5 El teorema de Euler a partir de la teoría de grafos

Por Angel Antonio NUÑEZ GARCIA (*) y Miguel Angel PACIOS ALVAREZ (**)

INTRODUCCION

La teoría de grafos se refiere a la parte de la teoría de conjuntos relativa a las relaciones binarias de un conjunto numerable consigo mismo. Esta teoría posee un vasto campo de aplicaciones en Física, Economía, Teoría de la Información, Programación Lineal, Transportes, Psicología e incluso en ciertos dominios del arte. Además la teoría de grafos ha sido de gran utilidad en el estudio de algunos problemas clásicos de la matemática: puentes de Königsberg y problema de los cuatro colores entre otros.

La idea de este trabajo, concebido como seminario optativo para los alumnos de COU, es presentar a los alumnos un teorema clásico de geometría (sin duda alguna la gran olvidada de nuestros programas) mediante la teoría de grafos. Estamos convencidos de que esto contribuirá a que nuestros alumnos comprendan que las nuevas teorías nos ayudan, en muchas ocasiones, a resolver cuestiones clásicas de la matemática de una forma más simple y con una visión distinta de la acostumbrada. Utilizamos en este trabajo los métodos y el lenguaje de la teoría de grafos para demostrar el teorema de EULER que liga caras, vértices y aristas de un poliedro regular.

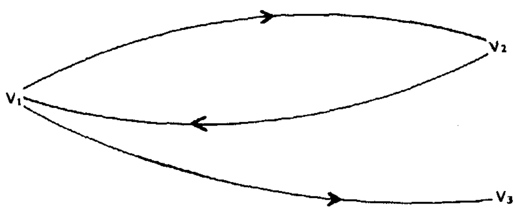
CONCEPTOS PREVIOS

Grafo: Llamamos GRAFO a todo par $G = (X, A)$ donde X es un conjunto cualquiera y A es un subconjunto de XxX.

A los elementos de X les llamaremos VERTICES y a los elementos de A ARCOS.

Ejemplo 1. — Sea el grafo cuya representación sería:

$$G = \{v_1, v_2, v_3\}, \quad (v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_1)\}$$



A estos grafos se les suele llamar GRAFOS ORIENTADOS, ya que el arco (v_1, v_2) es distinto del (v_2, v_1). Como el objeto de este trabajo es aplicar la teoría de grafos a los poliedros, haremos abstracción del orden y así en lo sucesivo el arco (v_1, v_2) y el (v_2, v_1) serán el mismo. Esto nos lleva a definir:

GRAFO NO ORIENTADO

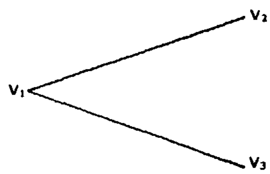
Lamamos GRAFO NO ORIENTADO a todo par $G = (X, A)$ donde X es un conjunto cualquiera y $A \subset P(X)/A = \{A_1, A_2 \ldots An \ldots\} / \text{Card } Ai = 2 \ \forall \ i \in N\}$, es decir A está formado por subconjuntos de X de dos elementos.

A los elementos de X se le llama VERTICES.

A los elementos de A se les llama ARISTAS.

Ejemplo 2:

Sea el grafo $G = \{v_1, v_2, v_3\}, \ \{ \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\} \}$



En los ejemplos 1 y 2 el conjunto de vértices es el mismo. El conjunto de arcos del ejemplo 1 no coincide con el conjunto de aristas del ejemplo 2 y esto porque el arco $(v_1, v_2) \neq$ arco (v_2, v_1) mientras que arista $\{v_1, v_2\}$ = arista $\{v_2, v_1\}$.

DEFINICION

Si el conjunto X es finito el grafo, sea o no orientado, se llama FINITO; en caso contrario, INFINITO.

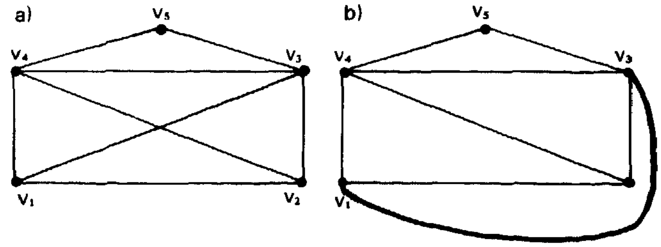
A lo largo de este trabajo vamos a considerar GRAFOS NO ORIENTADOS FINITOS.

GRAFO PLANAR

Decimos que el grafo G es planar si existe al menos una representación geométrica plana en la cual las aristas no se corten en puntos distintos de los vértices. Se hace necesario señalar que un mismo grafo puede tener más de una representación geométrica, así como el ejemplo:

Ejemplo 3:

El grafo $G = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, V_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}$ se puede representar:



Las figuras a) y b) representan el mismo grafo G. Si nos fijamos en la figura a) diríamos que el grafo es no planar, mientras que al fijarnos en b) diríamos que es planar. De acuerdo con nuestra definición de grafo planar el grafo G de este ejemplo es planar, existe *al menos una* representación de él en la cual las aristas no se cortan en puntos distintos de los vértices.

(*) Catedrático I.B. «Gil y Carrasco» (Ponferrada).
(**) Profesor Agregado I.B. «Rey Pastor» (Madrid).

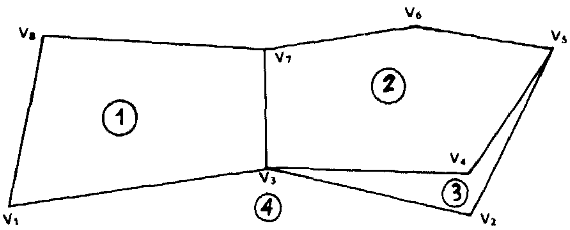
PROPIEDAD DE LOS GRAFOS PLANARES

Todo grafo planar G determina una participación del plano en regiones todas ellas conexas por arcos. A esa partición le llamamos P (G).

Ejemplo 4

Sea el grafo planar:

$G = \{\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, V_8\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_7\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_6\}, \{v_6, v_7\}, \{v_7, v_8\}\}$ una de cuyas representaciones es:



El grafo G define una participación del plano en cuatro regiones. La región (1) está limitada por 4 aristas, la región (2) está limitada por 5 aristas, la región (3) está limitada por 4 aristas y, finalmente, la región (4) está limitada por 7 aristas.

DEFINICION

Se dice que un vértice v es de *grado n* si existen exactamente n aristas incidentes con él. Se indica δ (v).

Un vértice se dice *par* si su grado es un número par, *impar* si su grado es un número impar y *aislado* si su grado es cero.

GRADO REGULAR

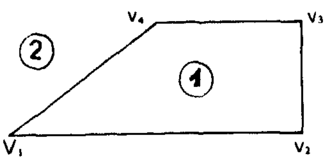
Decimos que un grafo planar es *regular* si verifica:

a) Todos los vértices son del mismo grado.

b) Todas las regiones de P (G) están limitadas por el mismo número de aristas.

EJEMPLO 5

Sea el grafo $G = \{\{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}\}$ *una de cuyas representaciones puede ser:*



Este grafo es regular. El grafo del ejemplo 4 no es regular pues no cumple ninguna de las condiciones que definen a un grafo regular.

En lo sucesivo para los grafos planares regulares usaremos la notación:

V número de vértices
A número de aristas
C número de regiones de P (G)

LEMA

Para todo grafo superior de 3 vértices, no aislados se tiene:

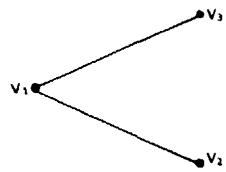
$$V + C = A + 2$$

DEMOSTRACION

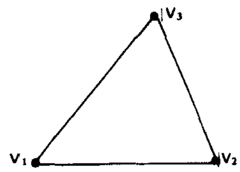
Como los vértices son no aislados el grado es distinto de cero. Los vértices sólo pueden tener grado 1 ó 2, no es posible grado mayor al disponer solamente de tres vértices.

Existen dos posibilidades:

a) Un vértice grado 2 y los otros grado 1

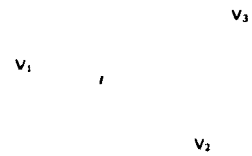


b) Los tres vértices grado 2

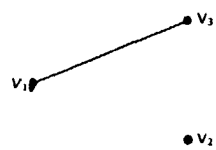


Caso a): V = 3 A = 2 C = 1 luego V + C = A + 2
Caso B): V = 3 A = 3 C = 2 luego V + C = A + 2

Nota.—En el enunciado del lema hemos exigido vértices no aislados, pues en el caso de que al menos uno fuese aislado no se verificaría la relación. En efecto:



V = 3
A = 0
C = 1 y, por tanto, no se cumple V + C = A + 2, pues 3 + 1 ≠ 0 + 2



V = 3
A = 1
C = 1 y no se cumple tampoco en este caso la relación, pues 3 + 1 ≠ 1 + 2

TEOREMA

Para todo grafo planar en el que el grado de cada vértice sea al menos 2 se verifica V + C = A + 2

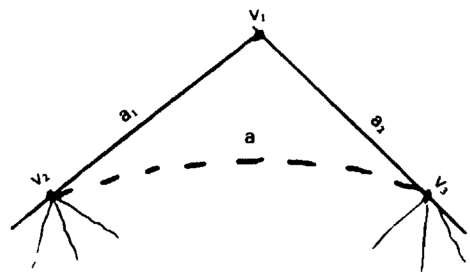
DEMOSTRACION: El camino que seguiremos en la demostración del teorema será el de reducir el grafo inicial a un grafo planar de tres vértices, esto lo conseguiremos aplicando las siguientes operaciones:

1.ª) Suprimiendo un vértice de orden 2
2.ª) Suprimiento una arista que limita dos regiones.

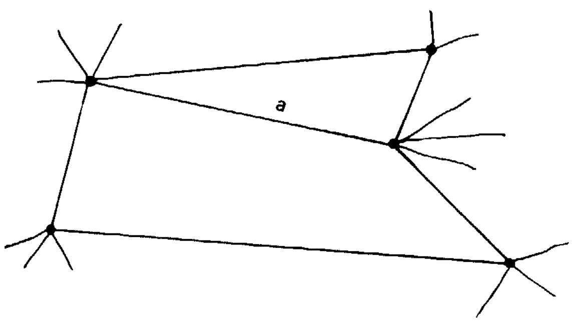
A estas operaciones en lo sucesivo nos referiremos con el nombre de COLAPSOS. Designaremos por M al número C + V − A del grafo inicial.

1.°) SUPRESION DE UN VERTICE DE ORDEN 2

Si suprimimos el vértice v_1 entonces las aristas a_1 y a_2 se reemplazan por una única arista a. Si designamos por C', V' y A' las características del nuevo grafo tenemos: C' = C V' = V − 1 A' = A − 1 luego M' = C' + V' − A' = C + (V − 1) − (A − 1) = C + V − A = M. Como vemos al realizar esta operación, *colapso,* los números M' y M coinciden.



2.°) SUPRESION DE UNA ARISTA QUE LIMITA DOS REGIONES



Si suprimimos la arista *a*, las características del nuevo grafo son:

$V' = V \quad C' = C - 1 \quad A' = A - 1$ luego:

$M' = C' + V' - A' = (C-1) + V - (A-1) = C + V - A = M$. Nuevamente los números M' y M permanecen invariantes por este colapso.

Podemos concluir: el número M permanece invariante en cualquier tipo de colapsos, luego también permanece invariante en cualquier sucesión de colapsos. Será siempre posible encontrar una sucesión de colapsos que transforme el grafo inicial en un grafo planar de tres vértices, en virtud del lema el valor de M será 2 y, por tanto:

$$C + V - A = 2 \qquad C + V = A + 2 \qquad \text{C.Q.D.}$$

Este teorema se conoce con el nombre de TEOREMA DE EULER. Para una posterior aplicación a poliedros regulares, que dan lugar a grafos regulares, podemos sustituir grafo planar por grafo regular.

COROLARIO

En todo grafo regular se verifica $mV = 2A = n\,C$ y $\left(\frac{2}{n} + \frac{2}{m} - 1\right) A = 2$, siendo:

m grado de cada vértice

n número de aristas que limitan una región (cara)

DEMOSTRACION

En cada vértice inciden m aristas y cada arista tiene dos vértices, luego se verifica: $m\,V = 2\,A$

Por otro lado, cada región (cara) definida por P (G) está limitada por n aristas y cada arista del grafo es frontera de dos regiones, luego tendremos:

$$\frac{nC}{2} = A; \; n\,C = 2\,A \text{ luego: } mV = n\,C = 2\,A$$

Si ponemos V y C en función de A tenemos: $V = \frac{2A}{m} \quad C = \frac{2A}{n}$

que sustituidos en la expresión del teorema de Euler nos da:

$$\frac{2A}{n} + \frac{2A}{m} = A + 2 \quad \text{o sea} \quad \frac{2A}{m} + \frac{2A}{n} - A = 2$$

de donde: $\left(\frac{2}{m} + \frac{2}{n} - 1\right) A = 2 \quad$ C.Q.D.

Podríamos escribir la expresión anterior de la forma:

$$A = \frac{2mn}{2m + 2n - mn}$$

Utilizando este corolario vamos a encontrar todos los posibles grafos regulares. Si nalizamos la ecuación:

$\left(\frac{2}{m} + \frac{2}{n} - 1\right) A = 2$ tendremos, al ser A un número natural:

$$\frac{2}{m} + \frac{2}{n} - 1 > 0 \quad \text{o sea} \quad \frac{2}{m} + \frac{2}{n} >= 1 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}}$$

Supondremos que $n \geqslant 3$ y $m \geqslant 2$ (el caso $n = 3$ y $m = 2$) es el grafo regular más elemental que podemos construir como ya hemos visto en la parte b) del Lema anterior.

APLICACION

Vamos a aplicar lo anterior para la determinación de todos los poliedros regulares, que producen grafos regulares. Recordemos:

DEFINICION: Llamamos poliedro regular a un poliedro cuyos vértices (al menos 4) tienen el mismo orden (al menos 3) y sus caras son polígonos regulares. El desarrollo de un poliedro regular se puede asimilar a un grafo regular de al menos cuatro vértices, todos de orden superior a tres. Por tanto $n \geqslant 3$ y $m \geqslant 3$ (el caso $m = 2$ no da polígonos).

Estudiemos las posibles configuraciones según los distintos valores de m y n. Recordemos:

$$A = \frac{2\,m\,n}{2m + 2n - mn}$$

$$V = \frac{2\,A}{m}$$

$$C = \frac{2\,A}{n}$$

Formaremos la siguiente tabla:

n	m	$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$	A	V	C	NOMBRE
3	3	$2/3 > 1/2$	6	4	4	Tetraedro
3	4	$7/12 > 1/2$	12	6	8	Octaedro
3	5	$8/15 > 1/2$	30	12	20	Icosaedro
4	3	$7/12 > 1/2$	12	8	6	Exaedro o cubo
5	3	$8/15 > 1/2$	30	20	12	Dodecaedro

No existe otro par de valores de m y $n \geqslant 3$ que verifiquen:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2},$$

luego podemos concluir que el número máximo de poliedros regulares es 5 como ya sabíamos de los cursos elementales de Geometría.

Esperamos haber logrado en este pequeño trabajo lo que nos proponíamos, llevar al ánimo de nuestros alumnos, que con mucha frecuencia nuevas teorías de la matemática nos ayudan a la demostración de algunas cuestiones ya conocidas.

BIBLIOGRAFIA

Graphes et Polyedros. B. Lanager: Bulletin APMEP nú. 206.
Puntos y Flechas. A. Kaufmann: Marcombo.
Matematica Moderna Aplicada. J. C. Turner: Alianza Universidad.