La importancia de los enunciados de problemas matemáticos

Tomás Ortega
Universidad de Valladolid
Cristina Pecharromán
I.E.S. Valverde de Lucerna. Puebla de Sanabria (Zamora)
Perla Sosa
Universidad Nacional de Itapúa (Paraguay)

Resumen:
En este trabajo, queremos poner de manifiesto la relevancia de los enunciados de problemas matemáticos como metodología para conseguir aprendizajes significativos en Educación Secundaria. La heurística juega un papel fundamental en la docencia de las matemáticas y, como tal, debiera ser usada en la práctica educativa de forma habitual, ya que pone especial atención en los procesos de pensamiento y, además, considera a los contenidos matemáticos como herramientas indispensables para aplicar estrategias de resolución. Destacamos la importancia de la creación de enunciados de problemas matemáticos interesantes para los alumnos, y que establezcan conexiones de la matemática con: la vida real, otras áreas de conocimiento, ramas de la propia matemática y la historia. Por ello, planteamos varios problemas matemáticos atractivos y novedosos para que sean resueltos heurísticamente, se describen las conexiones de los posibles procedimientos resolutorios con el fin de favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas propias de la Educación Secundaria.

Palabras Clave:
Aprendizaje, enunciados, enseñanza, heurística, matemáticas, resolución de problemas.

Abstract:
In this paper we want to show the relevance of the wording of mathematical problems as a method to achieve significant learning in secondary education. Heuristics plays a fundamental role in the teaching of mathematics and, as such, it should be used in educational practice on a regular basis, since it both pays special attention to the thought processes and considers the mathematical contents as indispensable tools to implement resolution strategies.
We emphasize the importance of creating wordings of interesting mathematical problems for students which can establish connections between mathematics and: real life, other areas of knowledge, some branches of mathematics itself and history. Therefore, firstly, we propose several attractive and innovative mathematical problems to be solved heuristically; secondly, we describe the connections of the procedures to solve the problems in order to help the process of teaching and learning of mathematics themselves in Secondary Education.

Keywords:
Learning, wording, teaching, heuristics, mathematics, problem solving.

Résumé:
Dans cet article nous voulons mettre en relief la pertinence d'observer une méthodologie dans les formulations des problèmes mathématiques dans le but d'atteindre des apprentissages significatifs dans l'enseignement secondaire. L'heuristique joue un rôle fondamental dans l'enseignement des mathématiques et en tant que telle doit être utilisé régulièrement dans la pratique éducative, puisqu'elle accorde une attention particulière aux processus de pensée et considère également les contenus mathématiques comme des outils indispensables à mettre en œuvre des stratégies de résolution.
Nous soulignons l'importance de créer des formulations de problèmes intéressants pour les étudiants, et qui établissent des liens entre les mathématiques et: la vie quotidienne, d'autres domaines de la connaissance, différentes branches des mathématiques et leur histoire. Par conséquent, nous proposons plusieurs problèmes mathématiques attrayants et nouveaux à résoudre par des moyens heuristiques, nous décrivons les connexions des possibles procédures de résolution en vue de promouvoir l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques spécifiques de l'enseignement secondaire.
Mots clés:
Apprentissage, formulation, enseignement, heuristique, mathématiques, résolution de problèmes.

Fecha de recepción: 01-02-2011
Fecha de aceptación: 14-03-2011

Introducción

La enseñanza de las Matemáticas desempeña un papel muy importante dentro de los currículos de Educación Secundaria, y por tanto, del cuerpo educativo a nivel internacional.

Sin duda, es una de las asignaturas más importantes, cuyos contenidos curriculares se estudian en todos los países del mundo y en todos los niveles educativos. Sin embargo, la importancia que atribuyen los distintos países a dicha materia es variable.

El National Council of Teachers of Mathematic (NCTM), propuso para la década de los 80 la resolución de problemas como eslogan educativo de la matemática escolar y para este concepto la enseñanza de las matemáticas escolares debe poner énfasis en la resolución de problemas.

El aprendizaje de los conceptos matemáticos a través de la resolución de problemas es un procedimiento altamente valorado y esta práctica es fundamental en la consolidación de los aprendizajes, pero no es menos importante poner en práctica de forma heurística los conocimientos matemáticos adquiridos.

La mejora de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas curriculares de Educación Secundaria constituye un reto para el Área de Didáctica de la Matemática y la resolución de problemas juega un papel fundamental. La resolución de problemas es un procedimiento altamente valorado, generalmente es motivador para el alumnado, proporciona un recurso para la consolidación de los aprendizajes. Sin embargo, es evidente que los problemas no existen mientras no se disponga de los enunciados, y para tratar de mejorar la enseñanza de las matemáticas y facilitar su aprendizaje es necesario que los propios enunciados sean motivadores y contengan de forma implícita elementos dinamizadores interesantes para los alumnos, motivación y dinamización están incluidos en enunciados que conexionan las Matemáticas curriculares con situaciones de la vida real y con otras áreas del saber, así como con la Historia de las Matemáticas en menor grado. Por tanto, se plantea la importancia de los enunciados de problemas matemáticos escolares como objeto de estudio que permitirá dar respuestas a preguntas como: ¿qué es un problema?, ¿qué supone la resolución de problemas?, ¿qué importancia tiene la creación de enunciados de problemas matemáticos?, ¿qué hacer para mejorar la enseñanza-aprendizaje de la Matemática desde esta perspectiva?

El término resolución de problemas ha sido usado con diversos significados, que van desde trabajar con ejercicios rutinarios hasta hacer matemática profesionalmente. La propuesta de enseñar matemáticas a través del método de resolver problemas ha sido aplicada universalmente por diferentes escuelas.

Según Stanic y Kilpatrick (1988), los problemas han ocupado un lugar central en el currículum matemático escolar desde la antigüedad, pero la resolución de problemas, no. Sólo recientemente los docentes de matemáticas han aceptado la idea de que el desarrollo de la habilidad para resolver problemas merece una atención especial.

Ni el concepto de problema ni el de resolución de problema tienen una significación única y son muchos los autores que han dado definiciones de ambos conceptos. Con el fin de conocer esta diversidad de interpretaciones sobre la resolución de problemas se considera el trabajo de Shoenfeld (1992), quien identifica varias concepciones de ambos conceptos en relación al uso y al fin que persiguen, y, según los objetivos que se quieran conseguir, describe unas categorías que podrían interpretarse así:

- Entrenar a los estudiantes para "pensar de forma creativa" y/o "desarrollar su habilidad para resolver problemas".

- Preparar a los estudiantes para competiciones de matemáticas.
- Ofrecer a los profesores potenciales con la instrucción en una estrecha curva de estrategias heurísticas.
- Aprender las técnicas estándar en dominios particulares, más frecuentemente en los modelos matemáticos.
- Proporcionar un nuevo enfoque para recuperaciones matemáticas (habilidades básicas), o para tratar de inducir estrategias de pensamiento crítico o de razonamiento analítico.

Shoenfeld también incluye dos definiciones del término "problema":

- *Definición 1. Es algo que requiere ser hecho, o que requiere hacer algo en matemáticas*.
- *Definición 2. Es resolver una cuestión matemática que es confusa o difícil*. (Después se refiere a esta concepción como: problemas que son problemas).

En estas definiciones no se contempla la disposición del alumno como protagonista en la resolución de problemas. Desde ésta perspectiva, una tarea no es un problema para una persona hasta que no lo ha hecho propio. En segundo lugar, el concepto de problema tiene carácter relativista, implica que las tareas no son problemas por sí mismos; que una tarea sea un problema para alguien o no, dependerá de las competencias matemáticas que esa persona posea.

Para Polya (1990) *"Tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata"*.

Otra definición, parecida a la de Polya es la de Krulik y Rudnik (1980) *"Un problema es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cual no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma"*.

De las definiciones anteriores se infiere que un problema debe satisfacer tres requisitos:

- Aceptación. El individuo o grupo, debe aceptar el problema, debe existir un compromiso formal, que puede ser debido a motivaciones tanto externas como internas.
- Bloqueo. Los intentos iniciales no dan fruto, las técnicas habituales de abordar el problema no funcionan.

- Exploración. El compromiso personal o del grupo fuerzan la exploración de nuevos métodos para atacar el problema.

Consideramos que los problemas deben estar bien construidos y secuenciados, tanto en complejidad creciente como en la redacción, pues el tipo de estructura sintáctica que se utilice puede por sí misma crear dificultades. En este sentido, Ortíz, Rico y Castro (2004) afirman que los profesores en ejercicio tienen dificultades para plantear problemas novedosos a sus alumnos y aseguran que la creación de enunciados no es tarea fácil.

Entender el enunciado de un problema es fundamental para su resolución y, por tanto, va a influir mucho el lenguaje que empleemos. Las palabras utilizadas pueden formar parte del lenguaje y se emplean en su sentido habitual pero en el lenguaje matemático se emplean con un significado particular y esto puede dificultar la comprensión. Esto conlleva a hacerse como una película mental del enunciado, recordar los datos o saber identificarlos y relacionarlos con la idea principal. Cuanto más se aleja el enunciado de la experiencia cotidiana, están más próximos a la abstracción y son más difíciles de representarlos mentalmente.

El modelo de análisis y síntesis

Según Puig y Cerdán (1990) los problemas aritméticos de varias operaciones *combinadas* (PAVOC) son problemas que se resuelven con más de una operación, y requieren un proceso de resolución en el que se tiene que elaborar una estrategia de resolución en relación con las operaciones a realizar, con los datos que intervienen en ellas, con el orden de las operaciones, y con la utilización de resultados parciales intermedios, que pueden ser interesantes en los dos primeros cursos de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO), cursos en los que se produce el paso de la aritmética al álgebra.

La primera fase de este modelo es **Análisis**, que es la acción de planificar la resolución y cuyo proceso es el siguiente:

- Identificar la incógnita del problema.
- Determinar qué datos son necesarios para hacer ese cálculo.
- Si están todos hay que hacer el cálculo final.
- Si falta alguno, se considera como una incógnita intermedia.

- Determinar qué datos son necesarios para calcular la incógnita intermedia y aplicar el proceso anterior a esta incógnita.
- Iterar el proceso las veces necesarias hasta que:
  * Bien se tienen todos los datos para calcular la incógnita del problema. En este caso se calcula y el problema termina felizmente.
  * Bien alguno no se puede calcular, o se llega a contradicciones. En este caso el problema no tiene solución.

La segunda fase, la **Síntesis**, es la acción resolutoria.

La resolución de problemas en los Estándares Curriculares

Considerando un planteamiento holístico, el todo es más que la suma de sus partes, el NCTM (1991) consideró que, además de los Estándares Curriculares formados por los conceptos y procedimientos puramente matemáticos (algebra, análisis, aritmética, estadística, geometría, probabilidad), ocupan un lugar destacado los cuatro estándares que consideran a la matemática como resolución de problemas, como comunicación, como razonamiento y las conexiones de esta ciencia. Una breve reflexión nos indica que en la resolución de problemas están implícitos los otros estándares, ya que no es posible resolver problemas sin razonamiento. Asimismo, siguiendo el espíritu del NCTM, en los primeros niveles educativos, los auténticos problemas son los que están conexionados con la vida real y con otras ciencias, y, finalmente, la resolución no puede prescindir de la comunicación, ya que se tienen que transmitir los resultados.

Estos *Estándares* ofrecen un punto de vista de las matemáticas escolares desde que los objetivos se incorporan dentro de un contexto que es a la vez más amplio y más coherente con los cambios que se dan en la sociedad actual, componen una estructura para el currículo base que refleja las necesidades de todos los estudiantes, reconociendo en forma explícita que la sociedad está cada vez más dominada por la tecnología y los métodos cuantitativos.

En los niveles del 9 al 12, el NCTM indica que conforme se va avanzando en el currículo, la resolución de problemas, además de establecer conexiones, debe servir también a la propia matemática, desarrollando y conectando en mayor grado la matemática en sí misma. Desde otra perspectiva, en estos niveles educativos, plantea problemas con diferentes grados de complejidad para que puedan ser abordados unos u otros según el desarrollo cognitivo de los alumnos y los conocimientos previos de éstos. Este planteamiento es observado en algunos de los enunciados de problemas que se proponen en este trabajo.

La resolución de problemas en PISA

El Proyecto PISA define la formación matemática como la capacidad para identificar, comprender e implicarse en las matemáticas y emitir juicios con fundamento acerca del papel que juegan las matemáticas como elemento necesario para la vida privada, laboral y social, actual y futura de un individuo como ciudadano constructivo, comprometido y capaz de razonar.

Las pruebas PISA, que están basadas en la resolución de problemas, tratan de determinar las competencias matemáticas de los alumnos de 15 años y las resoluciones de éstos se valoran utilizando tres niveles de complejidad (Reproducciones, Conexiones y Reflexiones). De las ocho competencias que enuncian en PISA, para nosotros el planteamiento y resolución de problemas es una competencia destacada, ya que el propio proyecto utiliza esta herramienta para determinar los niveles competenciales alcanzados por los alumnos.

En la competencia *Resolución de Problemas*, lo mismo que en los estándares curriculares, están integradas todas las demás, ya que para resolver problemas, también hay que: *pensar y calcular, establecer conexiones, comunicar, argumentar, modelizar, representar, utilizar el lenguaje matemático, y empelar soportes y herramientas*.

Los enunciados de PISA, hoy liberados, en cierto modo, fueron sorprendentes para la comunidad matemática porque, teniendo visos de realidad, planteaban situaciones conflictivas que se podían resolver con estrategias diferentes, pero la creación de enunciados de este tipo no es sencilla.

La resolución de problemas desde la educación atendiendo a la diversidad

En García y Ortega (2010), se indica que una de las características de ésta metodología educativa consiste en proponer varios enunciados de actividades en orden creciente de dificultad para que sean resueltas por los alumnos en grupos colaborativos, grupos que entre otros parámetros, se forman teniendo en cuenta que todos los miembros de un mismo grupo tengan niveles académicos similares. Bajo ésta perspectiva, ya señalada por en NCTM (1991) son interesantes los enunciados que progresan en dificultad, marcando niveles, como por ejemplo los problemas referentes a la puerta y al tejado, que son presentados en el presente trabajo.

En esta metodología los enunciados deben ser independientes unos de otro, de manera que, por ejemplo, se pueda resolver el segundo sin necesidad de haber hecho el primero. Así, que cada grupo de trabajo tratará de resolver aquellos cuya dificultad sea adecuada para ese grupo, entendiendo que una tarea es adecuada si puede hacerla aunque tenga dificultades y, además, con ella va a aprender algo; es decir, se trata de enunciados que son auténticos problemas en el sentido de Schoenfeld.

La importancia de los enunciados

En un sentido amplio, resolver problemas significa usar matemáticas en situaciones que surgen del mundo real, de otras ciencias o de las propias matemáticas. No hemos dedicado ninguna atención especial al modelo de Polya (1990) por ser ampliamente conocido, pero en el planteamiento heurístico que realizamos, es evidente, que es aplicable a la resolución de todos los problemas que proponemos.

Vista la reflexión de (Ortíz et al., 2004) y los comentarios sobre los estándares curriculares, PISA y Educación Atendiendo a la Diversidad, se presentan una serie de enunciados para abordarles de forma heurística atendiendo a planteamientos muy diversos con el fin de que puedan servir de modelos de creación de enunciados.

El primer problema presenta una situación real para ser abordada mediante el modelo de análisis y síntesis; los cinco siguientes también reproducen problemas de la vida real, pero se contemplan otros factores que requieren ciertas particularidades; y los dos últimos tienen que ver con la Historia de la matemática. Los problemas referentes a la construcción de una puerta y a la reparación de un tejado se han creado para que fueran abordados con una metodología de educación matemática atendiendo a la diversidad y cada grupo de alumnos intentará resolver los enunciados que sean apropiados para su madurez matemática. La concepción del enunciado para construir una escalera obedece a un planteamiento diferente que pasa por analizar todos los casos posibles y elegir la solución que mejor se adapte a la condición cualitativa del enunciado, la comodidad. En el problema del radar aparece de forma natural una tasa de variación media que es un antecedente de la definición de derivada. El problema del hotel se ha creado para poder establecer conexiones entre diferentes áreas de la matemática y se propone abordarlo de forma geométrica, algebraica y analítica. El problema séptimo, aparte de la conexión con la historia de la matemática, también marca dos niveles de dificultad y varias formas de ser abordado. Finalmente, el último problema surge mediante *descubrimiento* (de Villiers, 1993) y tiene que ver exclusivamente con la matemática misma.

La importancia de la Resolución de problemas es indiscutible, pero el planteamiento de los mismos, la creación de enunciados, no lo es menos; de hecho, la quinta competencia PISA no separa el planteamiento de la resolución. Por otra parte, el planteamiento es anterior y tienen que responder a una serie de criterios didácticos orientados a los aprendizajes y las competencias que se quieran conseguir en la resolución. En suma, consideramos que la creación de enunciados es crucial en la formación matemática y, por esta razón, presentamos una muestra de numerosos enunciados que ilustran su importancia.

Problema 1. Llegada de pasajeros

El pasado lunes llegaron al aeropuerto de Valladolid cuatro aviones procedentes del extranjero. El primero venía de Londres y trajo 218 pasajeros, el segundo procedía Bruselas y en él vinieron 95 personas menos que en el de Londres, el tercero venía de París y de él se bajaron el doble de personas que del avión procedente de Bruselas, el cuarto venia de New York y el número de pasajeros era el mismo que juntando los pasajeros de Bruselas y la tercera parte de los de París. ¿Cuántas personas llegaron a Valladolid en estos aviones?

La estructura del problema

La cadena deductiva que conecta los datos del problema con la incógnita es la estructura del mismo y se puede elaborar un diagrama que recoja el proceso de resolución que, en suma, debe contemplar los siguientes entes: Las etapas necesarias para ir desde la incógnita a los datos, el número de incógnitas auxiliares, las conexiones entre los datos y las operaciones que hay que realizar.

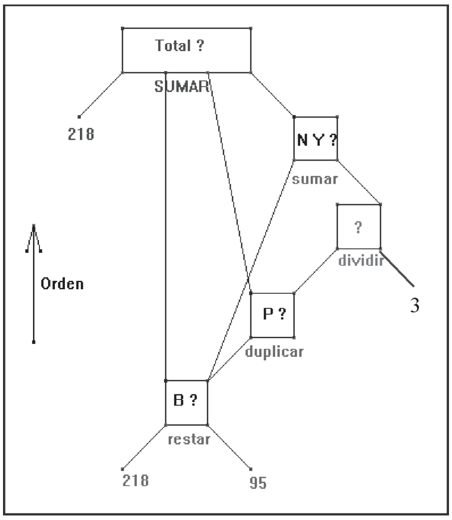

Figura 1. Diagrama estructural

En definitiva se trata de crear un esquema que facilite la traducción del lenguaje verbal al lenguaje aritmético junto al proceso de resolución. Éste está implícito al consignar qué operaciones, con qué datos y en qué orden. La figura 1 muestra el diagrama de resolución que corresponde al problema enunciado. En él se puede apreciar el número de incógnitas auxiliares, las operaciones que hay que realizar, el orden de las mismas y los datos que intervienen en cada una de ellas. Se trata de un problema de cinco etapas y, por tanto, ya no es un problema fácil de resolver dentro del nivel de estudios que corresponde a todos los conceptos que están presentes en él, y la complejidad del diagrama de estructura es un fiel reflejo de la dificultad del problema correspondiente.

Problema 2. Construir una puerta

Primer enunciado: Se quiere construir una puerta como la de la figura con unos listones que miden 15 cm de ancho (para los travesaños) y con tres planchas rectangulares de madera (para los entrepaños), cuyo rectángulo visible mida 60 cm de largo y 45 cm de ancho:

- Calcula la altura y la anchura totales de la puerta.
- Calcula la longitud total visible de todos los listones.

Segundo enunciado: Se quiere construir una puerta como indica la figura adjunta con 2 listones verticales y 4 listones horizontales, todos ellos de 15 cm de anchura y con tres planchas de madera, rectangulares e iguales, de 70 cm de longitud y 55 cm de anchura. Los listones horizontales están incrustados en los verticales 5 cm y las planchas rectangulares también se incrustan en los listones horizontales y verticales otros 5 cm en todos sus lados (las incrustaciones están representadas por las líneas a trazos):

- Calcula la anchura total de la puerta.
- Calcula la altura de la puerta.
- Calcula la longitud total de todos los listones.

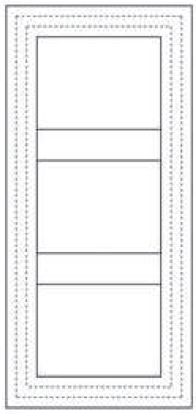

Figura 2. Puerta

Tercer enunciado: Se proyecta la puerta sobre la pared y los alumnos tienen que medir la longitud y anchura de los listones del rectángulo inferior y de éste mismo.

Cuarto enunciado: Otro problema distinto consistiría en medir sobre el dibujo y recuperar la medida real considerando que la escala es 1:30.

Quinto enunciado: Se quieren fabricar 6 puertas como las del segundo enunciado y se quiere saber:

- ¿Cuántos listones de madera de 2,70 metros de longitud se tienen que comprar.
- ¿Cuántas planchas rectangulares de madera de 130 cm de largo y 80 cm de largo se tienen que comprar?

Problema 3. Reparación de un tejado

Primer enunciado: Se quiere reparar un tejado formado por dos trapecios isósceles unidos por las bases menores y dos triángulos rectángulos iguales que tienen un cateto común con cada trapecio. Las bases de los trapecios son iguales y miden 10 m y 6 m, respectivamente, y los lados desiguales (que coinciden con los dos catetos de los triángulos) miden 4 y 5 metros, respectivamente. La constructora cobra 50 € por cada metro cuadrado de superficie y 15 € por cada metro lineal de las limas (Intersecciones de los planos del tejado). Haz un croquis y una maqueta de cartón y calcula el importe del presupuesto.

Segundo enunciado: Determina el rango de posibles longitudes del alero del tejado que coincide con la base horizontal de los faldones triangulares.

Tercer enunciado: Calcula la altura de cualquiera de los vértices de la lima superior sobre el plano horizontal del tejado.

Cuarto enunciado: Halla las pendientes máximas de los cuatro faldones de los tejados.

Quinto enunciado: Determina el volumen "bajo cubierta". Este volumen está determinado por los cuatro faldones del tejado y el plano horizontal.

Sexto enunciado: Sitúa un sistema cartesiano y obtén las ecuaciones de las rectas y de los planos que representan las limas y los faldones, respectivamente.

Problema 4. Construir una escalera

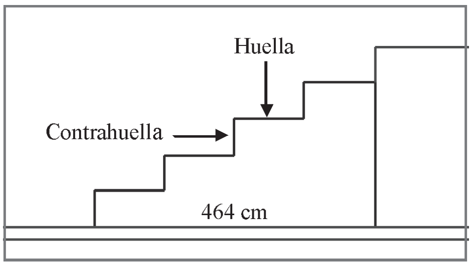

Figura 3. La escalera

La huella y la contrahuella de las escaleras en viviendas unifamiliares suelen variar entre *28* y *32 cm*, y entre *17* y *20 cm*, respectivamente. Se quiere construir una escalera entre las dos plantas de una casa unifamiliar y para salvar una altura de *3,20 m*, pero el suelo se puede levantar hasta *2 cm* para ajustar el reparto de la medida de las contrahuellas. Es conocido que las escaleras más cómodas son las que tienen la contrahuella más baja y las más incómodas las de mayor contrahuella. En esta casa, se dispone de un espacio máximo en planta de *4,64 m* para su construcción. Tienes que explicar cuántos escalones conviene que tenga la escalera y cuánto tienen que medir las huellas y las contrahuellas para que sean lo más cómodas posible.

Como pautas activadoras se pueden indicar: la conveniencia de hacer un croquis de la situación, explorar posibles soluciones, discutir acerca de cuál sería la solución óptima.

Para determinar la solución en primer lugar se tienen que obtener las medidas posibles de las huellas y el correspondiente número de contrahuellas, considerando como punto de partida la longitud del hueco de la escalera, qué es el único dato fijo. Una vez que se han hallado estos resultados intermedios, una discusión sobre la comodidad de la escalera y la posible absorción de un defecto de altura subiendo el suelo permiten llegar al resultado final. Conviene utilizar una hoja de cálculo para obtener todas las posibles opciones y hacer la discusión sobre éstas.

Problema 5. El radar de tráfico

Es bien sabido que el radar de la policía de tráfico fotografía a los vehículos que superan cierta velocidad. Para ello, tienen que determinar la velocidad que tienen los vehículos a su paso por donde está el radar y esto lo hacen aplicando el efecto Doppler, que es equivalente a medir el tiempo que transcurre entre el paso del vehículo por dos marcas ópticas, AB y CD, sobre la carretera. Se considera que la distancia entre la proyección de ambas marcas es de 12 m y se admite que se puede cometer un error de 1 dm, y que si un coche circula a 120 km/h la medida del tiempo que tarda el vehículo en recorrer la distancia entre ambas marcas puede sufrir un error de 4 centésimas de segundo. Haz un informe explicando los errores de velocidad que se pueden cometer.

Problema 6. Habitaciones del hotel

Los propietarios de un hotel van a reconstruir una parte del mismo que tiene una planta trapezoidal, ABCD, tal que: AB es paralelo a CD, los ángulos ABC y BCD son rectos y, además, AB=5 m, BC=20 m y CD=6 m. Quieren hacer 5 habitaciones que tengan igual área. Resuelve el problema.

Figura 4. Planta de las habitaciones

Una primera forma de abordar el problema consiste en dibujar con un programa gráfico (CABRI, GEOGEBRA, AUTOCAD) un plano a una escala apropiada que represente la situación. Cada habitación se representa por un trapecio cuyas bases están en rectas perpendiculares a BC, que se dibujan a partir de cinco puntos situados en la recta BC (para que se puedan desplazar sobre ella), se mide la superficie de cada trapecio y las bases se van desplazando sobre la recta BC para ajustar su superficie a la quinta parte de la superficie del trapecio ABCD. Se pueden cometer pequeños errores de ajuste que en la realidad no tienen importancia.

Una segunda forma de solucionar el problema consiste en resolver las ecuaciones algebraicas que se obtienen utilizando la relación entre las áreas de los trapecios y la proporcionalidad de los cuatro triángulos (que están formados por la parte superior de las bases mayores de los trapecios al ser cortadas por la recta paralela a BC que contiene a A, y todos ellos con vértice en este punto) con el triángulo mayor, también de vértice A y base opuesta sobre la parte superior de CD al ser cortada por la misma paralela.

La integral definida también resuelve el problema. Considerando un sistema cartesiano con origen B y eje de abscisas BC y de ordenadas BA, es fácil determinar la ecuación de la recta AD y calcular el área bajo la recta en los intervalos [0, x1], [0, x2], [0, x3], [0, x4] y, respectivamente, igualar los resultados a A(t)/5, 2A(t)/5, 3A(t)/5, 4A(t)/5, siendo A(t) el área del trapecio ABCD.

Problema 7. Área del segmento parabólico

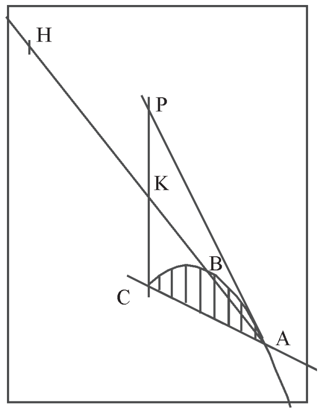

Figura 5. Segmento parabólico

El matemático más importante de la Antigüedad, Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C.), describe cómo las investigaciones “mecánicas” le llevaron a los descubrimientos matemáticos más importantes. Es consciente de que sus primeros pasos carecen de rigor y postula que *es más fácil* demostrar *algo cuando de antemano se tiene una idea de lo que se quiere obtener*. Arquímedes indica que tiene un método mecánico, “el de la palanca”, que le ayuda a preparar el camino de las demostraciones. Uno de los teoremas que descubrió por este método fue el siguiente *“El área de un segmento parabólico, ABC, es un tercio del área del triángulo APC, siendo AP la tangente a la parábola en A y*

PC con la misma dirección que el eje de la parábola". La figura 1 es una representación gráfica de este problema que, sin duda, es precursor del Análisis Matemático, que surge con Newton y Leibniz 19 siglos después.

Este problema, propio de la Geometría, se resuelve aplicando técnicas de Análisis Matemático; se tiene que utilizar Geometría Analítica, Cálculo Diferencial y Cálculo Integral. En primer lugar se considerará una parábola particular de eje vertical, esta situación da lugar a un esquema de prueba pre-formal (van Ash, 1993). En Educación Secundaria, la ecuación más general que se utiliza, por ejemplo, es $y=-x^2+2x+8$, y dos puntos de la misma son C=($0, 8$) y A=($3, 5$). Con estos puntos se determinan las rectas AC, secante a la parábola y AP, tangente a la misma. Las áreas correspondientes al segmento y al triángulo se calculan fácilmente y se comprueba la igualdad enunciada por Arquimedes.

Para abordar el problema con un simbolismo general, se tiene que hacer cálculo simbólico y para ello se debe considerar la parábola de ecuación $y=ax^2+bx+c$, los puntos A y C de abscisas $x=h$ y $x=k$. El procedimiento es similar, pero ahora el cálculo simbólico se complica enormemente, razón por la que convendría utilizar algún programa de cálculo simbólico.

Es evidente que la ecuación de la parábola se puede reducir a $y=ax^2$, incluso a $y=x^2$, mediante un giro, una traslación y una escala apropiada, pero, aun así, habría que manipular expresiones con dos parámetros: h y k.

Problema 8: Justificar la construcción de la figura 6

Un análisis de la figura 5 permite descubrir un método de construcción de la parábola sin utilizar ni el foco ni la directriz considerando como datos dos puntos de la parábola, A y C, la recta tangente PA, en A y una recta paralela al eje PC, pasando por C.

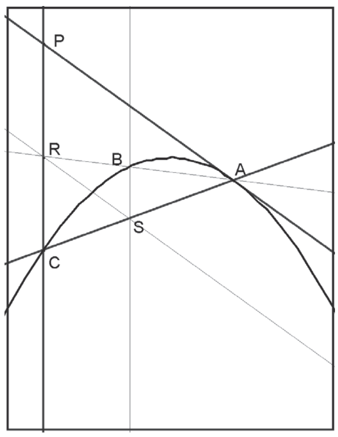

Figura 6. Parábola de Arquímedes

En la figura 6 se ha utilizado este método y la parábola resulta ser el lugar geométrico de los puntos, B, que se obtienen como intersección de las rectas BS, paralelas a PC por S, y las rectas RA; el punto S se obtiene como intersección de la recta AC y la recta

RS, paralela a PA por R. El punto R es un punto arbitrario de la recta PC, paralela al eje de la parábola. El lugar geométrico de estos puntos es la curva solución, qué es una parábola.

Conclusión

En este trabajo hemos tratado de mostrar la importancia de la creación de enunciados de problemas matemáticos atractivos y novedosos para que sean resueltos heurísticamente. Los problemas que se han mostrado son todos originales, responden a una intencionalidad didáctica: establecer conexiones de la matemática con la vida real y con otras ramas de la propia matemática, y proponer modelos que puede ayudar a los profesores de Educación Secundaria para crear enunciados con una finalidad determinada.

En el artículo no se describen las soluciones de los problemas, pero sí ciertas orientaciones sobre las mismas y, sobre todo, las conexiones de los posibles procedimientos resolutorios con distintos campos de la matemática.

Los interrogantes planteados propician una reflexión sobre todo lo que supone la resolución de problemas y se destaca la importancia que tienen los enunciados de los problemas matemáticos, que deben ser motivadores y dinamizadores de los aprendizajes. Teniendo en cuenta estas premisas, hemos considerado la definición de problema como: *"Planteamiento de una situación de respuesta desconocida, que no es inmediata, que el alumno tiene que resolver mediante métodos matemáticos y que, además, debe tener la voluntad de hacerlo".*

La resolución de problemas supone que el alumno llegue a internalizar el proceso como algo propio, permitiendo que los estudiantes manipulen autónomamente el problema, se familiaricen con la situación planteada, descubran sus dificultades, elaboren estrategias de resolución, ensayen procedimientos de resolución utilizando ciertos contenidos matemáticos y lo resuelvan. Posteriormente, es conveniente hacer un análisis crítico de la solución.

Por tanto, queremos resaltar que la resolución de problemas sigue jugando un papel fundamental como modelo de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Consideramos que la creación de enunciados con una finalidad específica es clave y entendemos que tales enunciados deben ser interesantes, atractivos y novedosos para conseguir aprendizajes significativos de los alumnos; tienen que establecer conexiones de la matemática con la vida real, con la historia, con otras ciencias y entre otras ramas de la propia matemática. La creación de tales enunciados, como los que se han propuesto, favorece los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas propias de la Educación Secundaria.

Referencias bibliográficas

Boyer, C.B. (1987). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Universidad Textos. (Original de 1968).

Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies of Mathematics*, *17*, pp. 125-141.

de Villiers, M. (1993). "El papel y la función de la demostración en matemáticas". *Épsilon*, 26, 15-30. Original de 1990.

Krulik, S. y Rudnik, J. (1980). Problem Solving, In Handbook for teachers. Allyn & Bacon Inc.

García, A. y Ortega, T. (2003). Educación en la diversidad. Inicio de una investigación en Didáctica de la Matemática. En *Investigación en Educación Matemática*. Granada: Eds.: Castro, Flores, Ortega, Rico y Vallecillos.

García Cruz, J.A. La Didáctica de las Matemáticas. Obtenido en enero de 2010, desde *http://www.gobiernodecanarias.org/educación/rtee/didmat.htm*

Ibañes, M. y Ortega, T. (2004). Textos argumentativos. *UNO, vol. 28, 39-60*. Barcelona: Graó.

Ministerio de Educación (2005). PISA 2003. Pruebas de Matemáticas y de solución de problemas. Madrid.

N.C.T.M. (1991). Estándares curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática. S.A.E.M. Sevilla: Thales.

Olmo, M. A. Del, Moreno, M. F. y Gil, F. (1989). *Superficie y volumen. ¿Algo más que el trabajo con fórmulas?*. Madrid: Síntesis.

Ortega, T. (2002). Algunas aportaciones de la Didáctica de la Matemática en la profesión de Profesor de Enseñanza Secundaria. En *Aportaciones de la Didáctica de la Matemática a diferentes perfiles profesionales* C. Penalva, G. Torregrosa y J. Valls Editores, cap. 3, pp. 61-94. Alicante: Universidad de Alicante.

Ortega, T. (2005). Conexiones matemáticas. Motivación del alumnado y competencia matemática, p. 213. Barcelona: Graó.

Ortega, T. (2009). Modelización y construcción de enunciados. Un camino de ida y vuelta. Las esferas de Dandelín. En *Construcción de modelos matemáticos y resolución de problemas,* pp. 197-230. Madrid: Ministerio de Educación, Secretaría General Técnica.

Ortiz, J., Rico, L. y Castro, E. (2004). Uso de la Modelización Matemática en Actividades Didácticas. Análisis de una situación problema. Actas del XVIII RELME. México: Chiapas.

Polya, G. (1990). *Cómo plantear y resolver problemas*. México D.F.: Trillas.

Puig, L. y Cerdán, F. (1990-a). Problemas aritméticos de varias operaciones combinadas. Actas de la Cuarta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática. México: Acapulco.

Puig, L. y Cerdán, F. (1990-b). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Rico, L. (2005). La alfabetización matemática y el proyecto PISA de la OCDE en España. *Padres y Madres de Alumnos (CEAPA), nº 82, pp. 7-13. Madrid*.

Schoenfeld, A.H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving., metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grows (Ed.) Handbooks forResearch on mathematics Teaching and Learning (pp.334-370). New York: MacMillan.

Solow, D. (1987). *Cómo entender y hacer demostraciones en Matemáticas*. México: Limusa.

Van Ash, A.G. (1993). "To prove, why and how?". International *Journal Mathematics Education Science and Technology*, 2, 301-313.