

# DESARROLLO DE TÉCNICAS INTERACTIVAS DE TUTORIZACIÓN Y FORMACIÓN. APLICACIÓN A SITUACIONES ESPECIALES DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

JOSÉ M<sup>a</sup>. FORTUNY

PEDRO COBO

LOURDES FIGUEIRAS

*Universidad Autònoma de Barcelona*

## RESUMEN

*El proyecto de investigación "Técnicas interactivas de tutorización y formación" tiene dos objetivos generales: identificar modelos de interacciones entre pares de estudiantes, y explorar y analizar los procesos comunicativos entre tutores y estudiantes en situaciones de educación a distancia. En ambos casos, observamos la influencia de las interacciones en el desarrollo individual del conocimiento matemático de los estudiantes y del conocimiento profesional del tutor. Analizamos casos concretos correspondientes al primer objetivo —identificación de interacciones entre pares de estudiantes—, y mostramos las características de dos de ellas: relanzamiento y cooperativas.*

## 1. INTRODUCCIÓN

El proyecto de investigación «*Técnicas interactivas de tutorización y formación*» (DGES, convocatoria 1996) comenzó a desarrollarse en la Universidad Autónoma de Barcelona en el año 1998 con una duración prevista de dos años.

La elaboración de este proyecto respondía a una doble motivación por parte de los miembros del grupo de investigación DI del Departament de Didàctica de

las Matemàtiques i les Ciències Experimentals (UAB) que estàbamos investigando en ese momento el papel de las interacciones, la comunicaci3n y las nuevas tecnologías en la educaci3n matemàtica. En primer lugar, nos marcamos los objetivos de identificar modelos generales de interacciones entre dos estudiantes de 16-17 ańos en la resoluci3n de problemas de matemàticas, y observar hasta qu3 punto dichas interacciones influyen en su desarrollo individual del conocimiento y de las habilidades heurísticas. Uno de los resultados de esta primera fase fue la presentaci3n de la tesis de Cobo (1998), cuyas aportaciones mäs relevantes serán el contenido de esta presentaci3n.

En segundo lugar, tenemos en la actualidad la preocupaci3n por encontrar un modo de atenci3n al alumnado que por diversos motivos no puede acudir físicamente a su centro educativo y el compromiso de encontrar el modo de asegurar la continuidad de su formaci3n (chicos y chicas hospitalizados o que deben permanecer en sus casas por problemas de salud, deportistas de alto rendimiento, etc.). De ahí, el interés por ampliar el proceso de investigaci3n que veníamos realizando sobre la relaci3n de las nuevas tecnologías con los procesos comunicativos en la educaci3n matemàtica. En aquel momento la utilizaci3n de Internet permitía que, desde la universidad, pudiésemos ofrecer una alternativa real para esos estudiantes, manteniendo contacto con ellos a trav3s del correo electr3nico y de video-conferencias, al tiempo que continuar investigando nuevas posibilidades de utilizaci3n de estas tecnologías. Ademäs, el proyecto contemplaba la posibilidad de trabajo colaborativo con estudiantes en condiciones normales de escolarizaci3n, que trabajaban parte del curriculum en contacto con tutores de la universidad a trav3s de Internet. Así el segundo objetivo general del proyecto de investigaci3n persigue “explorar y analizar los procesos comunicativos que tienen lugar entre tutores y estudiantes en situaciones de educaci3n a distancia y su influencia sobre el conocimiento matemàtico de los alumnos y el conocimiento profesional del tutor”.

El entramado de enfoques y posibilidades de investigaci3n que reúne este proyecto fue atendido mediante la programaci3n de diversos subproyectos que abarcan de manera operativa algunas de estas posibilidades y enfoques. Expondremos en primer lugar cuáles son, en general, las características te3ricas y metodol3gicas que soportan las diversas investigaciones del proyecto global, salvando los matices correspondientes que competen a cada uno de aquellos proyectos mäs pequeños, y continuaremos con una descripci3n breve del trabajo realizado en cuatro de estos subproyectos.

La experiencia acumulada hasta este momento y la calidad de los resultados obtenidos avalan la necesidad de continuar con este proyecto de investigaci3n, que precisa adaptarse al rápido crecimiento de la tecnología. Esto nos permitirá evaluar la utilidad de dicha tecnología con fines educativos, especialmente en la educaci3n matemàtica. Las aportaciones de esta segunda parte serán presentadas en futuros foros de investigaci3n.

## 2. ENFOQUE TEÓRICO

Existe actualmente un amplio y fructífero debate en la comunidad internacional de educación matemática sobre los enfoques teóricos en las investigaciones y su correspondiente epistemología. Las diversas interpretaciones para las investigaciones en educación matemática, que provienen del constructivismo, del enfoque socio histórico o del interaccionismo, son continuamente comparadas, enfrentadas o planteadas de modo complementario en discusiones que no sólo competen a la educación matemática sino a la educación en general (Sierpiska y Lerman, 1996). Todas estas consideraciones resultan esenciales para dar forma a la investigación en educación matemática y lo que es aún más importante, para poder trasladar el resultado de estas investigaciones a la práctica docente. Parece evidente, tal y como hemos introducido este proyecto, que nuestros puntos de vista teóricos están cercanos a los enfoques socioculturales e interaccionistas, y así es: de la teoría sociocultural, tomamos que el alumnado y también el profesorado están envueltos por la cultura y otras situaciones sociales de tipo local que hacen que no tenga sentido hablar del individuo, o del conocimiento si no es a través del contexto en el que se realiza la actividad. De otro modo no podríamos comprender, por ejemplo, en qué medida es diferente la situación de un estudiante que está hospitalizado, de la de un deportista de alto rendimiento, o de la de un estudiante que trabaja en el aula. Además, una de las principales consecuencias derivadas de la realización de este proyecto es precisamente su efecto social sobre el alumnado: la atención a los diversos contextos de diversidad en el diseño de las investigaciones y el hecho de establecer una relación entre el estudiante y alguien ajeno a su entorno habitual familiar, educativo y/u hospitalario, hace que los objetivos que se alcanzan no se refieran únicamente a las matemáticas, sino que tengan implicaciones que van más allá del contenido matemático.

Si del enfoque sociocultural recogemos el énfasis puesto en la atención al contexto, en el interaccionismo encontramos otros aportes que resultan especialmente interesantes para nuestro trabajo y para el desarrollo metodológico que tendremos en cuenta más adelante. Aunque el interaccionismo puede ser considerado como un tipo de enfoque similar al sociocultural en lo que se refiere a las fuentes y la ampliación del propio conocimiento, lo que lo distingue y se ve reflejado en nuestras investigaciones es que las interacciones (de muchos tipos) no son entendidas exclusivamente como un medio para comprender el conocimiento, sino que son consideradas inseparables de su avance. Se hace mucho hincapié, por lo tanto, en que el foco de estudio no es el individuo, sino las interacciones que tienen lugar entre ellos.

En la educación matemática, ambos enfoques tienen su origen principalmente en la psicología cultural (Cole, 1996) y el interaccionismo (Bruner y Bornstein, 1989). Los trabajos del propio Cole (op. cit.) y Bishop (1988) son especialmente importantes para considerar la idea de contexto y trabajo colaborativo. En cuanto al interaccionismo, los trabajos de Cobb y Bauersfeld (1995) son exponentes importantes de su adaptación a la educación matemática. De ellos

tomamos principalmente la idea de que el aprendizaje, particularmente en las matemáticas, no es exclusivamente el intento de que el estudiante se adapte a las condiciones de su contexto cultural, sino que la construcción individual del conocimiento tiene lugar en la interacción con el resto de personas participantes del contexto, al mismo tiempo que esa interacción contribuye a la construcción de la cultura. Por otra parte, Crook (1994) realiza una importante y útil adaptación de la psicología cultural a la utilización de los ordenadores en el aula, recogiendo muchas de las propuestas del interaccionismo.

En la discusión entre estas dos teorías y el complemento entre una y otra se sitúa precisamente el marco general de nuestro proyecto, que tiene variaciones pequeñas dependiendo de cada uno de los subproyectos que se están llevando a cabo.

Así mismo, es importante entender que el contexto del aula no puede desligarse de ese otro contexto cultural en el que la tecnología está inmersa y de las reacciones sociales ante la tecnología. Estas consideraciones son las que nos permiten interpretar determinadas reacciones del profesorado, de los padres, o de los propios estudiantes hacia el uso de nuevas tecnologías (reparo ante su utilización en las aulas, miedo del profesorado a perder protagonismo en la actividad de instrucción, magnificación de las posibilidades que ofrece, etc.). En este sentido, uno de los principales aspectos que nos interesa tener en cuenta es la consideración de la *tecnología* desde un punto de vista amplio, que permita atender el contexto del aula de matemáticas, cuando son introducidas, o la viabilidad de su utilización para la educación a distancia. Uno de los usos más habituales de los ordenadores en las aulas es el de soporte de aplicaciones que facilitan la visualización y el tratamiento de los datos. Otro uso, sin embargo, mucho más novedoso y central en nuestras investigaciones, es el de soporte para la comunicación a distancia, bien a través de correo electrónico o videoconferencias.

Estas primeras consideraciones teóricas tienen una enorme cantidad de implicaciones en el momento de elaborar un soporte para las investigaciones que vamos llevando a cabo y justifican la necesidad de considerar proyectos más pequeños: nos encontraremos con situaciones de atención a distancia, en las que un único estudiante en condiciones especiales es atendido por una tutora; otras en las que el grupo-clase trabaja desde su centro y se comunica a través de un fórum con su tutor; otras en las que los alumnos utilizan aplicaciones informáticas compartidas con un tutor a través de videoconferencias, etc. Todas éstas son situaciones que caben perfectamente en nuestro proyecto pero que precisan ser consideradas de manera diferenciada.

### 3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS

Teniendo en cuenta los objetivos generales de nuestro proyecto y las referencias teóricas expuestas, desde las cuales interpretamos nuestras observaciones, es claro que la metodología de investigación que elegimos presta atención

a los diferentes enfoques con los que los estudiantes acceden a los conocimientos matemáticos, y se sitúa, evidentemente, en el amplio campo de los métodos cualitativos. Como señalan Denzin y Norman, (1994) la elección de una determinada técnica no puede considerarse por sí sola como garantía de una investigación de tipo cualitativo. El tratamiento de los datos y la interpretación desde un enfoque u otro adquieren entonces un valor importante y en este sentido existen matices que diferencian, dentro de nuestro proyecto, unas investigaciones de otras. No todas emplean el mismo método debido a las circunstancias, el diseño, y los participantes. No existen tampoco los mismo tipos de datos ni son tratados igualmente. Esta riqueza de métodos y enfoques nos ofrece la posibilidad de ampliar y discutir las posibilidades de utilización de los nuevos medios desde diferentes perspectivas. En general, podemos concluir que los datos son obtenidos a través de:

- Observaciones de los investigadores e investigadoras recogidas en forma de notas de campo.
- Entrevistas planificadas de acuerdo a diferentes niveles de estructuración.
- Diferentes cuestionarios (más o menos cerrados) en cuanto a la posibilidad de amplitud narrativa de la respuesta.
- Grabaciones en vídeo de acciones de aula y videoconferencias.
- Trabajos de los alumnos.

El tratamiento y análisis de los datos incorpora en general en las diversas investigaciones la perspectiva del análisis del discurso, de acuerdo a la atención que desde nuestro enfoque teórico se presta a las interacciones y al uso lingüístico contextualizado.

A continuación presentamos un resumen de la investigación que dio origen al proyecto —identificación de interacciones entre pares de estudiantes—, de la que mostramos algunos resultados, y, de forma mucho más breve, describimos otras investigaciones que se están desarrollando dentro del mismo proyecto —subproyectos TIMAH, CAR, TELEMATCAR y CLAVIJO—, y que nos ofrecerán una imagen muy concreta de la acción de investigación que venimos llevando a cabo.

#### 4. SUBPROYECTO “IDENTIFICACIÓN DE INTERACCIONES ENTRE PARES DE ESTUDIANTES”

Los actuales movimientos de la reforma educativa ponen mucho énfasis en el papel que desempeña la interacción social en el aprendizaje matemático de los estudiantes. Esta tendencia está de acuerdo con las ideas de Vygostki sobre el hecho de que los procesos interpersonales son la base de los procesos intrapersonales. Siguiendo esta aproximación y partiendo de la base de que a lo largo del proceso de resolución de un problema se pueden producir diferentes formas de interactuar entre los alumnos que participan (Webb, 1989), planteamos una investigación que pretende analizar la naturaleza y calidad de las interacciones que se producen en los procesos de resolución de problemas de matemáticas entre alumnos.

Para estudiar la naturaleza de las interacciones profundizamos en los tipos de intercambios que se producen y en la forma de combinarse durante el proceso de resolución. Para ello tendremos en cuenta tres aspectos: las formas sintácticas de las intervenciones —si son aserciones, preguntas, demandas de validación, respuestas, validaciones, respuestas de validación—; el carácter directivo o de gestión de las intervenciones; y las relaciones (o encadenamientos) que hay entre unas intervenciones y otras, en particular, las formas en que se producen las transiciones entre ellas —si hay pausas, solapamientos o interrupciones—. En cambio, para valorar la calidad de las interacciones, las relacionamos con las estrategias que los alumnos utilizan en el transcurso de la resolución del tipo de problemas que proponemos.

Así pues, esta investigación pretende responder, entre otras, a las siguientes preguntas: ¿qué modelos generales de interacciones se producen entre dos estudiantes de 16-17 años en la resolución de problemas que comparan áreas de superficies planas?, y ¿hasta qué punto dichas interacciones influyen de forma significativa en el desarrollo individual del conocimiento y de las habilidades heurísticas en los procesos de resolución de problemas?

#### 4.1. ANÁLISIS DEL DISCURSO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Para comprender el papel desarrollado por las interacciones entre iguales en la promoción del conocimiento, necesitamos analizar y proporcionar información sobre los mecanismos involucrados en la comunicación de los alumnos.

En la resolución de problemas, entendemos por análisis del discurso el estudio del uso de la lengua que se produce entre personas concretas que hablan, con la intención de encontrar estrategias y de generar conocimientos que conduzcan a resolver un problema.

La comunicación en la resolución de problemas tiene unas características especiales que la diferencian de otros tipos de conversaciones. En este estudio, esas características están relacionadas con la resolución de un tipo concreto de problemas geométricos, los que comparan áreas de superficies planas, y con el hecho de que la conversación se mantiene entre dos interlocutores. En este contexto, pretendemos aportar una forma nueva de identificar y analizar las interacciones entre pares de alumnos, basada en la consideración de dos dimensiones fundamentales del análisis del discurso: *la temática y la interlocutiva*.

##### 4.1.1. *Dimensión temática*

La dimensión temática del discurso en la resolución de problemas está relacionada con la forma en que los alumnos contribuyen al desarrollo del proceso de resolución. En el análisis de la construcción temática diferenciamos tres unidades, que, ordenadas de menor a mayor rango, son: la intervención, el intercambio y la interacción.

Definimos la intervención como la aportación temática de un individuo al desarrollo de lo que se habla y sobre lo que dará información o tomará posición

(Calsamiglia y Tusón, 1999). En el contexto en el que nos movemos, la aportación temática que realiza cada alumno está relacionada con los contenidos matemáticos que utiliza en la resolución de los problemas.

El intercambio es la unidad dialogal más pequeña. Lo definimos en términos de acción-reacción de la siguiente forma: la intervención del locutor L1 produce una reacción en su interlocutor L2 si en la intervención de L2 hay alguna referencia explícita (verbal o gestual) al contenido de la intervención de L1 o a alguno de sus elementos.

Un intercambio puede estar compuesto por dos intervenciones. En este caso, a la primera la llamamos iniciativa (acción) y a la segunda, reactiva (reacción). Es posible que la intervención iniciativa de un locutor no produzca reacción en su interlocutor. En este caso consideramos que el intercambio está formado por una sola intervención. La estructura más “normal” de un intercambio es la formada por tres intervenciones (Roulet et al., 1987) en el siguiente orden: intervención iniciativa, reactiva y evaluativa.

Consideramos las interacciones como una sucesión de intercambios. En nuestro caso, proponemos una delimitación de las mismas basada en lo que llamamos episodios sociales, que son periodos de tiempo en los que los estudiantes culminan una fase del proceso seguido por un resolutor real, en el sentido de Schoenfeld (1985); o interpretan o se benefician de una mayor comprensión de los conceptos y procedimientos involucrados en la resolución de problemas, gracias a su confrontación; o incluso implementan un enfoque que les conduce directamente a la solución.

#### 4.1.2. *Dimensión interlocutiva*

La dimensión interlocutiva del discurso es la mecánica de la comunicación y de los comportamientos comunicativos de cada interlocutor (Calsamiglia y Tusón, 1999).

Quando nos referimos a la mecánica de la comunicación queremos significar el origen y la forma en que los interlocutores toman la palabra: si lo hacen por iniciativa propia (autoselección), es decir, si no hay indicaciones implícitas ni explícitas en la intervención de un locutor que sugiera a su interlocutor tomar la palabra; o si lo hacen como consecuencia de una solicitud de otros individuos (heteroselección), es decir, si hay indicaciones explícitas (preguntas directas, imperativos o aserciones seguidas de demandas de respuesta) por parte de un locutor que sugieran a su interlocutor tomar la palabra.

### 4.2. IDENTIFICACIÓN DE INTERCAMBIOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

En el análisis de los comportamientos (o papeles) comunicativos de los alumnos, y, por tanto, en el de las interacciones, integramos las dimensiones temática e interlocutiva del discurso, definiendo diferentes tipos de intercambios, en los que tenemos en cuenta los contenidos matemáticos de las intervenciones de cada alumno, las formas sintácticas y las relaciones entre las diferentes intervenciones.

De entre todos los tipos de intercambios que hemos identificado en nuestros análisis (Cobo, 1998), mostramos a continuación la definición de algunos de ellos.

En un intercambio “cooperativo”, la intervención de L2 modifica de alguna forma el contenido de la intervención de L1, ya sea: *i)* introduciendo alguna información equivalente a la intervención de L1, *ii)* aportando alguna información nueva que complementa a la intervención de L1, o *iii)* introduciendo en el diálogo algún elemento nuevo.

En un intercambio del tipo “pregunta-respuesta”, L2 se limita a responder a la pregunta efectuada por L1, cuyo contenido no hace referencia al de intervenciones anteriores.

En un intercambio del tipo “validación-continuación”, L2 se limita a validar el contenido (o simplemente a repetir una parte del mismo con la intención de confirmarlo) de la intervención de L1 y éste continúa el discurso haciendo referencia a su última intervención. Consideramos dentro de esta categoría los intercambios en los que el alumno L1 afirma una proposición y demanda validación, se produce la validación por parte de L2, y L1 vuelve a hacer referencia a la afirmación de su intervención anterior.

En un intercambio del tipo “aclaramentario”, L2 se limita a pedir explicación (o bien confirmación) del contenido de la intervención de L1 (o de alguno de sus elementos) y L1 responde a dicha demanda.

En los dos últimos intercambios que hemos definido, la continuación del discurso por parte de L1 se puede producir en términos de simple repetición del contenido de su primera intervención, en cuyo caso tendríamos un intercambio que llamamos repetitivo, o bien aportando alguna información equivalente, complementaria, o introduciendo algún elemento nuevo; en este caso tendríamos un intercambio que llamamos progresivo.

#### 4.3. DESCRIPCIONES DE LAS INTERACCIONES EN EL ENTORNO DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Para conseguir los objetivos que nos proponemos analizamos un contexto situacional en el que dos alumnas de Enseñanza Secundaria (16 años) interactúan (hablan, escriben, hacen gestos...) para resolver problemas de matemáticas, en un tiempo de aproximadamente 25 minutos para cada problema, en presencia de un observador que no interviene y de una cámara de vídeo que registra todo el proceso de resolución. Las conversaciones de las alumnas son registradas, transcritas y analizadas desde una perspectiva cualitativa.

En la obtención de los datos orales, utilizamos el siguiente problema:

##### PROBLEMA DEL TRIÁNGULO

*ABC es un triángulo cualquiera y D un punto del lado AB que divide a éste en dos segmentos que están en proporción 2 a 1. Si DE y DF son segmentos paralelos a los lados AC y BC, respectivamente, ¿qué relación hay entre las áreas de los triángulos DBE y FEC?*

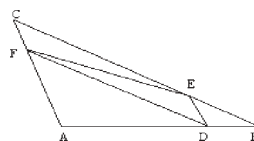


Figura 1



Para describir e interpretar detalladamente las interacciones, presentamos datos orales correspondientes a un par de alumnas: Rosa y Anna, que han sido elegidas de manera que formen una pareja heterogénea — difieren tanto en su orientación visual-algebraica como en su nivel académico—, para facilitar la comunicación entre ellas.

En esta presentación describimos sólo dos formas de interactuar de Rosa y Anna, otras formas se pueden encontrar en Cobo (1998) y Cobo y Fortuny (2000).

#### 4.3.1. *Modelo interactivo de relanzamiento del proceso de resolución.* *Episodio social de análisis/exploración*

En el inicio de la resolución del problema del triángulo, Rosa y Anna tratan de comprender el enunciado del problema e interpretan la proporción de los segmentos AD y DE (Figuras 2 y 3).

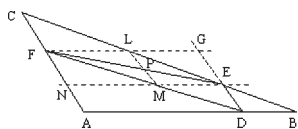


Figura 2. Reproducción de una de las figuras de las alumnas (con letras añadidas)



Figura 3. Figura final dibujada por Anna y redibujada por Rosa

El episodio de análisis/exploración comienza con la identificación de la igualdad de los triángulos FDE y FEC (Figura 2). En el resto del episodio, observamos una forma de actuar de las alumnas que se repite tres veces consecutivas. Cada una de estas formas de actuar consta a su vez de cuatro partes: la identificación del objetivo del problema —llegar a relacionar las áreas de los triángulos FEC y DBE—; el trabajo en paralelo con referencias gestuales a los elementos de las figuras o con pausas largas (más de 30 segundos); la introducción de información nueva, siempre relacionada con el trazado de paralelas a los lados de los triángulos; y la búsqueda exploratoria de relaciones entre los triángulos obtenidos con la división de la figura original y entre los elementos lineales de dicha figura.

Interpretamos que las alumnas, cuando no saben seguir, explicitan el objetivo del problema con la finalidad de tener presente a dónde quieren llegar (intervenciones 26 y 27).

26. Anna: *Relación entre...* [señala FEC y DBE].

27. Rosa: *Entre éste de aquí* [FEC] *y éste de aquí* [DBE] <pausa(35)>

La referencia al objetivo marca el inicio de una situación de bloqueo de la que las alumnas tratan de salir reflexionando individualmente sin realizar ningún gesto (pausa de la intervención 27). Tras esa reflexión individual, las alumnas hacen aportaciones, siempre de la misma naturaleza: trazado de paralelas a los lados del triángulo (intervención 28).

28. Anna: [Traza por F una paralela a AB, Fig. 2]. *Si trazamos...*[indica dicha paralela en la Fig. 3]. *Éste* [FME] *es igual que éste* [FLE], *¿no?, serán iguales. Éste que queda arriba* [FLC], *¿no es igual que éste?*[DBE], *no, ¿o sí? Yo diría que sí* [se va a la figura del enunciado y simula trazar la paralela a AB por F], *no*.

Esa aportación de información les abre la perspectiva de la búsqueda de relaciones entre los elementos de los nuevos triángulos que se obtienen. En este caso, esa búsqueda de relaciones se centra en intentos de comparación de los triángulos (FME y FLE, FLC y DBE, intervención 28) y de los segmentos que resultan (intervenciones 31 a 34).

31. Rosa: *El trozo de aquí* [DB] *¿cómo sería con éste de aquí?* [DE].

32. Anna: *Yo diría que este trozo de aquí a aquí* [AN] *es igual que éste de aquí* [DE], *claro, porque son paralelas, una paralela...* [indica DE y AC].

33. Rosa: *Sí, sí, éste de aquí* [DE] *sería el mismo que éste de aquí* [FL].

34. Anna: *Yo diría que este trozo* [FL] *sería el mismo que éste* [DB], *¿no?, porque si partimos de aquí a aquí...* [AN].

Esta sucesión de intervenciones se inicia con un intercambio pregunta-respuesta. En él, Rosa pregunta sobre la relación que hay entre los segmentos DB y DE (intervención 31), y Anna responde a dicha pregunta (intervención 32), aunque, en este caso, la intervención de Anna no sea una respuesta directa a la pregunta de Rosa, posiblemente porque no hay una relación determinada entre los segmentos DB y DE. El contenido de la pregunta de Rosa no hace referencia al de la intervención anterior de Anna —“Sí que debería de ser” (intervención 30)—, en la que sólo confirma la igualdad de los triángulos FLC y DBE introducida por ella misma en la intervención 28.

El papel comunicativo que asumen las alumnas en esta parte de búsqueda de relaciones, tras la intervención 28, empieza con un intercambio de validación-continuación, iniciado por ellas mismas, al que sigue un diálogo cooperativo (intercambios 31 a 35), que comienza con la pregunta de Rosa (intervención 31). Ese diálogo cooperativo aporta informaciones que aparecen por primera vez en el proceso de resolución, aunque alguna de ellas no sea correcta (intervención 33). La cooperación degenera en una sucesión de dos intercambios (intervenciones 35 a 39) en los que Rosa lleva la iniciativa y Anna se limita simplemente a validar las afirmaciones, seguidas de demandas de validaciones, de su compañera.

35. Rosa: *Porque si trazamos esta paralela* [paralela a AB por F], *este trozo que nos queda aquí, éste de aquí* [FME] *es el mismo que éste de aquí* [FLE], *¿no?*

36. Anna: *Sí*.

37. Rosa: *Y éste de aquí...* [DBE], *éste de aquí* [MDE] *y éste de aquí* [FLC] *son iguales, ¿no?*

38. Anna: *Sí*.

39. Rosa: *Hemos de buscar la relación entre éste* [FEC] *y éste* [DBE].

Los dos intercambios dirigidos por Rosa acaban (intervención 39) con la identificación del objetivo, lo que origina una nueva repetición de la forma de actuar que hemos descrito.

Como hemos dicho anteriormente, en este episodio las alumnas hacen tres

aportaciones sobre el trazado estratégico de paralelas: Rosa, en una intervención gestual, traza la paralela a AB por E. Ésta es una nueva habilidad heurística.

15. Rosa: [Traza por E una paralela a AB y señala los triángulos MDE y DBE, Fig. 2].

Anna traza la paralela a AB por F (intervención 28) y Rosa vuelve a trazar la paralela a AC por M (intervención 41).

41. Rosa: *Y éste de aquí, así* [traza el segmento LM y señala el triángulo MEL] *es igual que éste* [MDE], *¿no?*

Estas tres aportaciones tienen su origen en un trabajo en paralelo o reflexiones individuales. Las relaciones entre los elementos de las figuras que obtienen como consecuencia de dichas aportaciones contribuyen de forma definitiva a obtener una solución del problema.

La interacción que hemos identificado en este episodio —a la que llamamos de *relanzamiento* del proceso de resolución— es una de las formas con que las alumnas afrontan la búsqueda de nuevas relaciones entre los elementos de las figuras. Rosa y Anna reproducen formas de actuar que se basan, esencialmente, en: explicitaciones del objetivo, reflexiones individuales, tras las cuales suelen introducir informaciones nuevas que son analizadas conjuntamente para generar nuevas informaciones.

#### 4.3.2. Modelo de interacción cooperativa. Episodio social de evaluación local

Ambas alumnas mantienen un diálogo formado en su mayoría por intercambios cooperativos (parte de ese diálogo lo mostramos en la Figura 4). En él, ambas alumnas se suelen referir a los resultados obtenidos anteriormente con frases que comienzan por: “Aquí hemos trazado...”, “hemos llegado a...”, etc. Esa forma cooperativa de interactuar conecta, en un momento determinado (intervención 61), con la introducción de informaciones nuevas.

En este diálogo cooperativo (Figura 4), las alumnas solicitan explícitamente —mediante demandas de validación— en dos ocasiones (intervenciones 54 y 55) la toma de palabra a su compañera, y en otras tres (intervenciones 51, 52 y 57) de una forma implícita —dejando las frases sin acabar—.

51. Rosa: [Pone letras en los vértices]. *Aquí hemos trazado esta paralela* [paralela por E a AB], *que pasa desde aquí...*

52. Anna: *Hemos llegado a que éste...* [MDE].

53. Rosa: *Éste de aquí* [MDE] *es igual a éste* [DBE].

54. Anna: *Porque la misma distancia que hay de aquí a aquí* [NA], *hay de aquí a aquí* [DE], *¿no?*

55. Rosa: *Sí, y el mismo ángulo, éste* [NAB] *es éste de aquí* [EDB], *¿ves?*

56. Anna: *Porque son paralelas, porque éstas dos son paralelas* [EN y AD], *ésta* [BE] *y ésta* [DM] *son iguales.*

57. Rosa: *Sí, (...) entonces hemos dicho que si hacemos una paralela a ésta* [AB] *que pase por...*

58. Anna: *Que pase por el punto F.*  
 59. Rosa: *Por el punto F.*  
 60. Anna: *Y paralela a AB.*  
 61. Rosa: *(...), éste y éste [ME y LG] son iguales y éste y éste [DE y GE] son iguales y la relación de los ángulos también [no especifica cuáles], por tanto, éste [DBE], éste [MDE] y éste [LEG] también son iguales, ¿no?*

Figura 4. Interacción de Rosa y Anna en el episodio social de evaluación local de la resolución del problema del triángulo

La sucesión de intercambios cooperativos garantiza la igualdad de la contribución hecha por las dos alumnas al progreso del proceso de resolución, porque cada intervención aporta alguna contribución nueva o equivalente a la última (Figura 4).

Tenemos aquí un tipo de interacción en el que las alumnas recurren a reproducciones de lo que han conseguido hasta ese momento, asumiendo por igual la responsabilidad en la continuación del diálogo. Esta forma de actuar les sirve de trampolín para generar ideas nuevas. Estamos ante una interacción formada mayoritariamente por intercambios cooperativos a la que llamamos interacción *cooperativa*.

## 5. INFLUENCIA DE LOS MODELOS INTERACTIVOS. DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Analizamos y discutimos esta sección desde un enfoque interaccionista siguiendo el punto de vista emergente de los resultados obtenidos por Yackel y Cobb (1996), y Hershkowitz y Schwarz (1999), en los que se supone que la interacción social facilita el aprendizaje. Cuando pares de alumnos colaboran en la resolución de problemas, se generan una serie de cambios en el aprendizaje. En nuestro caso, estos cambios u oportunidades, que expresamos en términos de beneficios cognitivos, están asociados a la posibilidad de mejora en los procesos argumentativos; a las habilidades heurísticas, normalmente trazado de líneas rectas; a formas de enfocar los problemas; y a formas de generar nuevas ideas dentro de los procesos de resolución del problema.

En los siguientes párrafos analizamos la influencia de las interacciones, descritas en la sección 4, sobre el desarrollo cognitivo de las alumnas. En concreto, relacionamos las contribuciones temáticas y los procesos interlocutivos en los que se generan tales contribuciones con los beneficios cognitivos de las alumnas (ver Tabla I).

La realización de preguntas, que no se refieran explícitamente al contenido de la intervención anterior, dan una nueva orientación al diálogo, siempre que las informaciones nuevas que se introduzcan se conviertan en objeto de discusión. Éste es el caso que analizamos en el episodio de exploración/análisis de la resolución del problema del triángulo (ver Sección 4.3.1). En él, Rosa y Anna reproducen formas de interactuar que se basan, esencialmente, en identificacio-

nes del objetivo, a las que siguen reflexiones individuales, tras las cuales suelen introducir informaciones nuevas —generalmente en forma de preguntas—, que son analizadas conjuntamente y que sirven para relanzar la búsqueda de relaciones entre los elementos de las figuras. A este modelo de interacción le llamamos de *relanzamiento* del proceso de resolución. Rosa y Anna llegan a desbloquear, de esa forma, el proceso de resolución.

Las contribuciones temáticas en esta interacción están relacionadas con el trazado de rectas paralelas a los lados del triángulo, y con la búsqueda exploratoria de igualdades entre los segmentos y triángulos que resultan. En el primer caso, se producen después de reflexiones individuales; en el segundo, en diálogos cooperativos o dirigidos por una de las alumnas.

La relevancia del trazado de rectas paralelas a los lados del triángulo significa que las oportunidades de aprendizaje que se presentan en este episodio están asociadas a ese tipo de habilidades heurísticas así como al enfoque geométrico que tras ellas se genera.

La revisión cooperativa de los resultados que las alumnas han obtenido previamente, genera nuevas ideas, lo que contribuye de forma positiva al desarrollo del proceso. Éste es el caso de la actuación de las alumnas en el episodio social de evaluación local de la resolución del problema del triángulo (ver Sección 4.3.2). Aquí los intercambios cooperativos están formados por intervenciones cuyos contenidos matemáticos han aparecido ya en el proceso de resolución (y las alumnas simplemente los repiten). Además, ellas asumen papeles comunicativos similares, puesto que sus intervenciones son aserciones, seguidas en la mayoría de los casos por solicitudes (explícitas e implícitas) de continuación del diálogo.

Creemos que todos las interacciones que hemos identificado pueden formar parte del proceso de aprendizaje de las alumnas. A pesar de ello, la interacción cooperativa puede ser más fácil de asimilar, puesto que las contribuciones temáticas nuevas se producen sólo al final de ella y no durante la propia interacción. Sin desmerecer la importancia de este último tipo de interacción cooperativa, creemos que es muy útil fomentar los diálogos cooperativos en los que cada alumna haga contribuciones que no hayan aparecido previamente en el proceso de resolución.

INTERACCIÓN	CONTRIBUCIONES TEMÁTICAS	INTERCAMBIOS	BENEFICIOS COGNITIVOS
Relanzamiento	Identificación de la igualdad de triángulos. Comparación de segmentos. Trazado de paralelas. Búsqueda exploratoria de igualdades de triángulos.	Reflexiones individuales seguidas de breves diálogos (cooperativos o guiados por una de las dos alumnas).	Generación de enfoques geométricos. Oportunidad de mejora en la búsqueda de nuevas igualdades. Habilidades heurísticas (trazado de rectas paralelas).
Cooperativa	Revisiones de resultados previos.	En intercambios cooperativos.	Oportunidad de aprender a generar nuevas ideas.

Tabla I. Resumen de las interacciones identificadas y sus efectos sobre el aprendizaje de las alumnas.

Las contribuciones de esta investigación a la identificación de las interacciones y a la evaluación de la productividad en la resolución de problemas son consecuencia de tres decisiones que hemos tomado en el diseño de la investigación que presentamos: la agrupación de los alumnos por parejas, la no intervención del observador en el proceso de resolución y la decisión de haber sacado las observaciones fuera del contexto de la clase. Por tanto, quedan abiertas a nuevas investigaciones, entre otras, cuestiones como la adaptación y ampliación del modelo de intercambios propuesto al caso de más de dos alumnos y de éstos con el profesor, y la identificación de nuevas formas de interactuar en la resolución de problemas por parejas en otros contextos.

## 6. SUBPROYECTO TIMAH

Esta investigación se dirige específicamente a la tutorización de estudiantes de Enseñanza Secundaria Obligatoria en situación de hospitalización o en sus casas por causa de alguna enfermedad o indisposición de larga duración. Trabajamos en concreto con alumnos que están en tratamientos oncológicos, traumatológicos o de hemodiálisis. Desde la universidad contactamos con los centros hospitalarios correspondientes, con el centro escolar y con la familia del estudiante para diseñar e implementar una unidad de contenidos con la que pueda trabajar a través de Internet y comunicarse con un tutor que oriente su trabajo.

Entre los objetivos de investigación de este proyecto, destaca la atención a variables afectivas y del entorno que influyen en el aprendizaje del estudiante.

## 7. SUBPROYECTO TELEMATCAR

Esta investigación se dirige especialmente a la atención a alumnos del Centro de Alto Rendimiento Deportivo de Sant Cugat (CAR) cuando están en su instituto habitual, ubicado en las mismas instalaciones del CAR. Los alumnos que han elegido la asignatura de estadística como asignatura optativa llevan a cabo parte de sus actividades y ejercicios utilizando la hoja de cálculo MSEXcel, pero no es su profesor habitual el que trabaja con esta herramienta, sino un tutor en la universidad, con quien se conectan a través de videoconferencia.

El principal objetivo de la investigación es la utilización de aplicaciones útiles para visualizar o facilitar cálculos matemáticos cuando son compartidas en situaciones de educación a distancia.

Estos estudiantes, debido a sus especiales condiciones de deportistas, han de pasar una gran parte del periodo escolar fuera del aula. Llegar a familiarizarse con este tipo de tecnologías favorece que, en el momento de realizar una estancia en otro lugar, sea posible mantener contactos a distancia con ellos a través de estos dispositivos sin que sea necesario una preparación previa por lo que se refiere a la utilización de la tecnología.

## 8. SUBPROYECTO CAR DE TUTORÍA A DISTANCIA

En este caso la atención que se presta al estudiante del CAR es individual, durante el tiempo que permanece fuera del centro escolar. El contenido curricular que el alumno hubiera de atender durante ese periodo de tiempo en el instituto habitual es adaptado y “colgado” en Internet para que pueda acceder a él. Uno de los investigadores en la universidad actúa como tutor durante todo el periodo, modificando y adaptando el diseño de la tutoría según requieran las circunstancias técnicas o de adaptación del estudiante a la nueva situación.

El objetivo principal de esta investigación es conocer cómo se crea la relación entre un estudiante y un tutor cuando están en una situación de enseñanza a distancia, y las características que la diferencian de lo que sucede en una clase presencial.

## 9. SUBPROYECTO CLAVIJO

Esta investigación se lleva a cabo con alumnos de Enseñanza Secundaria Obligatoria que trabajan en su centro habitual con el programa interactivo de geometría CABRI. Discuten a través de un foro electrónico el modo en el que van trabajando y son tutorizados y orientados por un tutor, también en la universidad, al que no conocen.

El objetivo de este proyecto es analizar la utilización de este programa para el aprendizaje de la geometría y la visualización en situaciones de colaboración a distancia.

## REFERENCIAS

- Bishop, A.: 1988, *Mathematical Enculturation: A Cultural Perspective on Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Bruner, J.S. y Bornstein, M.H.: 1989, “On interaction”. En Bruner & Bornstein (eds.) *Interaction in Human Development*, Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale.
- Calsamiglia, H. y Tusón, A.: 1999, *Las cosas del decir. Manual de análisis del discurso*. Ariel Lingüística.
- Cobb, P. y Bauersfeld, H.: 1995, *The emergence of Mathematical Meaning: Interaction in Classroom Cultures*. Lawrence Erlbaum Associates, Hillsdale.
- Cobo, P.: 1998, *Análisis de los procesos cognitivos y de las interacciones sociales entre alumnos (16-17) en la resolución de problemas que comparan áreas de superficies planas. Un estudio de casos*. Tesis. Universitat Autònoma de Barcelona. No publicada.
- Cobo, P. y Fortuny, J.M.: 2000, “*Social interactions and cognitive effects in context of area-comparison problem solving*”. En prensa.
- Cole, M.: 1996, *Cultural Psychology. A one and future discipline*. Harvard University Press.
- Crook, CH.: 1994, *Computers and the Collaborative Experience of Learning*. Routledge, London. [Edición en español: Ordenadores y aprendizaje colaborativo. Morata-MEC, 1998].

- Denzin y Norman, K.: 1994, *The Handbook of Qualitative Research*. Sage, London.
- Hershkowitz, R. y Schwarz, B.: 1999, "The emergent perspective in rich learning environments: some roles of tools and activities in the construction of sociomathematical norms". *Educational Studies in Mathematics* 39: 149-166.
- Roulet, E. et al.: 1987, *L'articulation du discours en français contemporain*. Berna: Peter Lang.
- Schoenfeld, A. H.: 1985, *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, Inc. Orlando.
- Sierpinska, A. y Lerman, S.: 1996, "Epistemologies of Mathematics and of Mathematics education". En Bishop et al. (eds). *International Handbook of Mathematics Education* Bishop et al. Eds. Kluwer Academic Publishers, pp 827-876.
- Webb, N. M.: 1989, "Peer Interaction and Learning in Small Groups". *International Journal of Education Research*, 13, 21-39.
- Yackel, E., Cobb, P.: 1996, "Social norms, argumentation, and autonomy in Mathematics". *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 27, n. 4, pp. 458-477.

#### URL's:

- [http://www.ugr.es/local/seiem/IV\\_Simposio.htm](http://www.ugr.es/local/seiem/IV_Simposio.htm)
- [http://www.blues.uab.es/\\_ipdm4/timaha/Teachersa.htm](http://www.blues.uab.es/_ipdm4/timaha/Teachersa.htm)
- <http://dewey.uab.es/jfortuny/estadistica/frame.htm>
- <http://www.blues.uab.es/home/material/apunts/t055500/apunts.htm>
- [http://cc.uab.es/\\_ipdm1/TEO.ZIP](http://cc.uab.es/_ipdm1/TEO.ZIP)
- [http://blues.uab.es/\\_ipdmc/teo/index.htm](http://blues.uab.es/_ipdmc/teo/index.htm)
- [http://blues.uab.es/\\_ipdm4/informes/jmurillo/REartic.html](http://blues.uab.es/_ipdm4/informes/jmurillo/REartic.html)
- <http://www.unirioja.es/Proyectos/Clavijo/Pag.Clavijo.htm>