudiantes.

2. Selección de los dos grupos equivalentes.

3. Formación del alumnado del grupo experimental en el uso de Geogebra.
4. Diseño de un cuestionario que permita realizar una medición pretest de ambos grupos.
5. Diseño de las actividades de geometría plana que se plantearán a ambos grupos en la fase experimental.
6. Diseño de un cuestionario para realizar una medición posttest en ambos grupos.

Siguiendo los plazos establecidos, se mantuvieron diferentes reuniones del equipo de trabajo para diseñar los problemas y actividades que se utilizarían en el aula, partiendo de un amplio conjunto de problemas sobre los que se realizó una selección, en función del currículum correspondiente al 2º curso de E.S.O., del número de sesiones previstas y con la garantía de haber sido utilizadas antes en investigaciones similares.

También se realizó la selección de los dos grupos, garantizando que se trataba de grupos equivalentes (el contexto social es el mismo al tratarse de dos grupos del mismo centro y la asignación de las diferentes metodologías a uno y otro grupo fue aleatoria). En este sentido, la garantía de equivalencia entre ambos grupos de alumnos se realizó utilizando los resultados académicos de la primera evaluación escolar, mediante la comparación de medias con la prueba T para muestras independientes (nivel de significación=0.05; p-valor=0.304):

### Estadísticos de grupo

	Orden	N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
Rendimiento	1	19	4,53	2,245	,515
	2	19	3,68	2,709	,622

#### Prueba de muestras independientes

	Prueba de Levene para la igualdad de varianzas	Prueba T para la igualdad de medias								
		F	Sig.	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Error típ. de la diferencia	95% Intervalo de confianza para la diferencia	
									Inferior	Superior
Rendimiento	Se han asumido varianzas iguales No se han asumido varianzas iguales	,864	,359	1,043	36	,304	,842	,807	-,795	2,479
				1,043	34,801	,304	,842	,807	-,797	2,481

A partir de ahí, se desarrollaron varias sesiones para que el alumnado se familiarizase con GeoGebra, dándoles unas nociones básicas iniciales y trabajando después una serie de actividades matemáticas en las que había que utilizar las diferentes opciones de este programa.

## Fase 2

7. Desarrollo de las actividades de geometría plana planteadas.
8. Recogida de datos mediante los diarios de campo de los profesores, con especial atención al desarrollo de todas las sesiones de aula llevadas a cabo con el alumnado.
9. Recogida de datos a través de los protocolos de resolución realizados por los estudiantes, incluyendo entrevistas abiertas en diferentes momentos de la secuencia de enseñanza.

También aquí se cumplieron los plazos marcados inicialmente pues, aunque las sesiones de trabajo con el alumnado tuvieron que programarse en función de los calendarios de evaluación establecidos oficialmente, la programación inicial de este proyecto de

investigación contaba con el margen suficiente para poder realizar este ajuste.

### Fase 3

10. Análisis de los datos obtenidos desde la perspectiva teórica de la coordinación de los procesos de visualización y razonamiento y el desarrollo de las competencias comunicativas y argumentativas.

11. Redacción del informe final, publicación y presentación de resultados.

Para el análisis de datos, junto a la observación participante del profesorado y las entrevistas mantenidas con el alumnado, se diseñó el siguiente cuestionario específico para poder cuantificar las opiniones cualitativas del profesorado:

Indicadores	Bastante	Mucho	Poco	Nada
<b>Dimensión 1: Desarrollo de capacidades y habilidades</b>				
1	¿Los alumnos han desarrollado el conocimiento lógico y abstracto?			
2	¿Identifican, analizan, resuelven problemas y discuten resultados?			
3	¿Consolidan destrezas generales?			
4	¿Se ha conseguido la generación de una avalancha de ideas por parte de los alumnos a la hora de resolver las actividades y trabajo propuestos?			
5	¿Han sido capaces de llegar a conclusiones y a generar conocimiento a partir de ellas?			
<b>Dimensión 2: Desarrollo de actitudes</b>				
6	¿Ha aumentado el grado de interés y motivación de los alumnos en su trabajo en el aula?			
<b>Dimensión 3: Adquisición de contenidos</b>				
7	¿Las diferentes representaciones gráficas utilizadas han servido para que los estudiantes comprendan y asimilen mejor?			
8	¿La visualización de aspectos geométricos ha permitido una mejor conceptualización y razonamiento matemáticos?			



<b>Dimensión 4: Construcción del conocimiento</b>	
<b>9</b>	¿El uso de las actividades ha permitido a los alumnos construir el conocimiento siguiendo procedimientos similares a los del método científico?
<b>1</b>	¿Los alumnos han construido conocimiento matemático resolviendo problemas y situaciones reales?
<b>0</b>	
<b>Dimensión 5: Usos de los recursos propuestos</b>	
<b>1</b>	¿Cuál ha sido el nivel de dificultad de los alumnos en el manejo y uso de la tecnología utilizada?
<b>1</b>	¿Los alumnos han conseguido familiarizarse con las herramientas utilizadas?
<b>2</b>	
<b>Dimensión 6: Valoración GENERAL del progreso de los alumnos</b>	
<b>1</b>	¿Su conocimiento básico sobre figuras, relaciones y conceptos geométricos?
<b>3</b>	
<b>1</b>	¿Sus capacidades de razonamiento?
<b>4</b>	
<b>1</b>	¿La exposición de sus conocimientos y razonamientos utilizando argumentos matemáticos?
<b>5</b>	
<b>1</b>	¿La utilización de fórmulas y realización de cálculos matemáticos de forma adecuada?
<b>6</b>	
<b>Valoración: 1=Nada; 2=Poco; 3=Bastante; 4=Mucho</b>	
<b>CT=Contexto tradicional; SD=Software dinámico</b>	

<b>Indicadores</b>	<b>Bastante</b>	<b>Mucho</b>	<b>Poco</b>	<b>Nada</b>
<b>Valoración GENERAL del proceso de implantación del Proyecto</b>				
<b>17</b>	¿Ha habido dificultades a la hora de implementar el proyecto en el desarrollo normal del curso?			
<b>18</b>	¿Ha sido adecuado el tiempo dedicado al trabajo con el alumnado?			
<b>19</b>	¿El software y la tecnología utilizada han servido para facilitar y enriquecer el aprendizaje de los alumnos?			
<b>Valoración: 1=Nada; 2=Poco; 3=Bastante; 4=Mucho</b>				
<b>CT=Contexto tradicional; SD=Software dinámico</b>				

#### **4. Metodología para las tareas**

La metodología para el desarrollo de las diferentes tareas programadas ha seguido, en su mayor parte, la propuesta realizada en el proyecto.

1. Diseño y selección de una secuencia de problemas que permita generar diferentes procesos argumentativos y comunicativos en los estudiantes: se mantuvieron varias reuniones iniciales para unificar criterios y repartir trabajo. Después de revisar diferente bibliografía, el equipo de trabajo consensuó una amplia batería de problemas geométricos que podrían ser abordados mediante recursos tradicionales (lápiz y papel) y software dinámico.

2. Selección de los dos grupos equivalentes: en lugar de hacer una selección de alumnos para la posterior formación de dos grupos equivalentes, el equipo de trabajo estimó que eso produciría grupos diferentes a los que ya existían en el instituto, con lo que no dispondríamos de una situación de clase similar a la que suele ser habitual en dicho centro. Por este motivo, se optó por seleccionar a dos grupos ya establecidos, y se utilizaron los datos de la evaluación inicial del curso para garantizar la equivalencia de dichos grupos (al hablar de la Fase 1 en el punto A.3 ya aparecen los resultados estadísticos que garantizan dicha equivalencia).

3. Formación del alumnado del grupo que utilizará Geogebra: se desarrollaron 4 sesiones de trabajo con dicho grupo, con actividades y problemas de geometría que permitieran familiarizar al alumnado con este software.

4. Diseño de un cuestionario que permita realizar una medición pre-test de ambos grupos: dos profesores del equipo de trabajo, junto con el asesoramiento de otra profesora experta en la materia y ajena al proyecto, diseñaron una propuesta para este cuestionario, que posteriormente se consensuó con el resto del equipo. Este cuestionario fue completado por todo el alumnado de ambos grupos.

5. Diseño de las actividades de geometría plana que se plantearán a ambos grupos en la fase experimental: a partir de la batería de problemas obtenida mediante la tarea número uno, se seleccionaron actividades de geometría plana que permitieran su resolución mediante los dos entornos de trabajo (lápiz y papel y software dinámico), de manera que ambos grupos trabajasen con los mismos problemas.

6. Desarrollo de las actividades de geometría plana planteadas: los profesores de instituto, del equipo de investigación, se encargaron de desarrollar sesiones ad hoc en las que se les plantearon las actividades seleccionadas. La coordinadora del proyecto colaboró como apoyo técnico en dichas sesiones.

7. Recogida de datos: para esta recogida se utilizaron las observaciones del profesorado en las sesiones realizadas, así como las entrevistas al alumnado. Estas entrevistas se desarrollaron inmediatamente después de las sesiones de trabajo, para poder recoger el proceso de resolución llevado a cabo por el alumnado. Además, se diseñó un pequeño cuestionario (adjuntado al hablar de la fase 3 en el punto A.3) que ha permitido cuantificar las dimensiones más importantes del proyecto.

En este punto se comprobó que las diferencias observadas entre uno y otro grupo no eran estadísticamente significativas, por lo que no resultaba necesario realizar un nuevo cuestionario post-test. Este segundo cuestionario se utiliza cuando existen diferencias entre los dos grupos, y poder determinar que dichas diferencias obedecen a la intervención realizada. Al no existir diferencias no existe ningún peligro de que variables no controladas hayan intervenido en el proceso de investigación.

8. Análisis de los datos: el proyecto contemplaba la triangulación de métodos y de investigadores, para ello se disponía de datos procedentes de diferentes fuentes (observación del profesorado, entrevistas al alumnado, cuestionario al profesorado) que se

analizaron, inicialmente, por cada uno de los miembros del equipo de trabajo individualmente. Posteriormente se realizó un análisis conjunto por todo el equipo.

9. Redacción del informe final y presentación de resultados: el profesorado de la UCLM se encargó de la redacción del informe final, según el análisis realizado por todo el equipo de trabajo. Dicho informe final fue aprobado por el equipo de trabajo, y se presentó un avance de resultados, como comunicación, en el Congreso Internacional Multidisciplinar de Investigación Educativa, que tuvo lugar los días 5 y 6 de julio de 2012 en Barcelona, encargándose de dicha presentación la coordinadora del proyecto (se adjunta como anexo).

## 5. Relación de los participantes

La relación de participantes es:

<b>Universidad de Castilla-La Mancha</b>		
Apellidos y Nombre	Departamento	Área de conocimiento
Sotos Serrano, María	Matemáticas	Didáctica de las Matemáticas
García López, Juan	Pedagogía	Pedagogía
<b>Profesorado no universitario</b>		
Apellidos y Nombre	Centro	Especialidad
Atienzar Pedrós, José Ángel	I.E.S Al-basit	Orientación
Martínez de la Torre, J. Luis	I.E.S Al-basit	Matemáticas
García Piqueras, Manuel	I.E.S Al-basit	Matemáticas

## **6. Desarrollo de la evaluación, de los procesos y de los resultados**

Durante el desarrollo del proyecto se ha practicado un proceso continuo de evaluación. Tras la finalización de cada una de las fases del proyecto, se mantuvieron reuniones de evaluación de cada una de las tareas realizadas.

Fruto de esta evaluación, durante el desarrollo del proyecto se pudieron ajustar las tareas a las nuevas situaciones que pudieran plantearse. En este sentido, se incorporó el cuestionario al profesorado que ya se ha comentado y se planificaron las entrevistas al alumnado para evitar que transcurriera demasiado tiempo entre las sesiones de trabajo en el aula y las entrevistas sobre dichas sesiones.

### **B. Síntesis con un juicio valorativo del proceso llevado a cabo y de los resultados obtenidos**

El trabajo realizado se ha ajustado a la programación que se realizó y ha permitido concluir que la hipótesis planteada (“el uso de SGD en educación secundaria influye en la comprensión del conocimiento geométrico, mejorando aspectos como la visualización, las estrategias de resolución de problemas y la argumentación, en comparación con el recurso tradicional de lápiz y papel”) no se confirma en el caso que hemos desarrollado.

También es cierto que durante el desarrollo del proyecto han aparecido dificultades que, en buena medida, se han podido solucionar.

La primera de ellas ha sido las dificultades técnicas que han existido para poder disponer de los recursos económicos asignados en los plazos proyectados. Esto ha ocasionado el tener que trabajar con menos recursos de los previstos.

La segunda fue el cambio de adscripción de centro de uno de los profesores de secundaria que integraban el equipo de trabajo, que se ha podido solucionar con un esfuerzo adicional por parte de dicho profesor, ya que la investigación se desarrollaba en un centro diferente al suyo.

La propia dinámica del curso escolar también es una dificultad adicional, ya que las obligaciones curriculares establecidas hicieron que no se pudieran ampliar las sesiones de trabajo a un marco temporal mayor, así como también existieron limitaciones a la hora de contar con la colaboración del alumnado más allá de su jornada escolar. Esto implica que para proyectos de este tipo, resulte imprescindible poder contar con recursos que se puedan utilizar para motivar al alumnado a ampliar su jornada escolar, de manera que la investigación y el desarrollo habitual del curso no interfieran entre sí.

Al margen de estas dificultades, no dudamos de la utilidad del proyecto, pues ha permitido comprobar que la hipótesis inicial no se confirma y que, para poder implementar este tipo de tecnologías en el trabajo escolar es necesario mejorar determinados aspectos que ya han sido señalados.

## **C. Conclusiones:**

### **1. Posibles beneficios y contribuciones del proyecto**

Creemos que el proyecto ha contribuido en la línea de investigación en el que se inscribe.

Puede parecer contradictorio con los antecedentes que existen en este campo, en donde, desde finales del siglo XX, se mantiene que los programas de geometría dinámica son una forma de incrementar la motivación y habilidad de los estudiantes para investigar, generalizar y conjeturar, y aconsejan implicar a los estudiantes en actividades que les hagan sentir la necesidad de explicar, convencer

y argumentar. Mientras que en nuestro trabajo no se ha podido confirmar la hipótesis planteada.

La cuestión fundamental es la de los grupos con los que se realizan este tipo de investigaciones. No es lo mismo seleccionar un grupo reducido de alumnos y trabajar con ellos fuera del aula que utilizar los grupos ya establecidos en cada centro, más numerosos y con un nivel de heterogeneidad mucho mayor (al menos en lo referente al grado de motivación de cada alumno/a). En este sentido, este proyecto estaba diseñado desde una perspectiva fundamentalmente utilitaria, ya que no todo lo que sirve en un entorno puede ser extrapolado a otro diferente. Para utilizar metodologías que garanticen determinados objetivos, estas metodologías han de ser probadas en los mismos entornos en los que se pretenden implementar.

Ambas investigaciones se complementan. Las realizadas en pequeños grupos permiten explorar las potencialidades de cada metodología investigada, mientras que las realizadas con grupos ya existentes en cada centro, y dentro del desarrollo habitual del curso escolar (aulas, horarios, profesorado...), sirven para evaluar cómo implementar dichas metodologías.

## **2. Previsión de continuidad y difusión**

Una primera difusión de este trabajo ya se ha realizado, en el Congreso Internacional Multidisciplinar de Investigación Educativa mencionado, estando pendiente su publicación en revistas especializadas.

A partir de los resultados obtenidos, es aconsejable continuar con investigaciones similares, que puedan mejorar los resultados obtenidos en la medida en que se disponga de oportunidades adecuadas. Nos referimos tanto al equipo de trabajo como a la posibilidad de ampliar temporalmente el trabajo de campo.

Respecto al equipo de trabajo, la dinámica del Sistema Educativo en Castilla-La Mancha ha producido que los profesores de educación secundaria, que antes trabajaban en el mismo centro, ahora desarrollen su trabajo en centros diferentes, lo que dificulta en poder trabajar con un mismo instituto que garantice un mismo contexto para toda la investigación.

Respecto a la ampliación temporal, en esta investigación se ha comprobado que, pese al atractivo que se puede presuponer al uso de TIC en las aulas, el uso de cualquier herramienta de trabajo (incluido Geogebra o cualquier otro software) requiere una familiarización suficiente con la misma, para que dicho uso se integre en la dinámica habitual del alumnado. En este sentido, una nueva investigación solo tendría sentido si se puede proyectar con un grupo de educación secundaria familiarizado con esta herramienta y que la utilice habitualmente en su diseño curricular de matemáticas.

Así, la continuidad de este proyecto solo se contemplará cuando estos dos aspectos lo permitan.



## **Anexo:**

### **Comunicación presentada en el Congreso Internacional Multidisciplinar de Investigación Educativa (Barcelona, 5 y 6 de julio de 2012)**

**Título:** Investigando La Comunicación Y Argumentación De Conceptos Geométricos En Alumnos De Secundaria

**Abstract:** La comunicación nace de un proceso de investigación sobre la forma de argumentar y la capacidad para comunicar los resultados y conclusiones de su trabajo de los alumnos de Educación Secundaria Obligatoria, en el ámbito de la geometría.

En una primera fase se realizó un proyecto piloto del que poder extraer algunas conclusiones, que han servido para plantear, en una segunda fase, un diseño ex post facto con el que se pretende analizar las posibles diferencias (ventajas e inconvenientes) entre el trabajo en entornos tradicionales (lápiz y papel) y el uso de software dinámico.

**Descriptor:** Argumentación, Comunicación, software dinámico, Educación Secundaria Obligatoria, investigación experimental.

## **Comunicación**

### **OBJETIVOS**

Las tecnologías de la información y la comunicación son cada vez más importantes en nuestra sociedad y, por lo tanto, se incluyen en el desarrollo de una metodología de enseñanza-aprendizaje. Considerando este hecho y con el objetivo de crear un entorno de aprendizaje donde se favorezcan procesos de construcción matemática, nos planteamos si el uso de este tipo de programas informáticos permite mejorar el aprendizaje de la geometría por parte de los alumnos de educación secundaria, en situaciones reales de aula, fijando la atención en el desarrollo de sus competencias comunicativas y argumentativas.

Se plantea como **hipótesis principal** que el uso de SGD en educación secundaria influye en la comprensión del conocimiento geométrico, mejorando aspectos como la visualización, las estrategias de resolución de problemas y la argumentación, en comparación con el recurso tradicional de lápiz y papel. Y los objetivos de investigación son:

- Caracterizar los procesos de construcción y el descubrimiento de propiedades y relaciones geométricas en alumnos de educación secundaria.
- Analizar la influencia del uso de software dinámico en la construcción y comprensión de conceptos geométricos en educación secundaria.
- Comparar el proceso de comprensión geométrica (visualización, estrategias, argumentación...) entre un entorno de trabajo clásico (lápiz y papel) y otro con SGD.

## MARCO TEÓRICO

En esta línea de investigación Dreyfus y Hadas (1996) consideran que los programas de geometría dinámica son una forma de incrementar la motivación y habilidad de los estudiantes para investigar, generalizar y conjeturar, y aconsejan implicar a los estudiantes en actividades que les hagan sentir la necesidad de explicar, convencer y argumentar. En particular, Chazan y Yerushalmy (1998), utilizando software dinámico de geometría con alumnos de secundaria, llegaron a la conclusión de que mediante la exploración que facilita este tipo de software los estudiantes pueden experimentar, generar conjeturas, verificarlas y comunicarlas.

Por otra parte, Marrades y Gutiérrez (2000) concluyeron que utilizar software dinámico en geometría proporciona un entorno en el que los estudiantes, en su búsqueda de propiedades y relaciones generales, pueden experimentar libremente, pueden probar y comunicar sus intuiciones y conjeturas con facilidad y pueden aprender y comprender conceptos y procedimientos matemáticos. Además, Bruckheimer y Arcavi (2001) muestran que el software dinámico favorece el desarrollo de pruebas, utilizando la evidencia empírica como fuente de conocimiento e inspiración para desarrollar argumentos deductivos, y destacan que las herramientas dinámicas favorecen la transición de los estudiantes desde la intuición a la formalización.

En el trabajo de F. Rodríguez, en el que quiere “conocer si existen diferencias entre los procesos de demostración utilizados por los alumnos en un entorno de SGD, concretamente de Cabri, y en un entorno clásico de lápiz y papel” (2007: 3), realizado con estudiantes universitarios de la licenciatura en matemáticas, concluye que “la utilización de Cabri parece que no hace que los alumnos de la licenciatura en matemáticas muestren menos necesidad de realizar demostraciones deductivas para justificar los resultados” (2007: 80). Pero en este caso, la variable del nivel de competencia matemática de los alumnos, habituados al uso de demostraciones deductivas, puede jugar un papel mucho más importante que el uso de una u otra tecnología.

## METODOLOGÍA

Consideramos conveniente realizar una primera experiencia piloto que pudiese servirnos para minimizar errores a la hora de una experimentación de mayor envergadura, trabajando en el IES *Al-Basit* de Albacete con 15 estudiantes de 4º de la ESO que cursaban la opción B de matemáticas, y cuyo nivel académico en el área de matemáticas era medio-bajo.

Se desarrolló en tres partes. En la primera de ellas se seleccionaron las actividades y se realizó un guión con las características básicas de Geogebra necesarias para llevar a cabo el trabajo en el aula. Se pretendía que los estudiantes conocieran lo suficiente el programa como para que su uso no constituyera un obstáculo.

En la segunda parte se realizó el trabajo de campo propiamente dicho. Los estudiantes realizaron en el aula de informática las actividades propuestas, que en este caso consistieron en dos problemas relativamente sencillos.

Durante esta fase los profesores tomaron nota de la mayor parte de las incidencias ocurridas en cada sesión, indicando los éxitos y fracasos observados en cuanto a la correcta resolución de las actividades y obtención de conclusiones, el comportamiento y las actitudes del alumnado, las discusiones e intercambios producidos y la comunicación de resultados y proceso de resolución. También se utilizaron los protocolos de resolución realizados por los estudiantes. De la información obtenida sólo se puede concluir que este tipo de alumnos tiene serias dificultades para poder elaborar dichos protocolos con una mínima calidad. En muchos casos carecen de la competencia lingüística necesaria para utilizar determinados términos matemáticos y para explicar correctamente lo que hacen.

### Problema 1

Dibuja un segmento AB, construye un cuadrado de lado AB, y sobre uno de sus lados construye un triángulo equilátero. Escribe el procedimiento y explica porqué es correcto.

lo he construido con <sup>segmentos entre</sup> ~~la~~ <sup>puntos</sup> ~~los~~ <sup>segmentos</sup>  
y el triángulo equilátero como los lados son  
iguales a lo cual que el cuadrado el trián-  
gulo se forme la diagonal o hipotenusa del  
cuadrado

### Problema 1

Dibuja un segmento AB, construye un cuadrado de lado AB, y sobre uno de sus lados construye un triángulo equilátero. Escribe el procedimiento y explica porqué es correcto.

Primero le doy a segmento entre dos  
puntos para hacer el segmento, después  
le doy a polígono y voy uniendo los  
puntos hasta formar el triángulo  
equilátero.

A partir de ahí se planteó un diseño de investigación que introduce como novedad, respecto a las investigaciones habituales en este campo, la sustitución de la técnica de investigación de los protocolos escritos por el uso de **entrevistas cualitativas** centradas en los procesos de resolución de problemas desarrollados por los estudiantes.

La metodología utilizada ha consistido en el trabajo con dos grupos equivalentes, planteando la misma serie de problemas en ambos grupos pero con herramientas diferentes, para poder plantear hipótesis explicativas sobre las posibles relaciones entre el uso de dichas herramientas y los procesos de argumentación y razonamiento del alumnado. Así, la investigación que se propone tiene un componente más pragmático que teórico, pues pretende comprobar la efectividad de medios alternativos a situaciones concretas en el ámbito de la enseñanza de las matemáticas en educación secundaria.

Estos grupos fueron dos cursos de 2º de E.S.O., a los que se les plantearon una serie de actividades de geometría propias de su currículum. El primer grupo trabajó en un entorno clásico (lápiz y papel), mientras que el segundo grupo lo hizo con SGD, concretamente con GeoGebra, por tratarse de un software libre cuya utilización ha sido suficientemente analizada (Preiner, 2008). Pese a que en este tipo de diseños se suele utilizar la asignación aleatoria de los sujetos de cada grupo, algunos autores (Borg y Gall, 1983) defienden la asignación sobre el azar cuando los sujetos de la muestra tienen las mismas probabilidades de formar parte de cualquiera de los dos grupos. En este caso, la formación de los diferentes cursos de 2º de E.S.O. en el I.E.S. *Al-Basit* no obedeció a ningún criterio previo y, además, cuando ya existen grupos establecidos (como en el caso de los centros educativos), la modificación de dichos grupos introduce nuevas variables que no pueden controlarse durante la fase experimental.

En este sentido, la garantía de equivalencia entre ambos grupos de alumnos se realizó utilizando los resultados académicos de la primera evaluación escolar, mediante la comparación de medias con la prueba T para muestras independientes (nivel de significación=0.05; p-valor=0.304):

### Estadísticos de grupo

	Orden	N	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
Rendimiento	1	19	4,53	2,245	,515
	2	19	3,68	2,709	,622

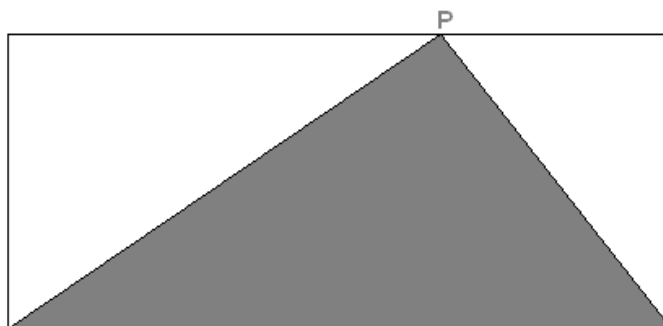
#### Prueba de muestras independientes

	Prueba de Levene para la igualdad de varianzas	Prueba T para la igualdad de medias								
		F	Sig.	t	gl	Sig. (bilateral)	Diferencia de medias	Error típ. de la diferencia	95% Intervalo de confianza para la diferencia	
									Inferior	Superior
Rendimiento	Se han asumido varianzas iguales	,864	,359	1,043	36	,304	,842	,807	-,795	2,479
	No se han asumido varianzas iguales			1,043	34,801	,304	,842	,807	-,797	2,481

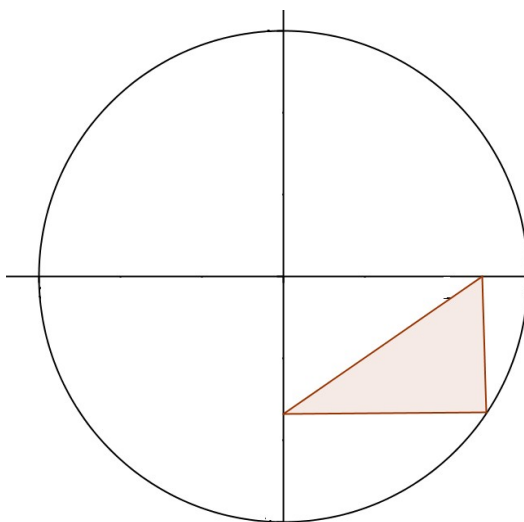
A partir de ahí, se desarrollaron varias sesiones para que el alumnado se familiarizase con GeoGebra, dándoles unas nociones básicas iniciales y trabajando después una serie de actividades matemáticas en las que había que utilizar las diferentes opciones de este programa.

**Ejemplo de actividades:**

1. ¿Cuánto espacio ocupa el triángulo gris dentro del rectángulo? Variando P, ¿cuál es la mayor superficie ocupada?



2. ¿Cuánto mide la hipotenusa?



Después de cada una de las sesiones de aula se realizaron entrevistas con el alumnado para recoger los protocolos de resolución. Tanto el trabajo en el aula como los protocolos recogidos presentaron, mayoritariamente, dos tipos de problemas. Por un lado existe un muy bajo nivel de competencia lingüística matemática, así como graves carencias respecto a conceptos geométricos básicos.

Esto supone una dificultad para que el alumnado pueda explicar lo que hace y por qué lo hace. La sustitución de los protocolos escritos por entrevistas grabadas permite mejorar este aspecto gracias al diálogo profesor-alumno, pero en muchas ocasiones ese diálogo

se bloquea por el bajo nivel de competencia lingüística matemática. En cualquier caso, no se detectan diferencias significativas a la hora de argumentar o razonar entre el alumnado de ambos grupos.

Inicialmente, parecía que la opción de trabajar con Geogebra aumentaría el interés del alumnado, pues el uso de tecnologías de la información es algo que atrae a la población joven (buena parte del grupo que trabajó con lápiz y papel se consideraba perjudicado por el hecho de no trabajar con ordenadores), pero ese interés inicial pronto decayó (cuando ya no se trata de conocer un programa nuevo, sino de trabajar problemas matemáticos concretos), llegando incluso algunos alumnos a solicitar el cambio al grupo que trabajaba con las herramientas clásicas.

## **RESULTADOS Y CONCLUSIONES**

El objetivo de la prueba piloto no era otro que el de obtener resultados que permitieran ajustar el diseño experimental que se realizaría en el siguiente curso académico.

En este sentido, se obtuvieron las siguientes conclusiones:

1.- El software dinámico es una herramienta que añade un componente motivacional al alumnado, ya que por un lado se trata de una tecnología próxima a los hábitos de ocio de los jóvenes, y por otro supone una novedad dentro del panorama académico habitual de la enseñanza secundaria en España.

2.- Pese a la facilidad de uso de estas herramientas, se precisan determinadas sesiones para que los alumnos se familiaricen con ellas. Una sola sesión no es suficiente ya que, al margen del conocimiento sobre los comandos básicos del programa, es recomendable realizar una serie de prácticas sobre problemas planteados por el profesorado, en las que se vean involucrados una muestra variada de dichos comandos.

3.- La realización de protocolos escritos por parte de los estudiantes es una herramienta poco eficaz cuando estos no están suficientemente entrenados en dicha actividad. Normalmente se realizan este tipo de protocolos dentro de determinados procesos de investigación, en los que se cuenta con un número reducido de alumnos, con un nivel suficiente de competencias lingüísticas y con un cierto entrenamiento en la realización de dichos protocolos. Cuando no se producen estas circunstancias, lo habitual es que se obtengan protocolos en los que existan numerosos problemas de coherencia interna, tanto intratextual como extratextual (Murillo y Marcos, 2005).

Respecto a la segunda fase de la investigación, las conclusiones son las siguientes:

1.- El trabajo en el aula mediante SGD requiere, como en el caso de cualquier otra herramienta, de un aprendizaje previo que garantice un mínimo nivel de competencia en su uso. Si se carece de ese nivel de competencia, el alumnado no puede centrar su trabajo en tareas de argumentación y razonamiento, ya que su atención se traslada a resolver las dificultades que puede plantearle el uso de dicho software.

2.- Los alumnos que han trabajado en el entorno clásico (lápiz y papel), en general, han resuelto mejor los problemas planteados, argumentando mejor el proceso de resolución. En contra de la hipótesis inicial, el trabajar en un entorno que se domina tiene mayor peso que las posibilidades que pueda brindar un entorno más atractivo pero menos conocido.

3.- El alumnado carece de un dominio mínimo del vocabulario propio de la asignatura, esto implica que sean incapaces de expresarse utilizando términos matemáticos y, por lo tanto, la argumentación y la comunicación son muy deficientes.

4.- En general, el alumnado carece de iniciativa y curiosidad, por lo que le resulta difícil conjeturar, investigar y reflexionar sobre las actividades propuestas. En este sentido, las capacidades de determinado software no pueden ser aprovechadas eficazmente. Sólo muy pocos alumnos han reflexionado sobre lo que hacían y obtenían, intentando dar una respuesta coherente.

## BIBLIOGRAFÍA

- Borg, W. R. y Gall, M. D. (1983): *Educational research: An introduction*, Longman, New York.
- Bruckheimer, M. y Arcavi, A. (2001): A Herrick Among Mathematicians or Dynamic Geometry as an aid to proof. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 8 (1), 113-126.
- Chazan, D. y Yerushalmy, M. (1998): Charting a course for secondary geometry. En R. Lehrer y D. Chazan (eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space*, Mahwah, NJ, Erlbaum Asso.
- Dreyfus, T. y Hadas, N. (1996): Proof as an answer to the question why. *Z.D.M. International Reviews on Mathematical Education*, 96 (1), 1-5.
- Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2000): Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 87-125.
- Murillo, J. y Marcos, G. (2005): Un modelo de análisis de competencias matemáticas en un entorno interactivo. En Maz, A.; Gómez, B. y Torralbo, M. (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM*, 215-226. Obtenido el 14-3-2011 en <http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas09SEIEM/IXsimp.pdf>.
- Preiner, J. (2008): *Introducing Dynamic Mathematics Software to Mathematics Teachers: the Case of GeoGebra*. Tesis doctoral, University of Salzburg. Obtenido el 12-12-2008 en <http://www.geogebra.org/en/wiki/index.php/Publications>.
- Rodríguez, F. (2007): *Análisis de demostraciones en entornos de lápiz y papel y de Cabri por estudiantes de la licenciatura en matemáticas*. Trabajo de investigación presentado en la Universitat de València. Obtenido el 13-2-2012 en <http://www.uv.es/angel.gutierrez/apregeom/archivos2/Rodriguez06.pdf>.