



**MEMORIA FINAL RELATIVA AL  
PROYECTO DE TEMATICA EDUCATIVA**

**“FASE ARAGONESA  
DE LA  
XXIII OLIMPIADA ESPAÑOLA DE FÍSICA”**

**Zaragoza, a 3 de agosto de 2012**



## ÍNDICE

<b>1.- Desarrollo de la XXIII Olimpiada Aragonesa de Física.....</b>	<b>3</b>
<b>2.- Desarrollo de la XXIII Olimpiada Española de Física. ....</b>	<b>4</b>
<b>3.- Consecución de los objetivos previstos. ....</b>	<b>5</b>
<b>4.- Materiales elaborados. ....</b>	<b>5</b>
<b>5.- Justificación del gasto. ....</b>	<b>5</b>
<b>ANEXO I.....</b>	<b>7</b>
<b>1.- Ejercicios propuestos en la XXIII Olimpiada Aragonesa de Física</b>	
<b>2.- Ejercicios propuestos en la XXIII Olimpiada Española de Física</b>	
<b>ANEXO II.....</b>	<b>51</b>
<b>Comité organizador de la XXIII Olimpiada Aragonesa de Física</b>	
<b>ANEXO III.....</b>	<b>55</b>
<b>Estudiantes clasificados en la XXIII Olimpiada Aragonesa de Física</b>	
<b>ANEXO IV.....</b>	<b>59</b>
<b>Modelos de certificados y diplomas de la XXIII Olimpiada Aragonesa de Física</b>	
<b>ANEXO V.....</b>	<b>63</b>
<b>Justificación del gasto</b>	



## 1.- Desarrollo de la XXIII Olimpiada Aragonesa de Física

La Olimpiada Aragonesa de Física (OAF), que este año ha cumplido su vigésimo tercera edición, es una competición de carácter intelectual que tiene como objetivo fundamental el de incentivar y premiar a los estudiantes que tengan capacidad e interés por la Ciencia en general y por la Física en particular. Asimismo contribuye a la divulgación de aspectos científicos de actualidad.

Este acontecimiento educativo en el que la Física es la protagonista y cuyos participantes son estudiantes de Bachillerato, está organizado por la Real Sociedad Española de Física y la Universidad de Zaragoza y cuenta con la colaboración del Colegio Oficial de Físicos en Aragón, de Ibercaja, de la cátedra ‘*José María Savirón*’ de divulgación científica y del Departamento de Educación, Cultura y Deportes del Gobierno de Aragón a través de un proyecto de Temática Educativa.

En esta edición han participado 110 estudiantes de las tres provincias aragonesas, en representación de 29 centros de educación secundaria. Como es lógico los representantes de Zaragoza fueron mayoritarios.

Las pruebas tuvieron lugar en el Aula Magna de la Facultad de Ciencias el día 24 de febrero de 2012 y consistieron en la resolución de tres problemas teóricos y uno de carácter experimental que se adjuntan en el anexo I.1 de esta memoria.

Tras finalizar los ejercicios, los enunciados y soluciones de los mismos se publicaron en la web [http://olimpiada\\_de\\_fisica.unizar.es](http://olimpiada_de_fisica.unizar.es) para consulta de alumnos y profesores.

El comité organizador, integrado por los profesores que se reseñan en el anexo II, evaluó los ejercicios y mediante acuerdo por unanimidad, seleccionó a los veinte mejores clasificados.

Los tres primeros han sido los representantes de Aragón en la Olimpiada Española de Física celebrada en Bilbao, en la Universidad del País Vasco, del 20 al 23 de Abril de 2012. Los tres siguientes clasificados quedaron como suplentes de los anteriores y a los 14 restantes se les concedió mención honorífica. En el anexo III se recogen los nombres y centros educativos de los estudiantes seleccionados. Los seis primeros en orden de puntuación y el resto en orden alfabético.

El Acto de entrega de premios, al cual fueron citados los veinte primeros clasificados, tuvo lugar el pasado 9 de marzo en el espléndido “Patio de la Infanta” que gentilmente nos ofrece Ibercaja, entidad patrocinadora de la OAF desde sus inicios.

Con objeto de difundir al máximo el interés por la Física, este Acto ha contado siempre con personalidades del ámbito académico, político, empresarial y científico-cultural. En esta edición estuvieron presentes las siguientes personalidades:

Ilmo. Sr. D. Manuel Magdaleno Peña, Director General de Política Educativa del Departamento de Educación, Universidad, Cultura y Deporte del Gobierno de Aragón

Ilma. Sra. D<sup>a</sup> Ana Isabel Elduque Palomo, Decana de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza

Sra. D<sup>a</sup>. M<sup>a</sup> Teresa Fernández Fortún. Directora de la Obra Social de Ibercaja

Sr. D. Francisco López Torres Director Técnico y Gerente de la empresa Fibercom

Dr. D. José Alberto Carrión Sanjuán, Director de la Olimpiada Española de Física y Presidente de la Sección Aragonesa de la Real Sociedad Española de Física

Dr. D. Juan Pablo Martínez Jiménez, Director de la Fase Aragonesa de la Olimpiada Española de Física. Armonizador de Física de la Universidad de Zaragoza.

Fuera de la presidencia, pero en lugar destacado estuvieron presentes los miembros del Comité Organizador de la Olimpiada Aragonesa de Física y, entre ellos, D<sup>a</sup>. Melanie Scott. Jefa de Unidad de Innovación Educativa. Departamento de Educación, Universidad, Cultura y Deporte del Gobierno de Aragón.

Los estudiantes seleccionados recibieron medalla y diploma acreditativo, y todos los que realizaron las pruebas un certificado de participación. Los modelos de certificado y diploma se recogen en el anexo IV. Ibercaja, al igual que en años anteriores, obsequió a los seleccionados con diferentes regalos.

Además, los estudiantes galardonados entre el primer y tercer puesto han recibido recientemente los tres tomos del libro ‘Física para la ciencia y la tecnología’ de Tipler-Mosca adquiridos con la aportación del proyecto de Temática Educativa del Gobierno de Aragón tal y como se indicaba en el proyecto.

En la página web: <http://olimpiada.de.fisica.unizar.es> se presentan y están accesibles las pruebas propuestas en esta XXIII edición y sus resultados, así como información adicional. Las pruebas resueltas de ediciones anteriores permanecen en esa web como recurso educativo.

## **2.- Desarrollo de la XXIII Olimpiada Española de Física.**

El equipo representante de Aragón estuvo formado por los estudiantes de Bachillerato, seleccionados en la Olimpiada aragonesa, D. Pablo Javier Blasco Hernández del Instituto Pablo Serrano de Andorra (Teruel), D. Iñigo Alfaro Saracho del Colegio Jesús M<sup>a</sup> – El Salvador de Zaragoza, y D. Juan Manuel Losada Sosnovsky del Instituto Francés de Aranda de Teruel. Actuó como delegado y acompañó a los estudiantes, el profesor D. José Ramón Blasco.

Los estudiantes aragoneses, junto con los estudiantes seleccionados en las demás Fases Locales de la XXIII Olimpiada Española de Física, celebradas en cada uno de los Distritos Universitarios españoles, participaron en la Olimpiada Española de Física celebrada en Bilbao durante los días 20 al 23 de abril. Esta Olimpiada, organizada por el Ministerio de Educación a través de la Real Sociedad Española de Física, ha tenido como anfitrión la Universidad del País Vasco. **Han participado 136 alumnos de 34 delegaciones** de todos los distritos universitarios. Los cinco primeros seleccionados competirán en el mes de julio en la XLIII Olimpiada Internacional que se celebra en Tallin y Tartu (Estonia) y los cuatro siguientes lo harán en el mes de septiembre en la XVII Olimpiada Iberoamericana, en Granada (España).

El Acto de clausura y entrega de premios tuvo lugar el día 23 de abril de 2012 en el Paraninfo de la Facultad de Ciencia y Tecnología de la Universidad del País Vasco. Los estudiantes aragoneses que suelen obtener brillantes resultados en la Fase Nacional, en la presente edición han obtenido los siguientes resultados:

D. Pablo Javier Blasco Hernández del Instituto Pablo Serrano de Andorra (Teruel) y D. Juan Manuel Losada Sosnovsky del Instituto Francés de Aranda de Teruel han obtenido medalla de plata; D. Iñigo Alfaro Saracho del Colegio Jesús M<sup>a</sup> – El Salvador de Zaragoza mención de honor.

Estos buenos resultados, suponen un reconocimiento para la Olimpiada Aragonesa de Física, en particular para los estudiantes y sus profesores así como de todas las entidades e instituciones que apoyan esta actividad.

En el anexo I.2 se presentan los ejercicios propuestos en Bilbao, que también pueden visualizarse resueltos en la web de la Real Sociedad Española de Física: <http://www.ucm.es/info/rsef/oef/>

### **3.- Consecución de los objetivos previstos.**

El objetivo fundamental del Proyecto es el fomento y la divulgación de la Física en la Sociedad a través de su enseñanza en el Bachillerato. Este objetivo se ha cumplido pues se ha estimulado a los estudiantes con unas pruebas que, apartándose de enunciados academicistas, reflejan situaciones reales y temas de investigación relevantes.

El elevado número de estudiantes y centros que participan en la Fase Aragonesa de la Olimpiada es una muestra palpable de que el trabajo continuado de esta actividad va calando en la comunidad educativa.

### **4.- Materiales elaborados.**

Las pruebas propuestas en la Fase Aragonesa pueden utilizarse como material didáctico. Con este fin se mantiene activa y actualizada la página web de la Olimpiada Aragonesa donde se publican resueltas las pruebas.

En el anexo I.2 se recogen también las pruebas resueltas en la Fase Nacional de Murcia, que también pueden servir como recurso didáctico



## **ANEXO I**

**1.- Ejercicios propuestos en la XXIII Olimpiada Aragonesa de Física**

**2.- Ejercicios propuestos en la XXIII Olimpiada Española de Física**





## PRIMERA PRUEBA

24 de febrero de 2012

### INSTRUCCIONES

**Esta prueba consiste en la resolución de tres problemas**

**Emplea una hoja del cuadernillo de respuestas para cada problema**

**Razona siempre tus planteamientos**

**¡No olvides poner tus apellidos, nombre y datos del Centro en la primera hoja!**



Subvenciona:



**P1.- Cambio de órbita de un satélite artificial.**

Un satélite artificial, de masa  $M$ , describe una órbita circular a una altura  $h$  sobre la superficie de la Tierra.

- a) Deduce la expresión del módulo de la velocidad del satélite,  $V_1$ , y calcula su valor, así como el de su periodo de revolución,  $T$ .

Cuando el satélite se encuentra en la posición indicada en la figura 1.a, mediante un motor cohete que se acciona durante un breve intervalo de tiempo, se incrementa el módulo de su velocidad un 0,250 %, manteniendo su dirección y sentido, es decir  $V_2 = \alpha V_1$  con  $\alpha = 1,0025$ . Como consecuencia, el satélite cambia de la órbita circular inicial a la órbita elíptica de la figura 1.b, cuyo apogeo es el punto A.

- b) Deduce las expresiones del módulo de la velocidad,  $V_A$ , y de su altura sobre la superficie de la Tierra,  $h_A$ , en el apogeo A, y calcula sus valores.

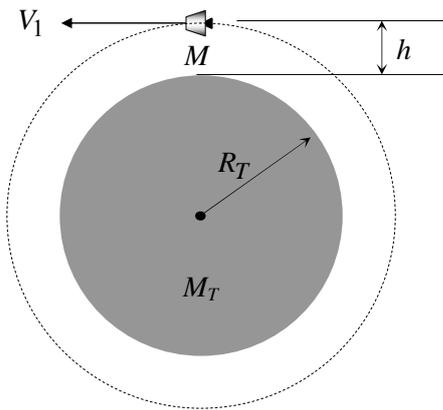


Fig. 1.a

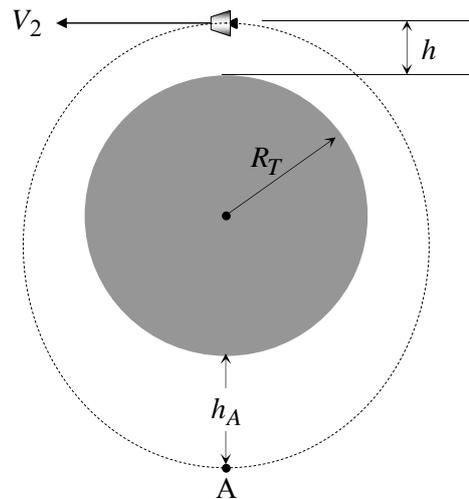


Fig. 1.b

Tal como se ha dicho anteriormente, para pasar a la órbita elíptica se acciona el motor cohete que quema rápidamente una masa de combustible  $\Delta m = M / 50$ . Los gases de la combustión se expulsan en dirección paralela a la velocidad del satélite y en sentido opuesto, con una velocidad de módulo  $v_J$ , relativa al satélite en su órbita circular inicial. El proceso está representado en la figura 2.

- c) Determina  $v_J$  para que la velocidad del satélite en el inicio de la órbita elíptica sea la  $V_2$  indicada, y calcula su valor.

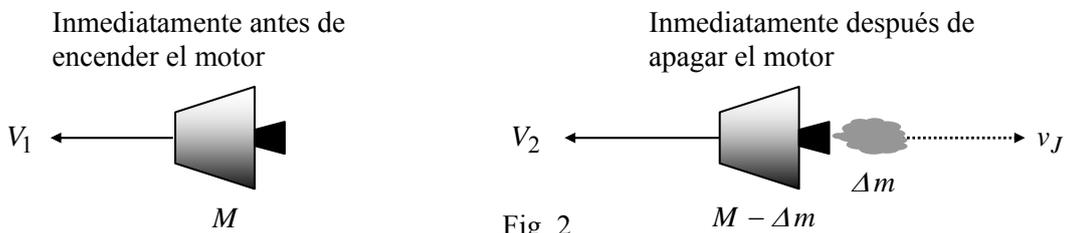


Fig. 2

Datos:

Radio de la Tierra:  $R_T = 6,37 \times 10^6$  m

Aceleración de la gravedad:  $g = 9,81$  m/s<sup>2</sup>

Masa del satélite con su combustible:  $M = 1,25 \times 10^3$  kg

Altura del satélite en el inicio del cambio de órbita:  $h = 2,80 \times 10^5$  m

### Solución P1.- Cambio de órbita de un satélite artificial.

- a) Un satélite de masa  $M$ , en una órbita circular en torno a la Tierra de radio  $R_P = R_T + h$ , verifica que

$$G \frac{M_T M}{R_P^2} = M \frac{V_1^2}{R_P} \quad \Rightarrow \quad V_1 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_P}}$$

Teniendo en cuenta que  $g = \frac{GM_T}{R_T^2}$  y que  $R_P = R_T + h$ , resulta

$$\boxed{V_1 = \sqrt{\frac{gR_T^2}{R_T + h}}} \quad (1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_1 = 7,74 \times 10^3 \text{ m/s}}$$

Por otra parte, como  $V_1 = \omega R_P = \frac{2\pi}{T} R_P \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 5,40 \times 10^3 \text{ s}}$

- b) Una vez que el satélite está en su nueva órbita (figura 3), se conserva su momento angular respecto al centro de la Tierra y su energía mecánica. Si llamamos  $M'$  a su nueva masa (puesto que ha perdido la del combustible quemado), y  $R_P$  y  $R_A$  a las distancias del perigeo y apogeo, respectivamente, al centro de la Tierra, se verificará que

$$\begin{cases} M V_2 R_P = M' V_A R_A \\ \frac{1}{2} M V_2^2 - G \frac{M_T M'}{R_P} = \frac{1}{2} M' V_A^2 - G \frac{M_T M'}{R_A} \end{cases}$$

Una vez simplificadas estas igualdades, y expresando  $G$  en función de  $g$  y  $R_T$ , quedan

$$\begin{cases} V_2 R_P = V_A R_A & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_2^2 - V_A^2 = 2gR_T^2 \left( \frac{1}{R_P} - \frac{1}{R_A} \right) & (3) \end{cases}$$

Escribiendo  $V_2^2 - V_A^2 = (V_2 - V_A)(V_2 + V_A)$ , despejando  $R_A$  de (2), sustituyendo en (3) y simplificando, resulta

$$V_A = \frac{2gR_T^2}{(R_T + h)V_2} - V_2$$

Teniendo en cuenta (1),

$$V_A = \frac{2V_1^2}{V_2} - V_2 \quad (4)$$

Como  $V_2 = \alpha V_1$ , con  $\alpha = 1,0025$ , operando en (4) la velocidad del satélite cuando pasa por el apogeo resulta

$$\boxed{V_A = \frac{2 - \alpha^2}{\alpha} V_1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_A = 7,68 \times 10^3 \text{ m/s}}$$

En cuanto a la distancia en el apogeo,  $R_A$ , de (2) se tiene

$$R_A = \frac{V_2}{V_A} (R_T + h) \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_A = 6,72 \times 10^6 \text{ m}}$$

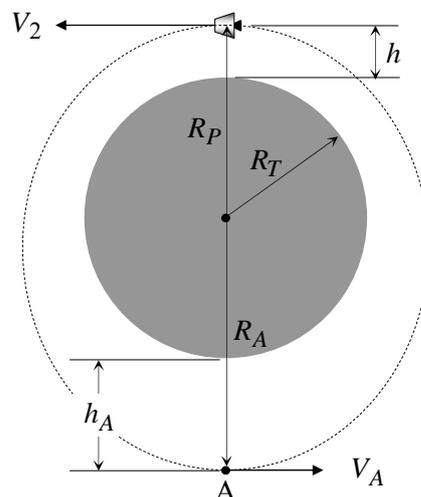


Fig. 3

Y, en definitiva, la altura del apogeo sobre la superficie de la Tierra será:

$$h_A = R_A - R_T \quad \Rightarrow \quad \boxed{h_A = 3,47 \times 10^5 \text{ m}}$$

- c) Consideremos como sistema mecánico al propio satélite junto con su combustible. El sistema se mueve con una velocidad  $V_1$  respecto a un sistema de referencia fijo en el centro de la Tierra. Los gases producidos al quemar parte del combustible durante un tiempo muy breve, tienen una masa  $\Delta m$  y salen expulsados con una velocidad  $v_j$  respecto al satélite en su órbita inicial. Como sobre este sistema mecánico no actúan fuerzas exteriores, se conservará su momento lineal. Es decir

$$M V_1 = (M - \Delta m)V_2 + \Delta m(V_1 - v_j) \quad (5)$$

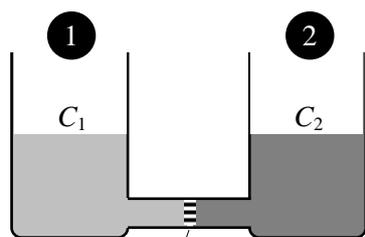
En donde  $V_2$  es la nueva velocidad del satélite, calculada en el apartado anterior, y  $V_1 - v_j$  es el módulo de la de los gases expulsados, referida al sistema fijo en la Tierra.

De (5) se obtiene

$$\boxed{v_j = \left( \frac{M}{\Delta m} - 1 \right) (V_2 - V_1)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_j = 9,48 \times 10^2 \text{ m/s}}$$

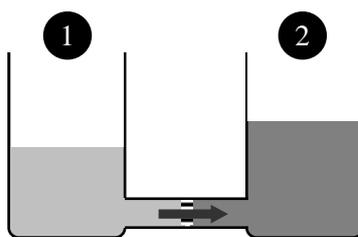
## P2.- (I) La ósmosis y la presión osmótica<sup>1</sup>.

El fenómeno físico de la *ósmosis* se explica fácilmente mediante un ejemplo. Consideremos dos recipientes abiertos a la atmósfera y conectados en su base a través de una *membrana semipermeable*, como se muestra en la figura 1.a. El recipiente 1 contiene una disolución de una sustancia B (solute) en un líquido A (disolvente), con una concentración  $C_1$ . El recipiente 2 contiene la misma disolución, pero con una concentración mayor:  $C_2 > C_1$ . Los poros de la membrana semipermeable tienen mayor tamaño que las moléculas del disolvente A, pero menor que las del soluto B, por lo que sólo el disolvente puede fluir en ambos sentidos a través de la membrana. El fenómeno de la ósmosis consiste en el paso de disolvente de la región de menor concentración a la de mayor, tendiendo a igualar las concentraciones. Como consecuencia, el nivel de la disolución en el compartimento 2 asciende paulatinamente (figura 1.b) hasta llegar a un estado de equilibrio en el que la diferencia de niveles entre ambos compartimentos alcanza una altura determinada,  $h$  (figura 1.c).



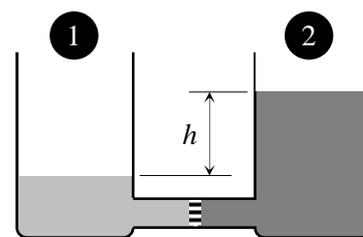
Membrana semipermeable

Fig. 1.a



Flujo de disolvente

Fig. 1.b



Equilibrio

Fig. 1.c

A primera vista resulta sorprendente que el líquido fluya de la región 1 a la 2, hasta alcanzar un equilibrio donde la altura, y por tanto la presión hidrostática en el fondo, es mayor en el recipiente 2. Esta paradoja se explica mediante el concepto de *presión osmótica*. Dicha presión, a la que asignaremos el símbolo  $\Pi$ , puede definirse como *la diferencia de presión hidrostática que debe haber entre los dos lados de una membrana semipermeable para detener el flujo de disolvente a través ella*. En otras palabras, la presión osmótica coincide con la diferencia de presión hidrostática cuando se alcanza el estado de equilibrio.

El botánico alemán Pfeffer, fue el primero en realizar medidas de la presión osmótica y estableció que era proporcional a la diferencia de concentraciones del soluto a cada lado de la membrana y a la temperatura absoluta  $T$ . Posteriormente, el químico holandés Van't Hoff, primer premio Nobel de Química en 1901, demostró que para bajas concentraciones (disoluciones diluidas), la relación es análoga a la ecuación de los gases perfectos.

$$\Pi = (C_2 - C_1)RT,$$

donde  $R = 8,3145 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$  y  $T$  es la temperatura absoluta.

La ósmosis desempeña un papel primordial en los seres vivos, concretamente en el transporte de sustancias a través de las membranas celulares. Un ejemplo de ello es el ascenso de la savia por los vasos de las plantas, que permite nutrir sus células. El ascenso se produce gracias a la presión osmótica entre la disolución (savia) en el interior del árbol y el agua de la tierra que rodea a las raíces.

Datos: La savia de un arce contiene el 1% en masa de sacarosa en agua, la masa molecular de la sacarosa es  $342 \text{ g/mol}$ , la densidad de la disolución es  $\rho = 1,0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$  y la temperatura es  $T = 300 \text{ K}$ . Calcula:

- La concentración de la disolución de sacarosa en agua, expresada en  $\text{mol/m}^3$ .
- La presión osmótica.
- La altura que puede alcanzar la savia en los arces.

<sup>1</sup> La ósmosis es un fenómeno físico, por eso se propone como ejercicio en una Olimpiada de Física, a pesar de su "apariencia" química. En cualquier caso, merece la pena recordar que la Física y la Química son partes sustanciales de la Ciencia, en cuyo estudio deben ir siempre de la mano.

## (II) Ósmosis inversa.

Por la propia definición anterior de presión osmótica, es fácil comprender que si en el recinto con mayor concentración de soluto se aumenta la presión, el disolvente pasará a través de la membrana semipermeable hacia la región de concentración menor. Este fenómeno que se conoce con el nombre de *ósmosis inversa*, tiene aplicaciones de elevado interés tecnológico como, por ejemplo, producción de agua ultrapura, ablandamiento de aguas duras y otra, de gran importancia y actualidad, como es la desalinización de agua marina.

Supongamos que en los recipientes 1 y 2 de la figura 2.a, existe agua pura y agua salada, respectivamente. En el recipiente 2, mediante una fuerza aplicada sobre un émbolo, ejercemos una presión ligeramente superior a la presión osmótica. El disolvente, agua en este caso, pasa a través de la membrana semipermeable del recipiente 2 al 1. La disminución de agua en 2 hace que, en un estado como el representado en la figura 2.b, la concentración de sal haya aumentado, mientras que en el 1 aumenta la cantidad de agua pura. Este proceso realizado de forma continua constituye el fundamento de las aplicaciones citadas.

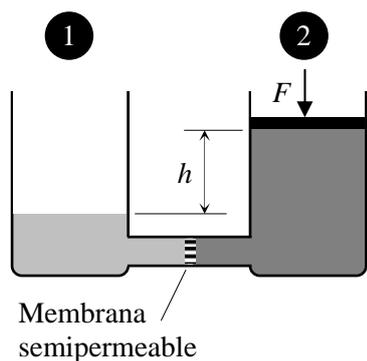


Fig. 2.a

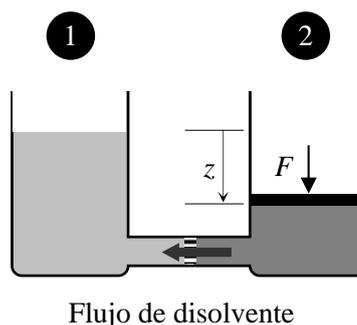


Fig. 2.b

Supongamos que a una temperatura de 300 K se desea desalinizar  $1 \text{ m}^3$  de agua de mar, con una concentración de 5,8 g de sal (NaCl) por litro de agua. La masa molecular de la sal es 58 g/mol.

- II.a) Admitiendo que la sal disuelta está completamente dissociada en sus iones  $\text{Na}^+$  y  $\text{Cl}^-$  y que ni uno ni otro pueden atravesar la membrana, calcula la presión osmótica de la disolución. Ten en cuenta que la presión osmótica es una propiedad coligativa, es decir, es proporcional al número total de partículas disueltas.
- II.b) Supongamos que la presión que se ejerce mediante el émbolo es prácticamente igual a la presión osmótica. Calcula el trabajo que hay que realizar para desalinizar  $1 \text{ m}^3$  de agua de mar?
- II.c) El precio del kW·h eléctrico es de 0,142 € ¿Cuánto cuesta desalinizar  $1 \text{ m}^3$  de agua de mar?

## Solución P2.- La ósmosis, la presión osmótica y la ósmosis inversa.

- I.a) Si la sacarosa es el 1% de la disolución, en  $1 \text{ m}^3$  su masa será 10 kg. Como su masa molecular es 342 g (masa de un mol), el número de moles de sacarosa por unidad de volumen es

$$C = \frac{10^4 \text{ g/m}^3}{342 \text{ g/mol}} \Rightarrow \boxed{C = 29,2 \text{ mol/m}^3}$$

- I.b) La presión osmótica viene dada por  $\Pi = C R T$ . En nuestro caso

$$\boxed{\Pi = 7,28 \times 10^4 \text{ Pa}}$$

- I.c) De acuerdo con el enunciado, la savia ascenderá hasta una altura  $h$  tal que la presión hidrostática que ejerza sea igual a la osmótica. Si  $\rho$  es la densidad de la disolución, se verificará que

$$\rho g h = \Pi \Rightarrow h = \frac{\Pi}{\rho g} \Rightarrow \boxed{h = 7,43 \text{ m}}$$

- II.a) En  $1 \text{ m}^3$  de agua de mar hay 5,8 kg de sal, o lo que es lo mismo,  $5,8 \times 10^3 \text{ g}$ . Por consiguiente, como la masa de un mol de NaCl es 58 g, el número de moles por unidad de volumen es

$$C' = 1,0 \times 10^2 \text{ mol/m}^3$$

Pero, tal como indica el enunciado, la sal se disocia en los iones  $\text{Na}^+$  y  $\text{Cl}^-$ , ambos son incapaces de atravesar la membrana semipermeable y, por lo tanto, en la presión osmótica intervienen ambos iones. En este caso, en la expresión de Van't Hoof, deberá figurar el doble de la concentración  $C'$ , es decir

$$\Pi = 2 C' R T \Rightarrow \boxed{\Pi = 4,99 \times 10^5 \text{ Pa}}$$

- II.b) El trabajo de la fuerza  $F$  que actúa sobre el émbolo para hacerlo descender una distancia  $z$  es

$$W = F z$$

Si llamamos  $S$  al área del émbolo,  $F/S$  es la presión que ejerce sobre la disolución y, tal como se indica en el enunciado, esta presión debe ser igual (ligeramente superior) a la presión osmótica  $\Pi$ .

$$W = \frac{F}{S} S z = \Pi \Delta V$$

Donde  $\Delta V$  es el volumen de disolvente (agua) que ha pasado a través de la membrana. Este trabajo es la energía que es preciso invertir en la desalinización de dicho volumen de agua de mar. Si  $\Delta V = 1 \text{ m}^3$  el valor de esta energía será

$$\boxed{W = 4,99 \times 10^5 \text{ J}}$$

- II.c) Como  $1 \text{ kW} \cdot \text{h} = 3,60 \times 10^6 \text{ J}$ , la energía anterior será

$$W = 0,139 \text{ kW} \cdot \text{h}$$

Si el precio del  $\text{kW} \cdot \text{h}$  eléctrico es 0,142 € el precio del  $\text{m}^3$  de agua de mar desalinizada es, como mínimo:

$$\boxed{\text{Precio desalinización} = 0,02 \text{ €/m}^3}$$

### P3.- Refracción de olas.

Un tipo particular de ondas son las olas del mar. Cuando las aguas en las que se propagan son poco profundas, entendiéndose por ello aguas cuya profundidad es mucho menor que la longitud de onda de las olas, la velocidad de propagación depende de la profundidad  $h$ . En la figura 1 se representa esta dependencia.

Supón que el fondo marino es irregular, como el representado en la figura 2, en el que hay tres regiones de profundidades  $h_1 = 2,0$  m,  $h_2 = 1,0$  m, y  $h_3 = 3,0$  m, con fronteras rectas y paralelas.

Considera que las olas son ondas planas y que su dirección de propagación (rayo) en la región 1 alcanza la región 2 con un ángulo de incidencia  $\theta_1 = 25^\circ$ . Véase la figura 3, que representa una *vista aérea* del mar.

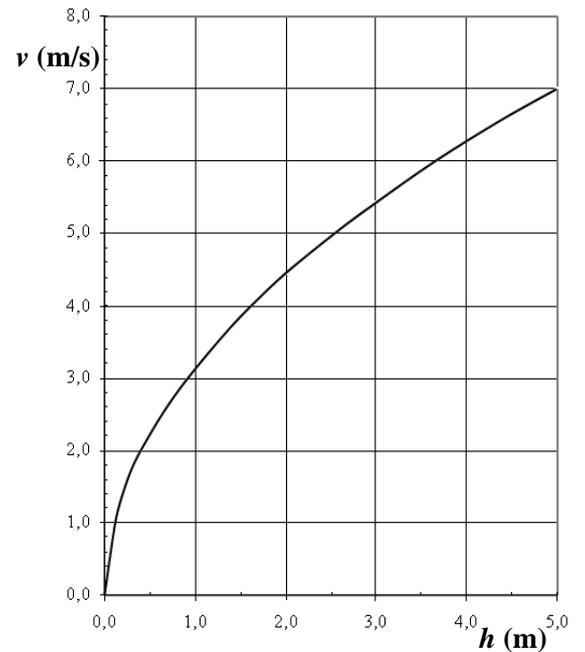


Fig. 1

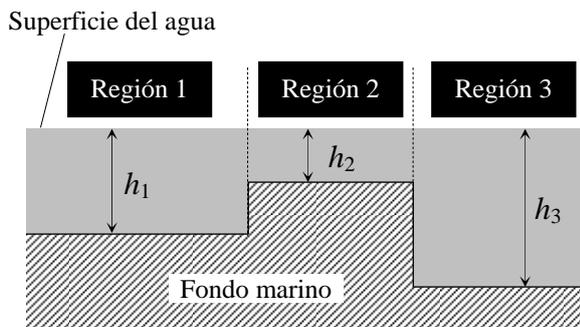


Fig. 2

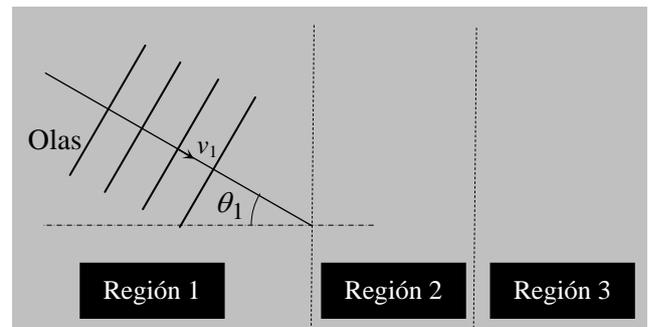


Fig. 3

- Determina las direcciones de propagación de las olas en las regiones 2 y 3, es decir los ángulos respecto a la normal  $\theta_2$  y  $\theta_3$ .
- ¿Cuál es el valor mínimo del ángulo de incidencia en la región 1,  $\theta_L$ , para el cual no existen olas en la región 3?

En los litorales en los que la profundidad del fondo marino disminuye progresivamente con una pendiente suave, como ocurre en la playa mostrada en la fotografía de figura 4, se observa que la dirección final de propagación de las olas es perpendicular a la línea de litoral. Esto es equivalente a decir que las olas, al acercarse al litoral, adoptan su forma. Este efecto se visualiza sobre todo cuando las olas “rompen” dando lugar a una vistosa curva de espuma blanca.

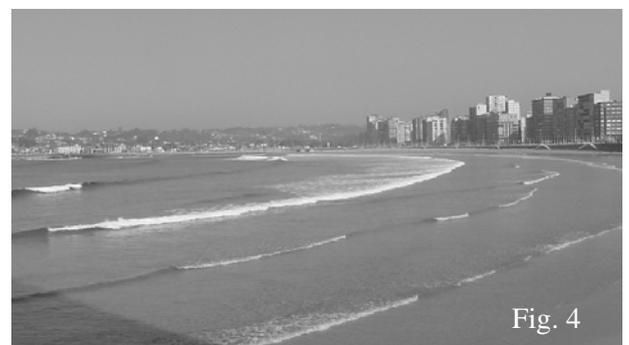


Fig. 4

- Basándote en el resultado del apartado (a), haz un razonamiento para justificar que la dirección de propagación de las olas que llegan a la playa es perpendicular a la línea del litoral.

### Solución P3.- Refracción de olas.

- a) Según la conocida ley de la refracción, cuando un frente de una onda que viaja por un medio con velocidad  $v_1$  incide sobre la superficie de separación con otro medio, donde la velocidad de propagación es  $v_2$ , se cumple<sup>1</sup>

$$v_2 \operatorname{sen} \theta_1 = v_1 \operatorname{sen} \theta_2 \quad (1)$$

donde  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son los ángulos que forma la dirección de propagación de la onda (rayo) en ambos medios con la normal a la superficie de separación, como se indica en la figura 5. Una igualdad análoga a (1) se cumple en la frontera entre los medios 2 y 3.

En nuestro caso, las velocidades de propagación de las olas en las regiones 1, 2 y 3 se obtienen de la gráfica de  $v$  frente a  $h$  (figura 6).

Estas velocidades son:  $v_1 = 4,5 \text{ m/s}$ ,  $v_2 = 3,1 \text{ m/s}$  y  $v_3 = 5,4 \text{ m/s}$

Por lo tanto,

$$\operatorname{sen} \theta_2 = \frac{v_2}{v_1} \operatorname{sen} \theta_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_2 = 16,9^\circ}$$

$$\operatorname{sen} \theta_3 = \frac{v_3}{v_2} \operatorname{sen} \theta_2 = \frac{v_3}{v_1} \operatorname{sen} \theta_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_3 = 30,5^\circ}$$

- b) Como la velocidad en la región 3 es mayor que en el medio 2, el rayo refractado se aleja de la normal. Por lo que habrá un cierto ángulo de incidencia (ángulo límite) para el cual el de refracción será  $90^\circ$ . Para ángulos de incidencia mayores que el límite se producirá el conocido fenómeno de reflexión total. Para estos ángulos no habrá olas en la región 3.

De la ley de la refracción aplicada sucesivamente a las dos fronteras

$$\operatorname{sen} \theta_1 = \frac{v_1}{v_3} \operatorname{sen} \theta_3$$

Considerando  $\theta_3 = 90^\circ$ , se obtiene el ángulo límite en la región 1

$$\operatorname{sen} \theta_L = \frac{v_1}{v_3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_L = 56,4^\circ}$$

- c) Cuando las olas pasan de una región a otra de menor profundidad, la dirección de propagación se acerca a la normal. Si imaginamos que este proceso se repite en sucesivas disminuciones de profundidad (escalones paralelos), al final los rayos de la ola serán prácticamente perpendiculares a dichos escalones, tal y como se esquematiza en la figura 7.

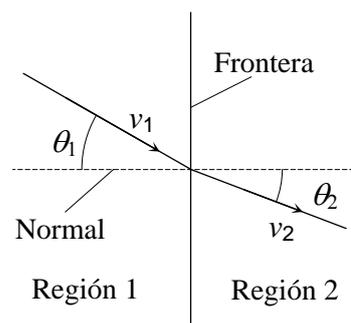


Fig. 5

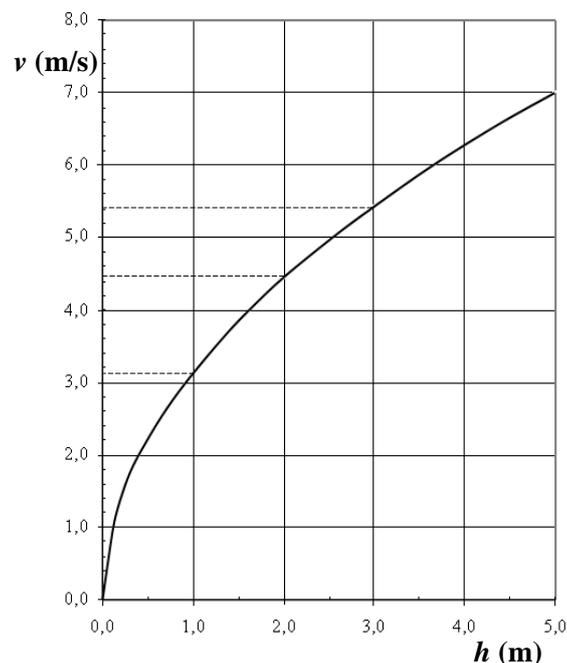


Fig. 6

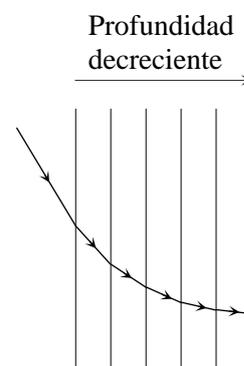


Fig. 7

<sup>1</sup> Quizá para algún lector sea más conocida esta ley en la forma  $n_1 \operatorname{sen} \theta_1 = n_2 \operatorname{sen} \theta_2$  (ley de Snell), donde  $n_1 = c/v_1$  y  $n_2 = c/v_2$  son los índices de refracción de los dos medios. Naturalmente, esta notación sólo tiene sentido estricto para ondas luminosas.

Cuando las olas se acercan a una playa, la profundidad se va reduciendo progresivamente hasta anularse en la línea de costa. Por ello, su dirección de propagación al aproximarse a la costa se va curvando hasta que inciden perpendicularmente a la orilla, como muestra la fotografía de la figura 4. Es decir, las olas (frentes de ondas) llegan paralelas a la orilla.

Desde un punto de vista más matemático, el resultado anterior puede razonarse de la siguiente forma: la disminución progresiva de profundidad al acercarse a la costa puede describirse mediante una serie de sucesivos y estrechos medios con profundidad escalonada decreciente. Teniendo en cuenta (1), en las sucesivas fronteras debe cumplirse

$$\frac{1}{v_1} \operatorname{sen} \theta_1 = \frac{1}{v_2} \operatorname{sen} \theta_2 = \frac{1}{v_3} \operatorname{sen} \theta_3 = \dots$$

Es decir, se mantiene constante el cociente

$$\frac{1}{v} \operatorname{sen} \theta = \text{cte} \quad (2)$$

Al acercarse las olas a la playa la profundidad tiende a cero, luego su velocidad de propagación tiende a anularse (véase el gráfico de la figura 1). Por tanto, para que el cociente indicado en (2) sea constante, también debe tender a cero el ángulo  $\theta$  en todos los puntos de la costa, es decir la dirección de propagación tiende a ser perpendicular a la línea de costa.



**Universidad  
Zaragoza**



## SEGUNDA PRUEBA

24 de febrero de 2012

### INSTRUCCIONES

**Esta prueba consiste en la resolución de un problema de tipo experimental**

**Razona siempre tus planteamientos**

**¡No olvides poner tus apellidos, nombre y datos del Centro en la primera hoja!**



Subvenciona:



### Problema experimental. Calibración de un reostato.

Un reostato es una resistencia variable, construida con un cable resistivo arrollado uniformemente en hélice sobre un soporte cilíndrico aislante. La figura 1.a es una fotografía de un reostato antiguo y en la figura 1.b se muestra su esquema. Los terminales del aparato, A y B, están respectivamente conectados a un extremo del bobinado y a un cursor deslizante, C, que hace contacto con el bobinado. Como es fácil comprender, la resistencia entre los terminales del reostato es directamente proporcional a la distancia,  $x$ , entre el comienzo del arrollamiento y el punto donde hace contacto el cursor, es decir  $R(x) = K x$ .

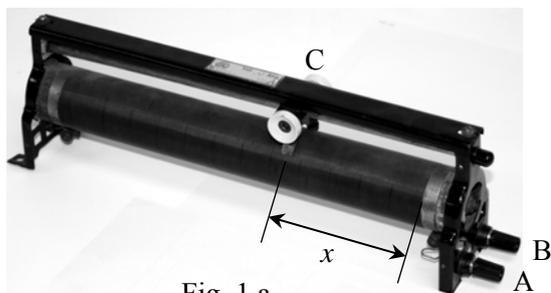


Fig. 1.a

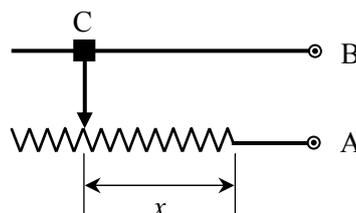


Fig. 1.b

Se desea realizar un calibrado de la dependencia  $R(x)$  de un reostato, para lo que se dispone del siguiente material:

- Una regla para la medida de  $x$ .
- Una batería con f.e.m.  $\varepsilon = 9,0 \text{ V}$  y resistencia interna  $r = 0,5 \Omega$ .
- Un amperímetro clásico de bobina móvil con escala hasta  $100 \text{ mA}$  (corriente máxima) y resistencia interna,  $R_A$ , desconocida.
- Un voltímetro digital con resistencia interna  $R_V = 10 \text{ M}\Omega$ .
- Una resistencia de valor nominal  $R_0 = 100 \Omega$ , con una tolerancia de fabricación del  $\pm 1\%$ .

En el laboratorio se monta el circuito de la figura 2 y, para una serie de valores de  $x$ , se toman las lecturas en el amperímetro y en el voltímetro, obteniéndose los valores recogidos en la Tabla I.

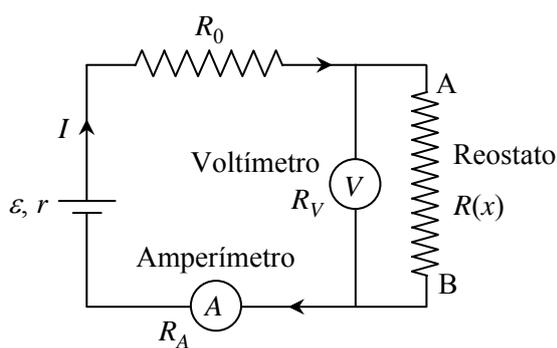


Fig. 2

Tabla I

$x$ (cm)	$I$ (mA)	$V$ (V)
2,0	81	0,71
4,0	74	1,47
6,0	68	2,04
8,0	64	2,51
10,0	60	2,82
12,0	56	3,31
14,0	53	3,52
16,0	50	3,93
18,0	47	4,17
20,0	46	4,37

- a) A partir de la gráfica adecuada, determina la constante  $K$  de la recta de calibración  $R(x) = K x$ .
- b) Haz una estimación de la incertidumbre de esta constante,  $\Delta K$ .
- c) Determina la resistencia interna del amperímetro,  $R_A$ .
- d) Haz una estimación de la incertidumbre de esta resistencia,  $\Delta R_A$ .
- e) ¿Por qué es conveniente introducir la resistencia  $R_0$  en el circuito de medida?

### Solución problema experimental.- Calibración de un reostato.

- a) Podría pensarse que la resistencia  $R$  del reostato coincide con el cociente  $V/I$ , pero esto no es exacto. El voltímetro mide la caída de potencial en el reostato,  $V$ , y el amperímetro la corriente total  $I$ , suma de las que circulan por el reostato y el voltímetro, que están conectados en paralelo,  $I = I_R + I_V$ . Teniendo en cuenta además que la caída de potencial en ambos elementos es la misma,  $V = R I_R = R_V I_V$ , es fácil demostrar que el cociente  $V/I$  no es exactamente la resistencia del reostato,  $R$ , sino la resistencia equivalente del paralelo formado por reostato y voltímetro.

$$\frac{V}{I} = \frac{R R_V}{R + R_V}$$

En nuestro caso,  $R_V = 10 \text{ M}\Omega$  mientras que el cociente  $V/I$  varía con  $x$  entre, aproximadamente, 10 y 100  $\Omega$ . Por tanto,  $R \ll R_V$ , de forma que, en muy buena aproximación,

$$R = \frac{V}{I}$$

En la cuarta columna de la tabla II se recogen los valores de  $R$  obtenidos para cada  $x$  a partir de los datos del enunciado. En la figura 3 se representan los valores de  $R$  frente a  $x$ . Se observa una dependencia lineal y que pasa por el origen, tal y como estaba previsto. La constante  $K$  de calibración del reostato es la pendiente de esta recta, que puede determinarse a partir de las coordenadas de un punto alejado del origen perteneciente a la recta que mejor se ajusta a los puntos experimentales, como el A en la figura 3.

$$K = \frac{y_A}{x_A} = \frac{93 \Omega}{19,2 \text{ cm}}$$

$$K = 4,844 \Omega/\text{cm}$$

Tabla II

$x$ (cm)	$I$ (mA)	$V$ (V)	$R$ ( $\Omega$ )	$R_A$ ( $\Omega$ )
2	81	0,71	8,8	1,8
4	74	1,47	19,9	1,3
6	68	2,04	30,0	1,9
8	64	2,51	39,2	0,9
10	60	2,82	47,0	2,5
12	56	3,31	59,1	1,1
14	53	3,52	66,4	2,9
16	50	3,93	78,6	0,9
18	47	4,17	88,7	2,3
20	46	4,37	95,0	0,2

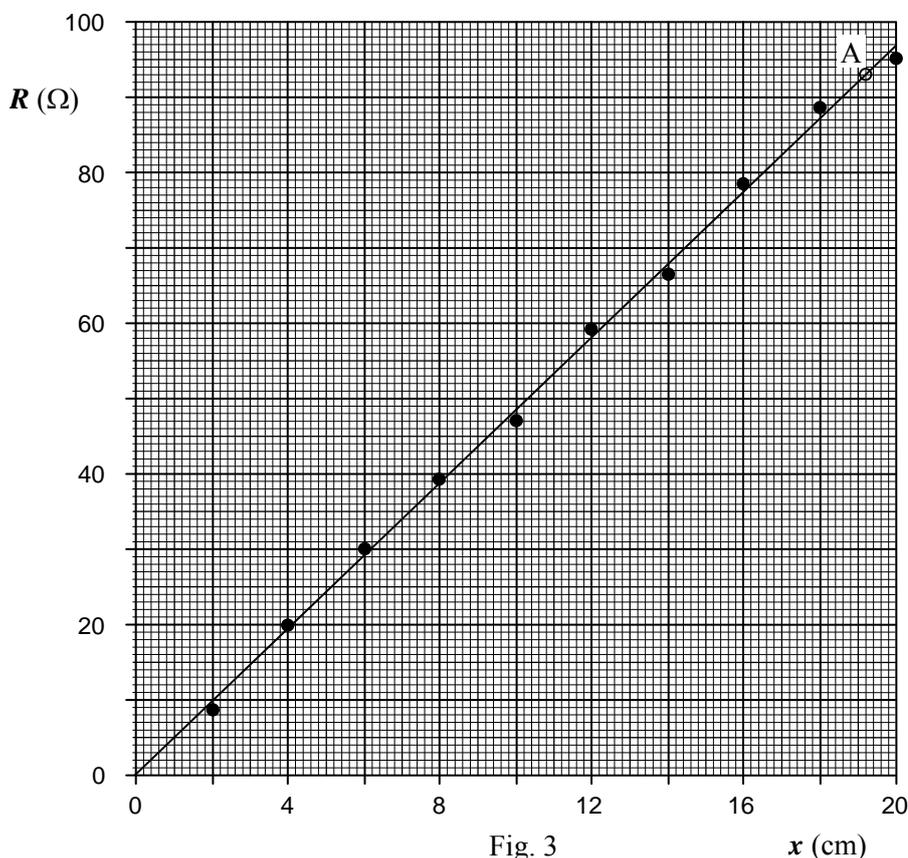


Fig. 3

- b) Puede hacerse una estimación de la incertidumbre de  $K$  a partir de las dos rectas que, con pendientes máxima y mínima, se ajustan razonablemente a los puntos experimentales, teniendo en cuenta la dispersión de dichos puntos respecto a la mejor recta. También sería conveniente tener en cuenta la incertidumbre de los propios puntos (barras de error), pero no se dispone de datos para poder hacer una estimación de esta incertidumbre.

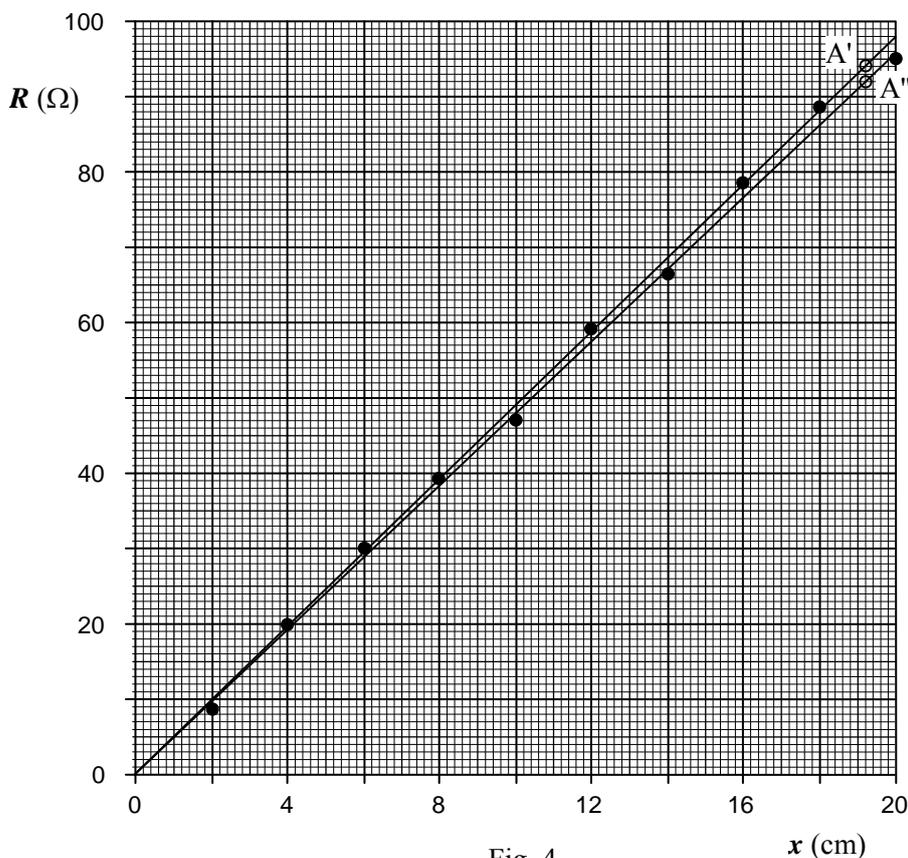


Fig. 4

A partir de las coordenadas de los puntos auxiliares  $A'$  y  $A''$  de la figura 4, las pendientes de estas rectas y su incertidumbre son

$$\left. \begin{aligned} K_{\max} &= \frac{y_{A'}}{x_{A'}} = \frac{94 \Omega}{19,2 \text{ cm}} = 4,896 \Omega/\text{cm} \\ K_{\min} &= \frac{y_{A''}}{x_{A''}} = \frac{92 \Omega}{19,2 \text{ cm}} = 4,792 \Omega/\text{cm} \end{aligned} \right\} \Delta K = \frac{K_{\max} - K_{\min}}{2}, \quad \boxed{\Delta K = 0,05 \Omega/\text{cm}}$$

El resultado final de la calibración, expresado con el número adecuado de cifras significativas, es<sup>1</sup>

$$K = (4,84 \pm 0,05) \Omega/\text{cm}$$

- c) Despreciando la influencia de la resistencia del voltímetro, la corriente que circula por el circuito es

$$I = \frac{\varepsilon}{r + R_0 + R + R_A}$$

Por tanto, la resistencia interna del amperímetro puede calcularse, para cada valor de  $x$ , en la forma

$$R_A = \frac{\varepsilon}{I} - (r + R_0 + R) \quad (1)$$

<sup>1</sup> Un ajuste analítico empleando el método de *mínimos cuadrados* conduce a un resultado  $K = (4,84 \pm 0,03) \Omega/\text{cm}$ , con un nivel de confianza del 68%. Con  $\Delta K = 0,07 \Omega/\text{cm}$  el nivel de confianza aumenta al 95 %.

Los valores de  $R_A$  que se obtienen a partir los datos del problema se recogen en la última columna de la tabla II. Se observa una dispersión aleatoria de valores, por lo que el valor más probable para  $R_A$  es la *media* de todos ellos, es decir el promedio de los  $n = 10$  valores de  $R_A$ .

$$\bar{R}_A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_{A,i} \quad \boxed{R_A = 1,57 \Omega}$$

d) Para estimar la incertidumbre de  $R_A$  vamos de tener en cuenta dos fuentes de error:

i) Los errores cometidos en las diversas medidas de  $V$  e  $I$  (y por tanto también de  $R$ ) para cada  $x$ , debidos principalmente a la resolución de los instrumentos empleados y a pequeños errores aleatorios (principalmente en el valor exacto de  $x$ ). La influencia de estos errores aleatorios en la incertidumbre de  $R_A$  puede estimarse calculando el *error típico* de  $\bar{R}_A$

$$\sigma(\bar{R}_A) = \left[ \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (R_{A,i} - \bar{R}_A)^2 \right]^{1/2} = 0,3 \Omega$$

ii) Según se indica en el enunciado, la resistencia  $R_0$  tiene un valor nominal de  $100 \Omega$ , pero con una tolerancia de fabricación del  $\pm 1\%$ , es decir de  $\pm 1 \Omega$ . Observando (1), esta incertidumbre se transmite directamente al valor buscado de la resistencia interna del amperímetro,  $R_A$ .

Como estas dos fuentes de error en  $R_A$  son independientes, la incertidumbre del resultado es

$$\Delta R_A = \sqrt{0,3^2 + 1^2} \Omega \quad \boxed{\Delta R_A = 1,0 \Omega}$$

En total, la resistencia interna del amperímetro es

$$R_A = (1,6 \pm 1,0) \Omega$$

La incertidumbre relativa de  $R_A$  es muy alta, un  $\pm 63\%$ , lo que en la práctica invalida el resultado. Si se quisiera reducir  $\Delta R_A$ , sería necesario, en primer lugar, conocer  $R_0$  con menos incertidumbre, por ejemplo midiendo esta resistencia con un óhmetro de precisión.

e) Es fácil comprender que  $R_0$  es una *resistencia de protección*, para limitar la corriente máxima que puede circular por el circuito. En particular, según se indica en el enunciado, la corriente máxima que puede medir el amperímetro es de  $100 \text{ mA}$ . Por tanto, como la batería tiene una f.e.m.  $\varepsilon = 9,0 \text{ V}$ , la resistencia mínima del circuito debería ser de  $90 \Omega$ . Sin embargo, en ausencia de  $R_0$ , la resistencia mínima correspondería a  $x = 0$  y sería igual a  $r + R_A \sim 2 \Omega$ . La corriente sería entonces próxima a los  $5 \text{ A}$ , que no podría ser medida por el amperímetro pues sobrepasa con mucho su fondo de escala, y además supondría un grave riesgo para la "vida" del aparato.

Nota: La calidad del amperímetro empleado en estas medidas deja bastante que desear. Observando la tabla del enunciado, permite medir corrientes hasta  $100 \text{ mA}$  con una resolución de tan solo  $1 \text{ mA}$ , y además su resistencia interna parece superior a  $1 \Omega$ , bastante mayor de lo habitual. Interesa que esta resistencia sea muy baja para que el instrumento no perturbe el circuito donde se conecta en serie para medir la corriente. El voltímetro parece de mejor calidad porque tiene una resolución relativa bastante superior y una resistencia interna muy alta. De esta forma, cuando se conecta en paralelo con un elemento del circuito, la corriente que se deriva por él es muy baja y no modifica apreciablemente el sistema.



**REAL SOCIEDAD ESPAÑOLA DE FÍSICA**



**XXIII OLIMPIADA ESPAÑOLA DE FÍSICA**

**ENUNCIADOS Y SOLUCIONES**

**DE LAS**

**PRUEBAS PROPUESTAS**

**Bilbao, 20 al 23 de abril de 2012**



## P1. Un deporte de invierno: los saltos de esquí.

En esta espectacular modalidad deportiva, los espectadores se mantienen en vilo desde que el atleta inicia el descenso por la pista hacia el trampolín hasta que, tras saltar al "vacío", realiza un estético vuelo, aterriza suavemente, frena y se detiene. Este atleta, mediante un largo y duro entrenamiento, ha adquirido la suficiente destreza para lograr que la física esté de su parte permitiéndole mejorar sus marcas.

El perfil de la pista de saltos, mostrado en la figura 1, presenta cuatro partes: la primera es la *zona de aceleración*, en la que los saltadores que han partido de alguna de las *salidas escalonadas*, sin velocidad inicial, descienden por una pronunciada pendiente hasta el *trampolín*, en el que la pendiente se reduce hasta un ángulo  $\alpha$ . En el borde S del trampolín, el saltador inicia el vuelo sobre la *zona de salto*, que tiene forma aproximadamente parabólica y una longitud  $L$  característica de la instalación: se habla así de pistas de 50, 80 ó 90 m.

La tercera zona, P - K, es la *de aterrizaje*, de longitud  $M$  y pendiente constante de ángulo  $\beta$ . A partir del límite K de esta región, el denominado *punto crítico*, se inicia la cuarta zona, *de frenado*, en la que no debe producirse el aterrizaje pues disminuye rápidamente la pendiente y el impacto sería peligroso. Según sean las condiciones meteorológicas, el estado de la pista y la calidad de los competidores, los jueces deciden el punto de partida adecuado (una de las salidas escalonadas) para conseguir que el aterrizaje se realice siempre en la zona adecuada, y no en la de frenado. En concreto, los jueces fijan la altura  $h_0$  del punto de salida respecto al borde S del trampolín.

Los principales parámetros de un gran trampolín, ( $L \approx 90$  m), se encuentran indicados en el cuadro de datos de la figura 1.

- a) Suponiendo que en el descenso por la zona de aceleración (desde la salida hasta el punto S), el rozamiento con el suelo y el aire disipan una energía  $Q$  que es igual al 20 % de la energía mecánica inicial, determine y calcule el módulo de la velocidad de despegue del saltador,  $v_0$ , sabiendo que ha iniciado el descenso, sin velocidad inicial, desde una salida con la altura  $h_0$  dada en el cuadro de valores.

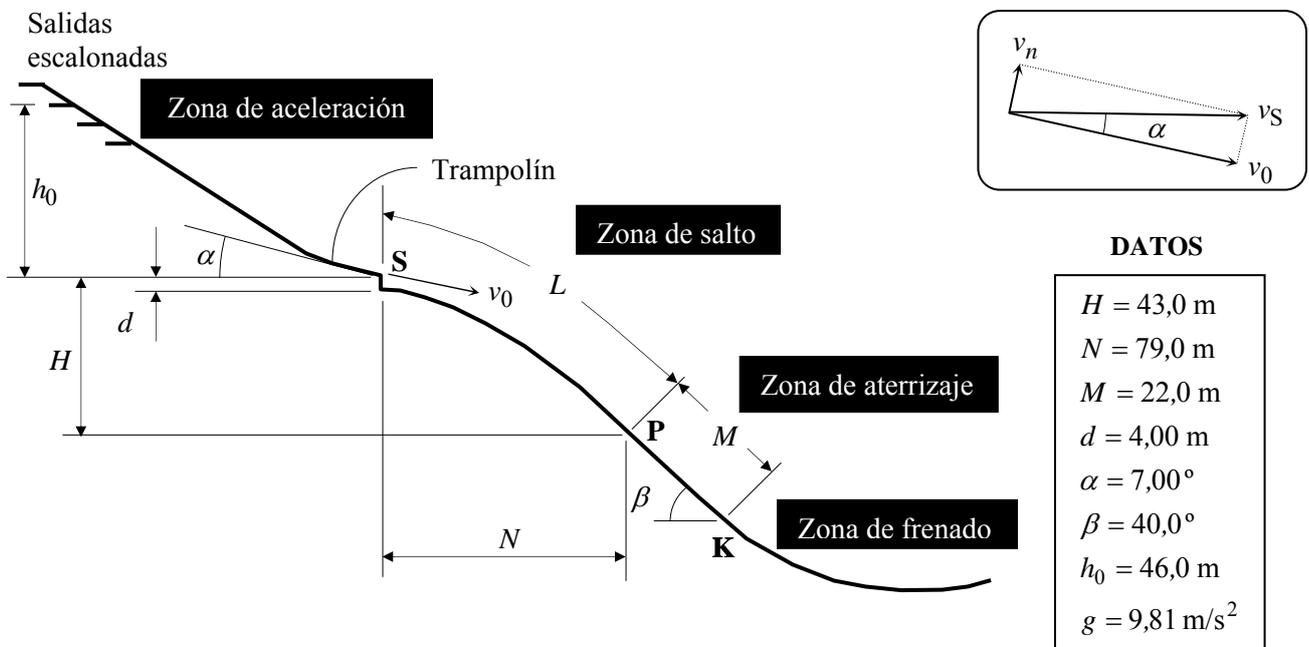


Fig. 1

A pesar de que el trampolín tiene una pendiente final descendente  $\alpha$ , la velocidad real de salida del saltador,  $v_S$ , es prácticamente horizontal, pues se da un impulso perpendicular a la pista justo antes de iniciar el vuelo. Para ello, el saltador desciende con las piernas flexionadas y las extiende en el extremo final del trampolín, haciendo un gesto similar al de un salto, sin carrerilla, perpendicular al suelo. Así, además de descender en una postura más aerodinámica, consigue imprimirse una velocidad  $v_n$  perpendicular al trampolín y alargar el salto. (Observa el diagrama vectorial indicado en la figura 1).

- b) Calcule cuál debe ser el valor de la velocidad  $v_n$  y compruebe si podrá conseguirla un atleta capaz de realizar un salto vertical de altura  $h_e = 0,60$  m, ¡sin carrerilla!

Suponga que la velocidad de salida es exactamente horizontal y no tenga en cuenta los efectos de la fuerza de fricción con el aire ni los de sustentación, debidos a la aerodinámica del saltador. (En la práctica el segundo efecto domina sobre el primero, de forma que los saltos reales son algo más largos que los idealizados parabólicos).

- c) Obtenga la ecuación de la trayectoria que hipotéticamente describirá el saltador, referida al sistema de coordenadas OXY indicado en la figura 2 que se encuentra en la “hoja de respuestas” adjunta. En dicha figura se representa también el perfil de la pista (sombreado), desde el punto de salida S del trampolín hasta el punto crítico K.
- d) Sobre la figura 2, haga una representación gráfica de la trayectoria y determine aproximadamente el punto C de aterrizaje, con sus correspondientes coordenadas  $x_C$  e  $y_C$ .
- e) Determine las componentes de la velocidad  $v_f$  del saltador cuando toca la pista en la zona de aterrizaje. Calcule el ángulo  $\varphi$  que forma la velocidad con el eje OX.
- f) Determine y calcule el ángulo,  $\phi$ , que forma la velocidad final  $v_f$  con la pista.

## P1. Hoja de respuestas

Apartado	Resultados analíticos	Resultados numéricos	Puntos
<b>a</b>	$v_0 =$	$v_0 =$	1,0 + 0,5
<b>b</b>		$v_n =$ ¿Es el saltador capaz? SI o NO	1,5
<b>c</b>		$y =$	1,5
<b>d</b>		$x_C =$ $y_C =$	2,5
<b>e</b>	$v_{fx} =$ $v_{fy} =$	$\varphi =$	1,0 + 0,5
<b>f</b>	$\phi =$	$\phi =$	1,0 + 0,5

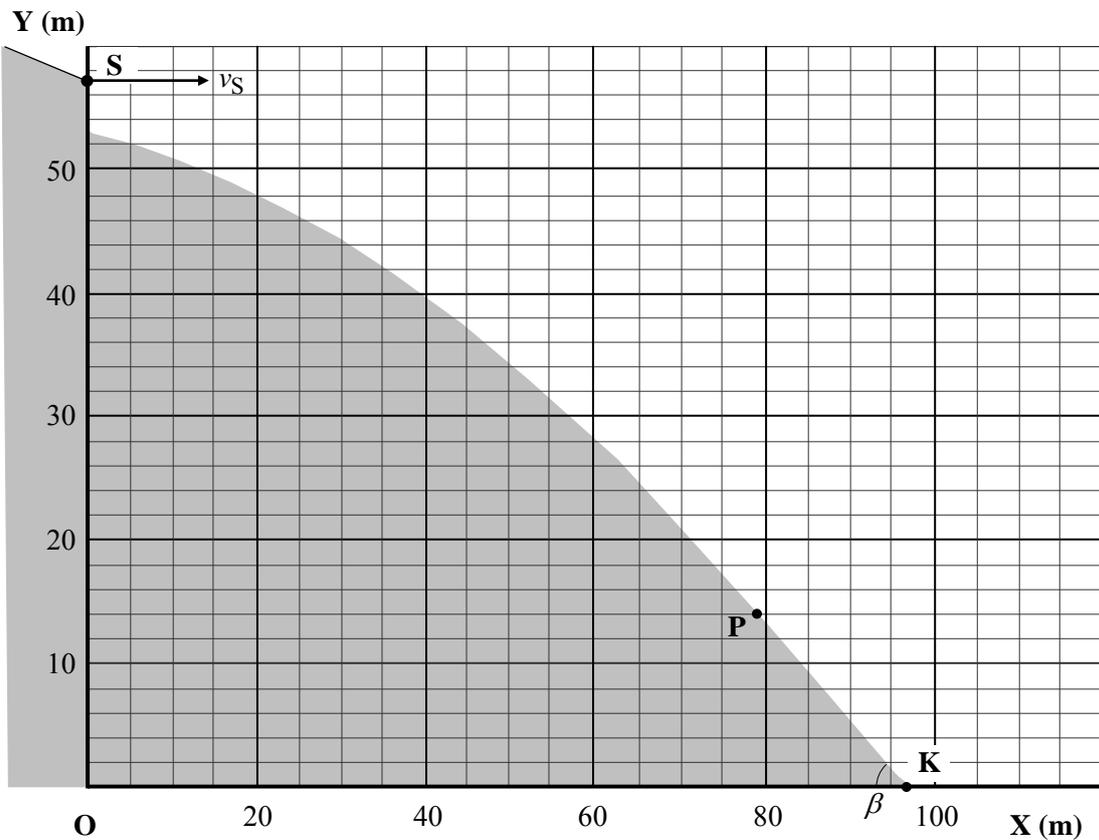


Fig. 2

## P1. Solución

- a) El saltador inicia el descenso sin velocidad inicial, desde una altura  $h_0$  respecto al borde de salida del trampolín, S. Se sabe que la energía disipada,  $Q$ , es el 20 % de la energía mecánica inicial. Si se toma como referencia para la energía potencial gravitatoria la horizontal por el punto S, se tiene

$$m g h_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 + Q, \quad \text{donde } Q = 0,2 m g h_0$$

Por tanto

$$\boxed{v_0 = \sqrt{1,6 g h_0}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_0 = 26,9 \text{ m/s}}$$

- b) Del diagrama de velocidades de la figura del enunciado se deduce que

$$v_n = v_0 \operatorname{tg} \alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_n = 3,3 \text{ m/s}}$$

¿Es el saltador capaz de *imprimirse* esta velocidad, teniendo en cuenta que en los entrenamientos en el gimnasio es capaz de saltar en vertical una altura  $h_e = 0,6 \text{ m}$ ? Teniendo en cuenta de nuevo la conservación de la energía

$$\frac{1}{2} m v_e^2 = m g h_e$$

De donde

$$v_e = \sqrt{2 g h_e} = 3,4 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_e > v_n}$$

En conclusión, el saltador SI que es capaz de salir de la pista de saltos con velocidad horizontal.

- c) Necesitamos deducir la ecuación de la trayectoria que seguirá el saltador, considerando que inicia el salto en el extremo del trampolín con una velocidad inicial horizontal  $v_S$ , de módulo

$$v_S = \sqrt{v_0^2 + v_n^2} \quad \Rightarrow \quad v_S = 27,1 \text{ m/s}$$

Emplearemos el sistema de coordenadas dado en la figura 2, con eje vertical OY pasando por el punto de salida y eje horizontal, OX, pasando por el punto K. En la figura 2 se aprecia que la ordenada del punto de salida S es aproximadamente

$$y_S \approx 57 \text{ m}$$

De una forma más precisa, la ordenada inicial puede deducirse a partir de los datos del enunciado

$$y_S = H + M \operatorname{sen} \beta \quad \Rightarrow \quad y_S = 57,1 \text{ m}$$

Suponiendo que el salto se realiza en el vacío, la trayectoria del saltador sería la de un “tiro parabólico” desde el punto S de coordenadas  $x_S = 0$  e  $y_S = 57,1 \text{ m}$ , con una velocidad inicial horizontal, de módulo  $v_S = 27,1 \text{ m/s}$ .

En consecuencia, las ecuaciones del movimiento son

$$\left. \begin{array}{l} v_x = v_S \\ v_y = -g t \end{array} \right\} \quad (1) \quad \Rightarrow \quad \left. \begin{array}{l} x = v_S t \\ y = y_S - \frac{1}{2} g t^2 \end{array} \right\} \quad (2)$$

Eliminando el tiempo se obtiene la ecuación cartesiana de la trayectoria

$$y = y_S - \frac{g}{2 v_S^2} x^2$$

Teniendo en cuenta los valores numéricos, en unidades del SI, la ecuación resulta

$$\boxed{y = 57,1 - 6,69 \times 10^{-3} x^2} \quad (3)$$

- d) En la Tabla I se muestran las coordenadas de una serie de puntos deducidos por medio de (3). Con ellos se puede trazar, de forma aproximada, la trayectoria del salto sobre la figura 3, (análoga a la figura 2, que se encuentra en la “hoja de respuestas”).

Tabla 1					
x (m)	20	40	60	80	92,4
y (m)	54,5	46,4	33,0	14,3	0

La intersección de la trayectoria con el área sombreada del perfil, permite estimar que el punto C de “toma de tierra” está próximo a P y dentro de la zona de aterrizaje. Concretamente las coordenadas de C son

$$\boxed{x_C = 82,0 \text{ m} ; \quad y_C = 12,0 \text{ m}} \quad (4)$$

- e) De (1) y (2) se tiene

$$v_x = v_S ; \quad v_y = -\frac{g}{v_S} x$$

Luego en el punto C se tiene

$$\boxed{\begin{aligned} v_{fx} &= v_S \\ v_{fy} &= -\frac{g}{v_S} x_C \end{aligned}}$$

El ángulo  $\varphi$  que forma la velocidad,  $v_f$ , al llegar a C, con la horizontal, viene dado por

$$\varphi = \text{artg} \frac{v_{yf}}{v_{xf}}$$

Tomando el valor absoluto de  $v_{yf}$ , la expresión del ángulo  $\varphi$  es

$$\varphi = \text{artg} \frac{g x_C}{2 v_S^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi = 47,7^\circ}$$

- f) El ángulo,  $\phi$ , que forma la velocidad final con la pista en el punto de aterrizaje es, por fin

$$\phi = \varphi - \beta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\phi = 7,7^\circ}$$

## P1. Hoja de respuestas

Apartado	Resultados analíticos	Resultados numéricos	Puntos
<b>a</b>	$v_0 = \sqrt{1,6 g h_0}$	$v_0 = 26,9 \text{ m/s}$	1,0 + 0,5
<b>b</b>		$v_n = 3,3 \text{ m/s}$ ¿Es el saltador capaz? SI	1,5
<b>c</b>		$y = 57,1 - 6,69 \times 10^{-3} x^2$	1,5
<b>d</b>		$x_C = 82,0 \text{ m}$ ; $y_C = 12,0 \text{ m}$	2,5
<b>e</b>	$v_{fx} = v_S$ ; $v_{fy} = -\frac{g}{v_S} x_C$	$\varphi = 47,7^\circ$	1,0 + 0,5
<b>f</b>	$\phi = \varphi - \beta$	$\phi = 7,7^\circ$	1,0 + 0,5

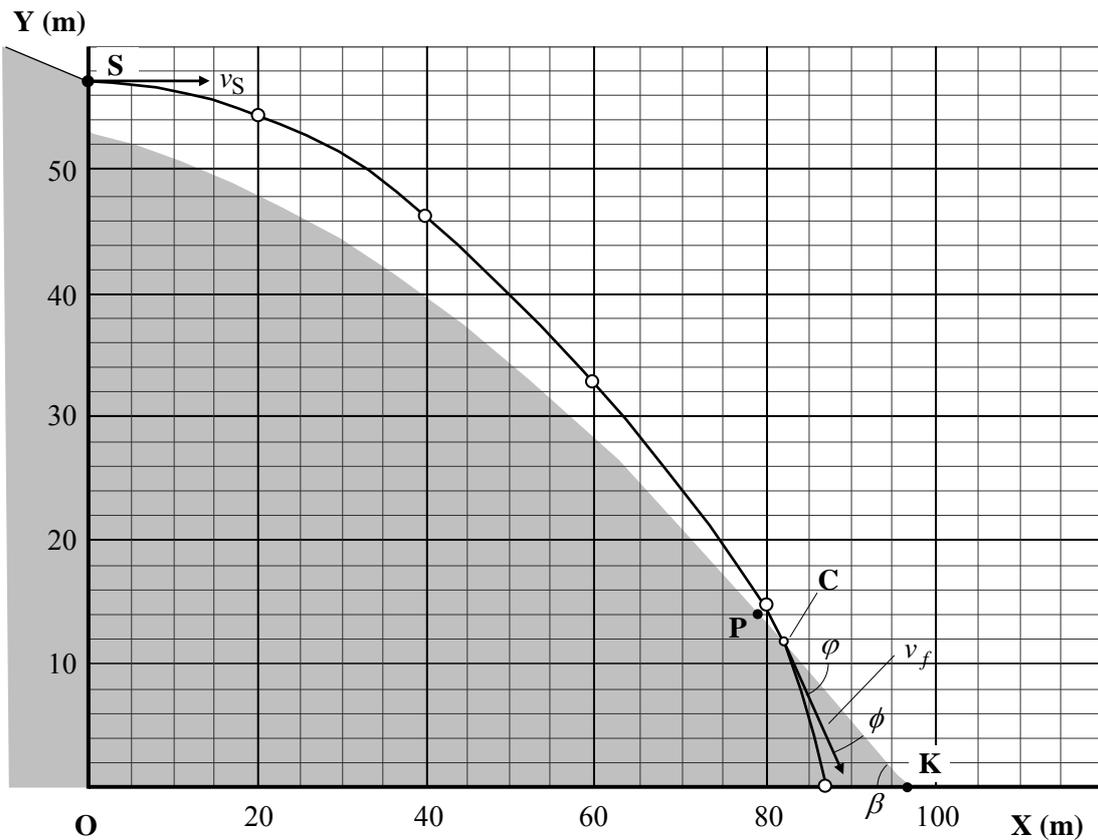


Fig. 3

## P2. El electrómetro monofilar de Wulf.

Con objeto de demostrar que la radiación en la superficie de la Tierra provenía de sustancias radiactivas existentes en el suelo, el sacerdote jesuita alemán Theodor Wulf diseñó y construyó un electrómetro de hilo que lleva su nombre. Con este instrumento, en 1910, quiso demostrar que la radiación debía disminuir con la altura. El resultado de la experiencia, realizada en la torre Eiffel, resultó negativo. La variación era pequeña pero en sentido contrario: aumentaba con la altura. Esto obligó a admitir la existencia de una radiación de origen externo que competía con la emanada de la propia Tierra. En 1912 el físico austriaco Victor Francis Hess, hizo mediciones ascendiendo en globo hasta los 5000 m: "La mejor explicación para los resultados de mis observaciones se basa en el supuesto de que una radiación de gran poder penetrante entra en nuestra atmósfera desde arriba". Posteriores medidas, realizadas desde globos no tripulados, le llevaron a la conclusión de que la intensidad de la radiación procedente del exterior (rayos cósmicos) aumenta con la altitud, varía con la latitud y es algo más intensa de día que de noche. Victor Hess, que puede considerarse el "padre" de los rayos cósmicos, recibió el Premio el Nobel de Física en 1936.

Los electrómetros son aparatos para medir diferencias de potencial o cargas eléctricas. Aunque existen diversos tipos, vamos a centrarnos en el electrómetro de Wulf de la figura 1, que se expone en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza y cuyo esquema se representa en la figura 2.



Fig. 1

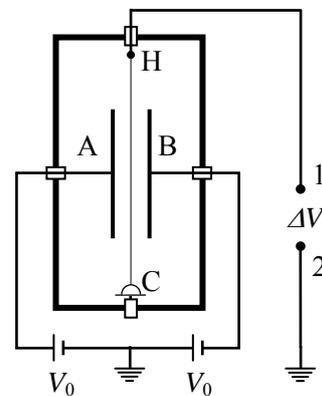


Fig. 2

En esencia, está constituido por una carcasa por cuyas caras laterales salen al exterior, perfectamente aislados, los soportes conductores de dos placas metálicas paralelas, A y B. Un fino hilo conductor HC tiene su extremo H conectado eléctricamente al borne 1 del aparato, y su extremo inferior está sujeto a la carcasa por medio de un bucle de cuarzo C, aislante, que permite regular la fuerza de tensión del hilo. El aparato dispone de un sistema lateral de iluminación, que permite observar el hilo con un microscopio dotado de un micrómetro. De esta forma es posible medir con gran precisión las pequeñas desviaciones laterales del hilo que se producen cuando entre los bornes 1 y 2 se aplica una diferencia de potencial  $\Delta V$ .

Las placas A y B, separadas una distancia  $d$ , se conectan a dos baterías de fem  $V_0$  cada una, como se indica en la figura 2. Por tanto, entre dichas placas se establece un campo eléctrico que, para simplificar el problema, puede considerarse uniforme. Si el hilo HC no está cargado no sufrirá ninguna fuerza electrostática, como se representa en la figura 3. Pero si existe una diferencia de potencial  $\Delta V > 0$ , el hilo adquirirá una carga  $+q$  y tenderá a desplazarse lateralmente hacia la placa conductora negativa (figura 4) hasta que la fuerza electrostática esté compensada por las componentes horizontales de las fuerzas de tensión  $\vec{T}$  en los extremos del hilo.

Dado que la carga  $q$  del hilo es extremadamente pequeña, también lo será el desplazamiento del hilo,  $x \ll l$ , lo que justifica la necesidad del microscopio. En consecuencia, el ángulo  $\alpha$  que forma la tensión del hilo en sus extremos con la vertical será también muy pequeño ( $\alpha \approx \sin \alpha \approx \tan \alpha$ ) y, por la misma razón, se puede considerar que el módulo  $T$  de la tensión se mantiene constante e independiente de  $x$ . Como

simplificación adicional, puede suponerse que, en equilibrio, el hilo es prácticamente recto en el espacio comprendido entre las placas, como se representa en la figura 5.

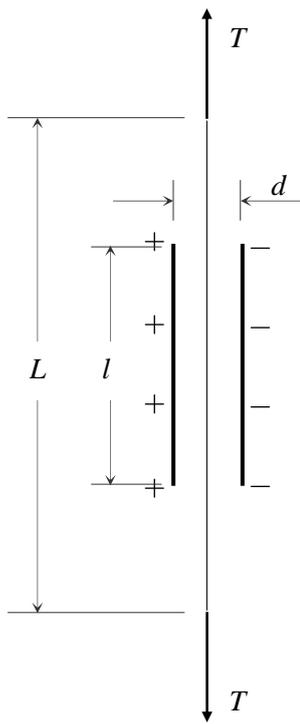


Fig. 3

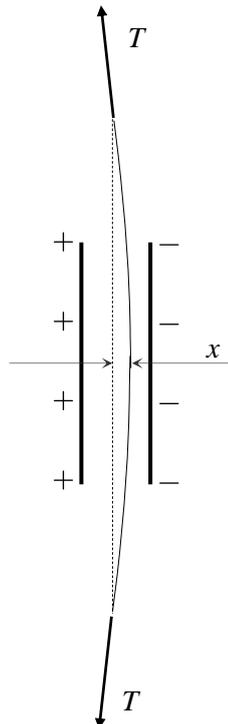


Fig. 4

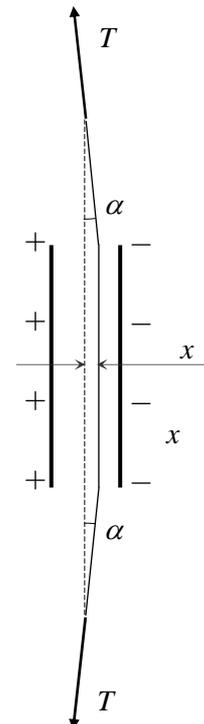


Fig. 5

- a) Determine el módulo del campo eléctrico  $E$  existente entre las placas A y B, en función de  $V_0$  y  $d$ .

Cuando entre los bornes 1 y 2 se establece la diferencia de potencial  $\Delta V$ , el hilo adquiere una carga  $q$  que se reparte uniformemente por el hilo como una *densidad lineal* de carga  $\lambda = q/L$ . La parte del hilo comprendido entre las placas, cuya carga es  $\lambda l$ , por efecto del campo eléctrico uniforme sufrirá un desplazamiento  $x$ , tal como se muestra en la figura 5.

- b) Deduzca la expresión que relaciona el desplazamiento  $x$  del hilo, con de  $V_0$ ,  $L$ ,  $l$ ,  $d$ ,  $T$  y  $q$ .

Para modificar el rango de medidas puede modificarse la tensión  $T$  del hilo, aunque no es sencillo determinar su valor. Tampoco es fácil encontrar la relación entre la carga del hilo y la diferencia de potencial  $\Delta V$  que se aplica entre los bornes del electrómetro. Sin embargo, para pequeños valores de  $x$ , la desviación del hilo y el voltaje aplicado  $\Delta V$  son proporcionales, es decir  $x = K \Delta V$ . Suponga que, mediante una operación previa de calibrado, se sabe que la constante de proporcionalidad es  $K = 5,59 \times 10^{-6} \text{ m/V}$ .

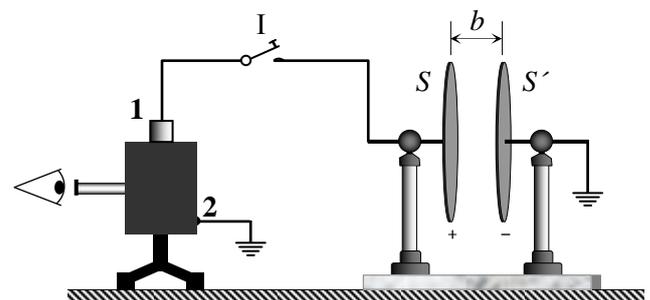


Fig. 6

En estas condiciones, como se muestra en la figura 6, se unen los bornes 1 y 2 del electrómetro, a través de un interruptor I, a las armaduras S y S' de un condensador plano cargado. Las armaduras son circulares, de radio  $r = 0,150 \text{ m}$ , y están separadas una distancia  $b = 0,120 \text{ m}$ . Cuando se cierra el interruptor I, se observa en el electrómetro una desviación del hilo  $x_1 = 0,139 \text{ mm}$ .

- c) Determine y calcule la diferencia de potencial  $\Delta V_1$  existente entre las armaduras del condensador, así como su carga  $Q_1$ . (Permitividad dieléctrica del aire:  $\varepsilon = 8,86 \times 10^{-12} \text{ C}^2\text{N}^{-1}\text{m}^{-2}$ ).

A partir del instante en que se cierra el interruptor I se observa que la desviación del hilo  $x_1$  disminuye lentamente hasta anularse, lo que significa que la diferencia de potencial entre las placas del condensador disminuye con el mismo ritmo hasta hacerse cero. Si no existiese ningún tipo de corriente de fuga a través de los materiales aislantes del montaje, el fenómeno se debería exclusivamente a que algún tipo de radiación, suficientemente energética, ioniza las moléculas del gas (aire) existente entre las placas. Los iones positivos emigran a la placa negativa y los negativos a la positiva y, paulatinamente, se descarga el condensador.

- d) Si el tiempo que transcurre desde que se acciona el interruptor hasta que  $x_1 \approx 0$  es  $\tau = 7,66 \times 10^3 \text{ s}$ , y suponiendo que la descarga del condensador se deba solo a ionizaciones simples del aire entre sus armaduras (cada molécula ionizada da lugar a un solo electrón y a un ion positivo), determine y calcule el número  $N$  de ionizaciones que se realizan por segundo y por  $\text{cm}^3$  en el espacio comprendido entre las armaduras del condensador. (carga elemental  $e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$ ).

## P2. Solución

- a) En la figura 7 se representan exclusivamente las conexiones de las placas del electrómetro con las dos baterías y la conexión a tierra, y es fácil ver que la diferencia de potencial entre ambas es  $2V_0$ . Dado que dichas placas constituyen un condensador plano, el módulo del campo eléctrico en su interior es

$$\boxed{E = \frac{2V_0}{d}}$$

- b) Cuando el hilo tenga carga positiva, tenderá a desplazarse hacia la placa negativa, la B en nuestro caso. Aceptando la simplificación propuesta en el enunciado, consideremos como sistema mecánico en equilibrio la porción de hilo entre las placas (figura 8). Las fuerzas exteriores que actúan son las tensiones en sus extremos, de módulo  $T$ , y la fuerza electrostática  $F$  debida al campo eléctrico. Si  $\lambda$  es la densidad lineal de carga eléctrica del hilo, esta fuerza es

$$F = \lambda l E = \lambda l \frac{2V_0}{d} \quad (1)$$

En el equilibrio, la fuerza resultante horizontal debe ser nula, por lo que

$$F - 2T \sin \alpha = 0 \quad (2)$$

Teniendo en cuenta el pequeño valor de  $\alpha$ ,

$$\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha$$

De la figura 5 del enunciado es fácil deducir que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{(L-l)/2}$$

De donde,

$$\lambda l \frac{2V_0}{d} = 2T \frac{2x}{L-l} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{(L-l)l}{d} \frac{\lambda V_0}{2T}$$

Y como  $\lambda = q/L$ , resulta

$$\boxed{x = \frac{(L-l)l}{Ld} \frac{V_0}{2T} q} \quad (3)$$

- c) Al conectar las armaduras del condensador a los bornes del electrómetro se observa una desviación del hilo  $x_1 = 0,139 \text{ mm}$ , luego, teniendo en cuenta el valor de la constante de calibración  $K$ , el voltaje es

$$\boxed{\Delta V = \frac{x_1}{K}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta V = 24,9 \text{ V}}$$

La capacidad del condensador plano viene dada por  $C = \varepsilon A/b$ , donde  $A$  es el área de las armaduras. Por consiguiente,

$$C = \varepsilon \frac{\pi r^2}{b}$$

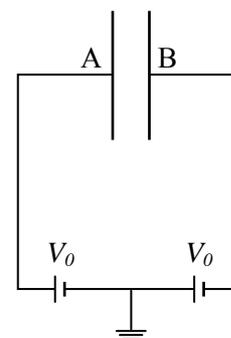


Fig. 7

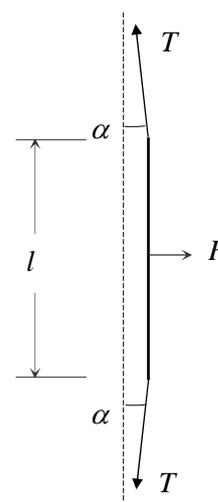


Fig. 8

Si la diferencia de potencial a la que se conecta es  $\Delta V$ , el valor absoluto de la carga de cada una de sus armaduras será  $Q = C \Delta V$ , por lo que, en función de los parámetros del problema

$$\boxed{Q = \varepsilon \frac{\pi r^2}{b} \frac{x}{K}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = 1,30 \times 10^{-10} \text{ C}}$$

- d) La carga de cada armadura se neutraliza al cabo del tiempo  $\tau$  como consecuencia de las cargas de signo opuesto que le llegan procedentes de las ionizaciones que han tenido lugar en el aire existente entre las placas, cuyo volumen es  $\pi r^2 b$ . Por lo tanto, el número de ionizaciones que han tenido lugar por segundo y por unidad de volumen es

$$N = \frac{Q}{e \tau \pi r^2 b}$$

Teniendo en cuenta la expresión de  $Q$ ,

$$\boxed{N = \frac{\varepsilon}{e \tau b^2} \frac{x}{K}} \quad \Rightarrow \quad N = 12,5 \times 10^6 \text{ ionizaciones}/(\text{s} \cdot \text{m}^3)$$

$$\boxed{N = 12,5 \text{ ionizaciones}/(\text{s} \cdot \text{cm}^3)}$$

## P2. Tabla de respuestas

Apartado	Resultados analíticos	Resultados numéricos	Puntos
<b>a</b>	$E = \frac{2V_0}{d}$		1,5
<b>b</b>	$x = \frac{(L-l)l}{Ld} \frac{V_0}{2T} q$		3
<b>c</b>	$\Delta V = \frac{x_1}{K}$ $Q = \varepsilon \frac{\pi r^2}{b} \frac{x}{K}$	$\Delta V = 24,9 \text{ V}$ $Q = 1,30 \times 10^{-10} \text{ C}$	2 + 1
<b>d</b>	$N = \frac{\varepsilon}{e \tau b^2} \frac{x}{K}$	$N = 12,5 \text{ ionizaciones}/(\text{s} \cdot \text{cm}^3)$	1,5 + 1

### P3. El giróscopo interferencial de fibra óptica.

Un *giróscopo* mecánico es un aparato consistente en un disco que gira rápidamente sobre un eje libre que, debido a la conservación del momento angular, tiende a mantenerse en una dirección constante. Fue inventado por el físico francés Jean Bernard Léon Foucault (1819-1868) y se utiliza habitualmente para mantener la orientación en el espacio, en particular para la estabilización del rumbo de barcos, aviones y satélites. Pero existen otros dispositivos no mecánicos, más precisos, versátiles y sencillos, que se usan con los mismos fines.

El también físico francés Georges Sagnac descubrió en 1911 que “una onda electromagnética que se mueve en un camino cerrado es influenciada por la velocidad angular del sistema”. Basados en el llamado “efecto Sagnac”, a partir de 1960 comenzó la utilización de los giróscopos ópticos, que derivaron en 1970 en los *giróscopos interferenciales de fibra óptica*. En este ejercicio se describen, de forma simplificada, estos giróscopos.

Como ejercicio preliminar, considere que un haz de luz láser, de longitud de onda  $\lambda$  (en el vacío), se propaga con velocidad  $v$  por una fibra óptica rectilínea, de índice de refracción efectivo<sup>1</sup>  $n$ , que se mueve longitudinalmente con velocidad  $V$ .

- a1) Determine el tiempo  $t_1$  que tarda la luz en recorrer una longitud  $L$  de fibra, cuando dicha luz se propaga en el mismo sentido que se mueve la fibra (figura 1.a), y el tiempo  $t_2$  cuando lo hace en sentido opuesto (figura 1.b).
- a2) Determine la diferencia entre estos dos tiempos,  $\Delta t = t_1 - t_2$ . Aproxime el resultado teniendo en cuenta que  $V \ll v$

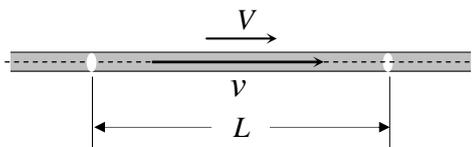


Fig. 1.a

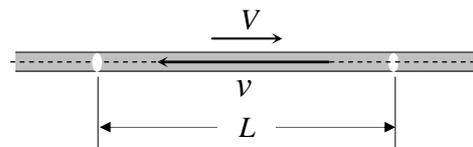


Fig. 1.b

Considere ahora que la fibra óptica se curva en una circunferencia de longitud  $L = 2\pi R$ , y que gira con velocidad angular  $\Omega$  en torno a su centro en sentido horario. Por la fibra se propagan dos haces de luz en sentidos opuestos.

- b) Determine la diferencia,  $\Delta t$ , entre los tiempos  $t_+$  y  $t_-$  que tarda la luz en recorrer el anillo circular de longitud  $L$  en sentidos horario y antihorario, respectivamente (Figuras 2.a y 2.b). Expresé el resultado en función del área  $A$  del anillo.

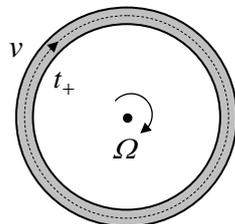


Fig. 2.a

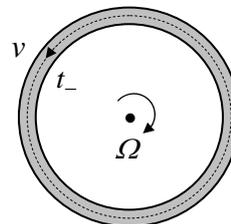


Fig. 2.b

<sup>1</sup> El índice de refracción efectivo  $n$  hace referencia a la velocidad de avance de la luz a lo largo del eje de la fibra,  $v = c/n$ , donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío.

El funcionamiento de un giróscopo de fibra óptica se esquematiza en la figura 3. Un 50% de la luz emitida por el láser se refleja en el divisor de haz (+), recorre  $N$  espiras circulares de fibra en sentido horario y, tras reflejarse en el divisor de haz, incide en el detector. El otro 50% de la luz se transmite a través del divisor de haz (-), recorre las  $N$  espiras en sentido antihorario e incide en el detector después de transmitirse a través del divisor.

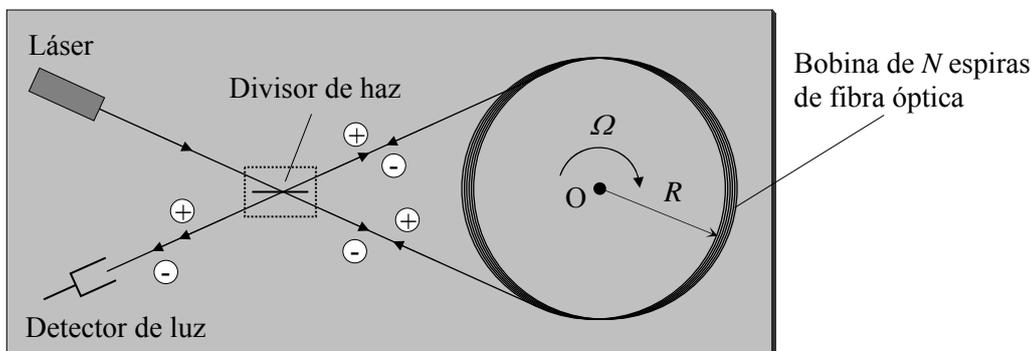


Fig. 3

Si el dispositivo no gira ( $\Omega = 0$ ), al detector llegan dos haces coherentes que han recorrido el mismo camino óptico y que, por tanto, se superponen en fase e interfieren constructivamente. Sin embargo, cuando todo el conjunto de la figura 3 gira con velocidad angular  $\Omega$  en torno al centro de las espiras, entre ambos haces habrá una diferencia de fase que cambiará el estado interferencial en el detector (efecto Sagnac).

Determine:

- c1) La diferencia entre los tiempos que tardan los dos haces en llegar al detector,  $\Delta T$ , cuando el dispositivo gira con una velocidad  $\Omega$  en torno a su centro.
- c2) La diferencia de fase,  $\delta$ , entre los dos haces de luz.

En los giróscopos de fibra óptica, el sistema optoelectrónico de detección analiza el estado interferencial de los dos haces, determina esta diferencia de fase y permite deducir con gran precisión la velocidad angular de rotación y, en consecuencia, los cambios de rumbo.

- d) Determine la mínima velocidad angular de rotación,  $\Omega_{\min}$ , para que ambos haces interfieran destructivamente en el detector, de forma que se anule la intensidad total.

Suponga que el sistema de detección es capaz de apreciar variaciones de la diferencia de fase  $\Delta\delta = 1$  mrad.

- e) Con los datos que se indican a continuación, calcule la precisión  $\Delta\Omega$  con que es posible obtener la velocidad angular de rotación.

Radio de las espiras de fibra óptica:  $R = 5,0 \times 10^{-2}$  m

Número de espiras:  $N = 3200$

Índice de refracción efectivo de la fibra:  $n = 1,48$

Longitud de onda (en el vacío) del láser:  $\lambda = 1,3$   $\mu\text{m}$

Velocidad de la luz en el vacío:  $c = 3,0 \times 10^8$  m/s

### P3. Solución

- a1) Los tiempos  $t_1$  y  $t_2$  que tarda la luz en recorrer el segmento de la fibra de longitud  $L$ , cuando dicha fibra se mueve con velocidad  $V$ , en el mismo sentido que la luz o en sentido contrario, verifican las expresiones siguientes, respectivamente,

$$\left. \begin{array}{l} vt_1 = L + V t_1 \\ vt_2 = L - V t_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} t_1 = \frac{L}{v - V} \\ t_2 = \frac{L}{v + V} \end{array}}$$

- a2) La diferencia,  $\Delta t$  de los tiempos anteriores es

$$\Delta t = t_1 - t_2 = L \left( \frac{1}{v - V} - \frac{1}{v + V} \right) = \frac{2LV}{v^2 - V^2}$$

Teniendo en cuenta que  $V \ll v = c/n$ , las expresión anterior de  $\Delta t$  puede aproximarse

$$\Delta t \approx \frac{2LV}{v^2}$$

La velocidad de propagación de la luz en la fibra es  $v = c/n$ , de forma que

$$\boxed{\Delta t = \frac{2n^2 LV}{c^2}} \quad (1)$$

- b) La situación es análoga a la del apartado anterior, con  $L = 2\pi R$  y  $V = \Omega R$ . Por lo tanto

$$\Delta t = \frac{4\pi n^2 R^2}{c^2} \Omega$$

En función del área de la espira circular  $A = \pi R^2$

$$\boxed{\Delta t = \frac{4n^2 A}{c^2} \Omega} \quad (2)$$

- c1) De acuerdo con el enunciado, al detector llegan dos haces. Uno ha recorrido las  $N$  espiras de la bobina en sentido horario y el otro en sentido antihorario. Por lo tanto, teniendo en cuenta el resultado anterior (2),

$$\Delta T = N \Delta t \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta T = N \frac{4n^2 A}{c^2} \Omega} \quad (3)$$

- c2) La diferencia de fase,  $\delta$ , entre los dos haces es

$$\delta = \omega \Delta T$$

donde  $\omega = 2\pi c / \lambda$  es la frecuencia angular de la luz.

Teniendo en cuenta (3)

$$\boxed{\delta = \frac{8\pi n^2 N A}{\lambda c} \Omega} \quad (4)$$

- d) Los haces que alcanzan el detector interferirán destructivamente cuando  $\delta = m \pi$ , con  $m = 1, 3, 5 \dots$

La frecuencia  $\Omega_{\min}$  corresponderá al primer mínimo de interferencia, es decir  $\delta = \pi$ . Sustituyendo en (4),

$$\Omega_{\min} = \frac{\lambda c}{8 n^2 N A}$$

- e) Si la mínima diferencia de fase detectable es  $\Delta\delta$ , tomando incrementos en (4) se obtiene la precisión  $\Delta\Omega$  con que es posible obtener la velocidad angular de rotación

$$\Delta\Omega = \frac{\lambda c}{8 \pi n^2 N A} \Delta\delta$$

Con  $\Delta\delta = 1$  mrad y los datos que figuran en el enunciado, se obtiene

$$\Delta\Omega = 2,8 \times 10^{-4} \text{ rad/s} = 1,6 \times 10^{-2} \text{ }^\circ/\text{s} = 58 \text{ }^\circ/\text{h}$$

### P3. Tabla de respuestas

Apartado	Resultados analíticos	Resultados numéricos	Puntos
<b>a1</b>	$t_1 = \frac{L}{v - V}$		0,5
	$t_2 = \frac{L}{v + V}$		0,5
<b>a2</b>	$\Delta t = \frac{2 n^2 L V}{c^2}$		1,5
<b>b</b>	$\Delta t = \frac{4 n^2 A}{c^2} \Omega$		1
<b>c1</b>	$\Delta T = N \frac{4 n^2 A}{c^2} \Omega$		1
<b>c2</b>	$\delta = \frac{8 \pi n^2 N A}{\lambda c} \Omega$		2
<b>d</b>	$\Omega_{\min} = \frac{\lambda c}{8 n^2 N A}$		2
<b>e</b>		$\Delta\Omega = 2,8 \times 10^{-4} \text{ rad/s} =$ $= 1,6 \times 10^{-2} \text{ }^\circ/\text{s} = 58 \text{ }^\circ/\text{h}$	1,5

**Objetivo.**

Se va a construir un circuito eléctrico para alimentar LEDs de diferentes colores y obtener un valor aproximado de la constante de Planck. Además se determinará, para uno de estos LEDs, el valor de una constante característica llamada *factor de idealidad*.

**Materiales.**

- Cinco LEDs, de colores diferentes.
- Pila de 9 V.
- Potenciómetro y resistencia de protección.
- Dos polímetros con sondas y cuatro pinzas (cocodrilos).
- Regleta de conexión.
- Destornillador.

**Modelo teórico<sup>2</sup>.**

Un LED (Light-Emitting Diode) es un dispositivo optoelectrónico que emite luz cuando circula por él una corriente eléctrica  $I$  (figura 1). Para que circule esta corriente es necesario que la diferencia de potencial entre sus terminales,  $V$ , sea superior a un cierto valor umbral,  $V_0$ .

En esencia, un LED es un semiconductor en el que los electrones se encuentran en niveles de energía muy próximos que forman *bandas*. La de menor energía es la *banda de valencia*, que está normalmente llena de electrones. Existe otra banda, con energía superior y que contiene pocos electrones, llamada *banda de conducción*. Ambas bandas están separadas por una *banda prohibida*, de energía  $E$  (figura 2).

Para que un electrón pueda excitarse desde la banda de valencia hasta la de conducción debe absorber, como mínimo, una energía  $E = qV_0$ , donde  $q$  es la carga elemental (valor absoluto de la carga del electrón). Esta energía es aportada por la batería que alimenta el circuito con el LED.

Cuando el electrón se desexcita y regresa a la banda de valencia se emite un fotón de energía  $E = h\nu$ , donde  $h$  es la constante de Planck y  $\nu$  la frecuencia de la radiación emitida. Por tanto, con este modelo simplificado, sería de esperar que se cumpliese la igualdad  $qV_0 = h\nu$ . En la práctica, se encuentra esta relación lineal entre  $V_0$  y  $\nu$ , pero con un término independiente,  $C$ , aproximadamente constante, que no puede justificarse con este modelo, es decir

$$V_0 \approx C + \frac{h}{q}\nu \tag{1}$$

Por otra parte, para  $V$  superior a  $V_0$ , la corriente  $I$  aumenta de modo aproximadamente exponencial (figura 3), en la forma

$$I \approx I_s e^{(qV/\eta kT)} \tag{2}$$

donde  $I_s$  es la llamada *corriente de saturación*,  $k$  la constante de Boltzmann,  $T$  la temperatura absoluta y  $\eta$  se conoce como *factor de idealidad* del LED.

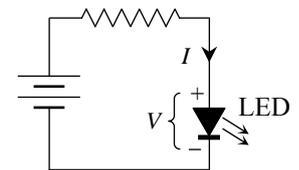


Fig. 1

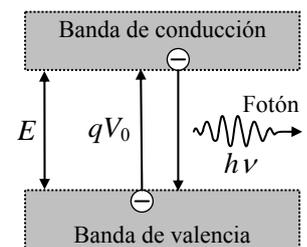


Fig. 2

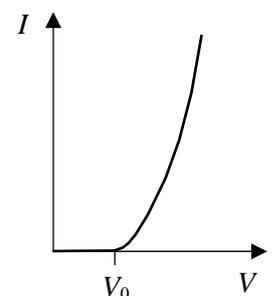
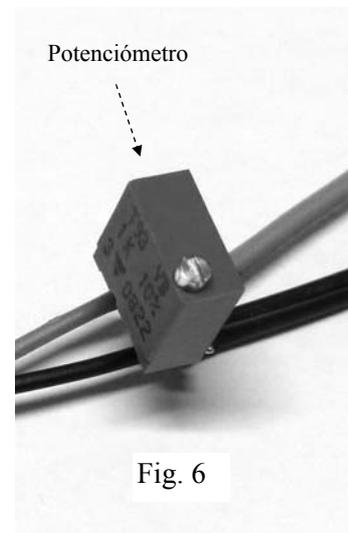
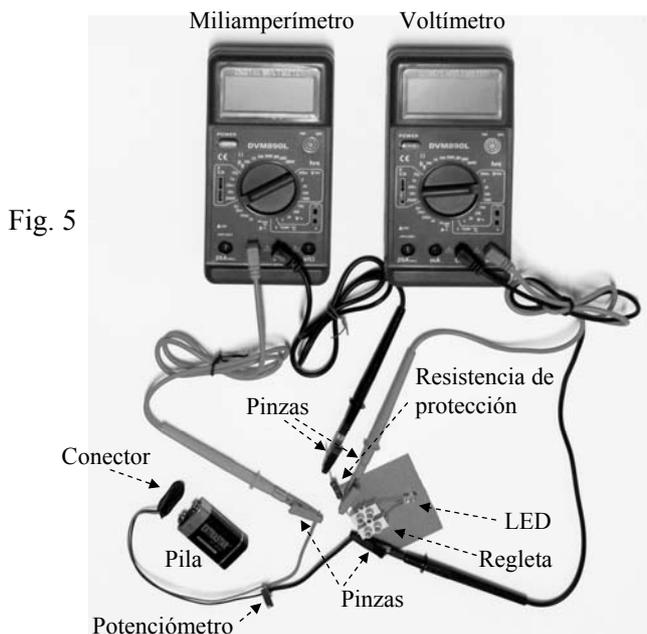
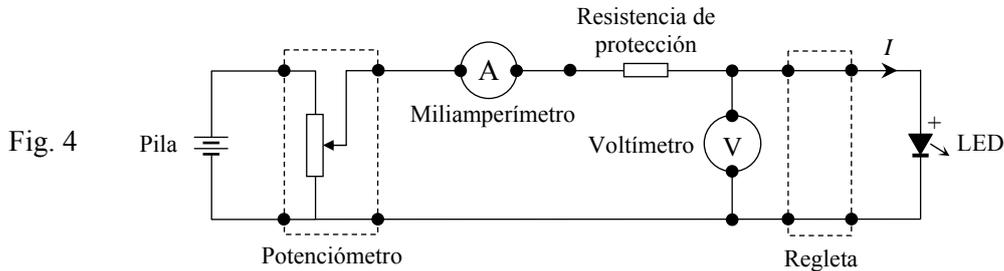


Fig. 3

<sup>2</sup> Se presenta un modelo muy simplificado, suficiente para los objetivos de esta prueba experimental. El valor de la constante de Planck que se obtiene es correcto en orden de magnitud, pero puede diferir del valor real en más de un 10%, dependiendo de los LEDs concretos empleados en las medidas.

## Montaje.

El esquema eléctrico del equipo experimental se presenta en la figura 4, donde se indican los puntos de conexión de los cables, la figura 5 es una fotografía del montaje real. En la figura 6 se muestra una fotografía ampliada del potenciómetro.



### Instrucciones de montaje:

- El potenciómetro multivuelta presenta, de un lado, dos cables libres (rojo y negro) y, del otro, un conector para la pila de 9 V. **No conectes todavía la pila al circuito.**
- Conecta el cable negro del potenciómetro a un terminal de la regleta, donde se asegura el contacto apretando el tornillo.
- Conecta la resistencia de protección en el otro terminal de la regleta.
- Conecta las puntas de prueba del miliamperímetro mediante pinzas (“cocodrilos”) al cable rojo del potenciómetro y a la resistencia de protección.
- Con las otras dos pinzas, conecta las puntas de prueba del voltímetro a los terminales de la regleta.
- Los LEDs se conectarán en el otro extremo de la regleta. La patilla más larga del LED es el ánodo (+), por donde debe entrar la corriente.
- El miliamperímetro debe estar en la escala de **2 mA**, y el voltímetro en la de **20 V**.
- Inicialmente, para anular la tensión de alimentación del LED, **gira el tornillo del potenciómetro en sentido antihorario** hasta el final de su recorrido.
- **Atención:** para evitar que se agote la pila, mantén el circuito abierto cuando no estés midiendo.

## Medidas y preguntas.

### 1ª parte. Determinación de $h$ .

**1.a)** Conecta en la regleta el LED infrarrojo (cápsula oscura). Conecta la pila y aumenta la tensión de alimentación del LED, girando el potenciómetro en sentido horario, hasta que circule una corriente de 0,010 mA. Supondremos que, en estas circunstancias, la tensión indicada por el voltímetro es aproximadamente la tensión umbral para este diodo,  $V_0$ . Anota el valor de  $V_0$ .

**Restableciendo cada vez el potenciómetro a su posición inicial**, repite la medida de  $V_0$  para los otros cuatro LEDs: rojo, amarillo, azul y violeta. El aspecto exterior de estos LEDs es similar, pero los distinguirás al hacer pasar corriente.

**No olvides desconectar la pila** al finalizar esta serie de medidas.

Traslada tus medidas a la Tabla 1 de la hoja de respuestas, donde se indica la longitud de onda de emisión de cada LED. Para calcular la frecuencia  $\nu$ , recuerda que  $c = \lambda\nu$ , donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío y  $\lambda$  la longitud de onda.

- 1.b)** Representa gráficamente los valores de  $V_0$  (en ordenadas) frente a las frecuencias  $\nu$  (en abscisas).
- 1.c)** Obtén el valor de la pendiente de la recta que mejor se ajusta a los puntos de la gráfica.
- 1.d)** Deduce el valor de  $h$ .
- 1.e)** Haz una estimación de la incertidumbre de la pendiente.
- 1.f)** Teniendo en cuenta lo anterior, haz una estimación de la incertidumbre del valor de  $h$ .

### 2ª parte. Determinación del factor de idealidad, $\eta$ .

Gira el potenciómetro en sentido antihorario hasta el final de su recorrido y conecta el LED **rojo** en la regleta. Selecciona en el voltímetro la escala de 2 V. Conecta la pila y aumenta la tensión de alimentación hasta que el amperímetro indique, de nuevo, una intensidad de 0,010 mA.

- 2.a)** Partiendo de la situación anterior, aumenta sucesivamente la tensión de alimentación a intervalos regulares de aproximadamente 0,02 V, hasta un valor máximo de 1,70 V. Anota en cada caso los valores de  $V$  y de  $I$  en la Tabla 2 de la hoja de respuestas. En esta tabla dispones de una columna vacía, para alguna magnitud derivada de las anteriores que necesites en el siguiente apartado.
- 2.b)** A partir de la gráfica y del ajuste que estimes oportunos, determina el valor del coeficiente de idealidad,  $\eta$ , del LED rojo.
- 2.c)** Haz una estimación de la incertidumbre de este coeficiente.

#### Datos:

Temperatura ambiente:  $T = (295 \pm 3)$  K

Carga elemental:  $q = 1,60 \times 10^{-19}$  C

Velocidad de la luz en el vacío:  $c = 3,00 \times 10^8$  m/s

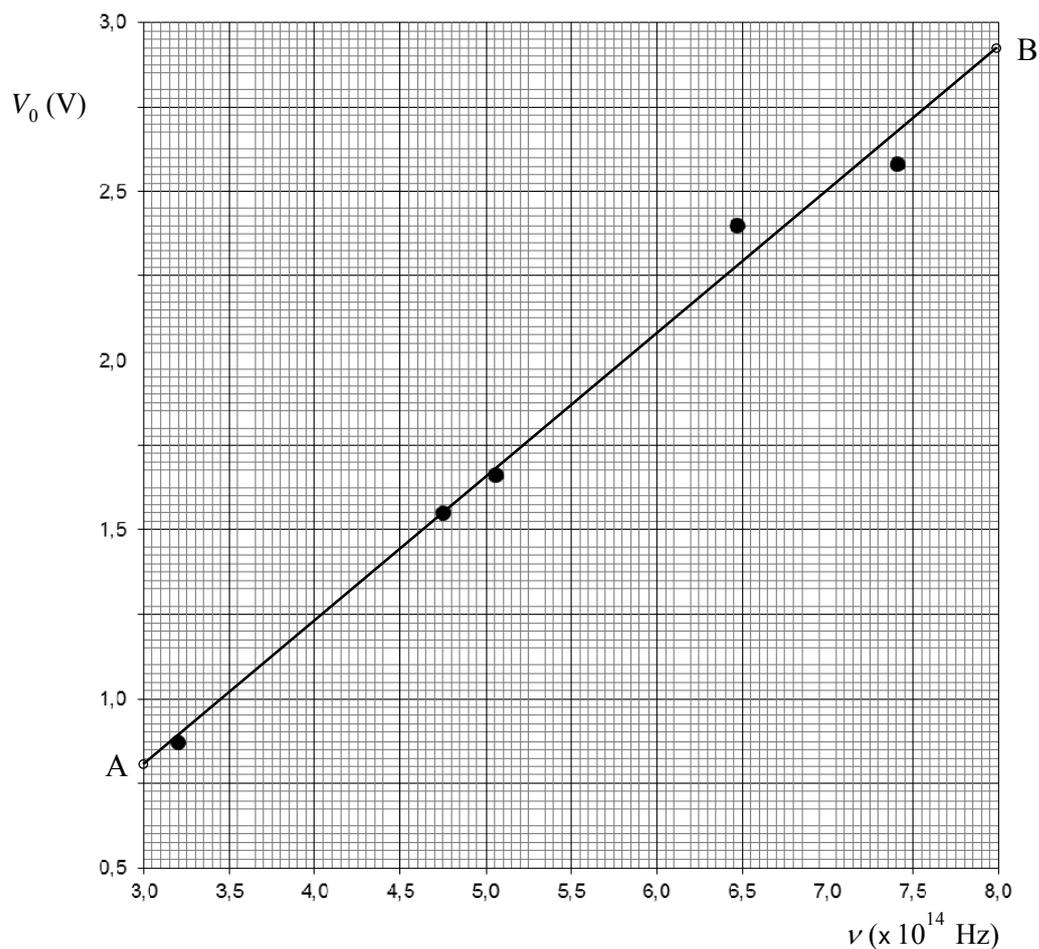
Constante de Boltzmann:  $k = 1,38 \times 10^{-23}$  J/K

1ª parte.

1.a) Tabla 1

LED	$\lambda$ (nm)	$\nu$ ( $\times 10^{14}$ Hz)	$V_0$ (V)
Infrarrojo	938	3,20	0,87
Rojo	632	4,75	1,55
Amarillo	593	5,06	1,66
Azul	464	6,47	2,40
Violeta	405	7,41	2,58

1.b) Gráfica.



1.c) Pendiente de la recta:

A partir de las coordenadas de los puntos auxiliares A y B

$$p = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{(2,925 - 0,800)\text{V}}{(8,00 - 3,00) \times 10^{14} \text{ s}^{-1}} \quad \boxed{p = 4,25 \times 10^{-15} \text{ V} \cdot \text{s}}$$

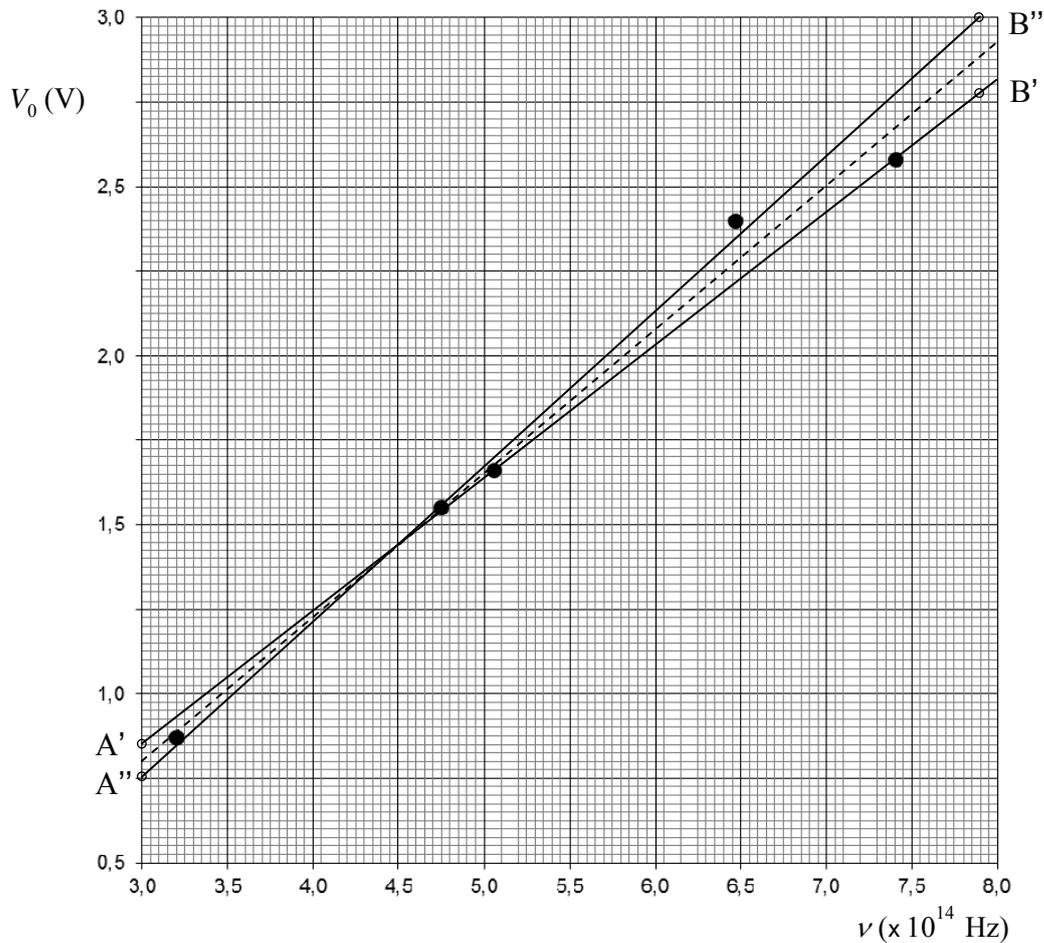
1.d) Valor de  $h$ :

Según la ecuación (1) del enunciado, la pendiente de la recta anterior es  $p = h/q$ . Por tanto

$$h = q p \quad \boxed{h = 6,80 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}$$

### 1.e) Incertidumbre de la pendiente:

En la siguiente figura se realiza una estimación gráfica de las rectas que, con pendientes máxima y mínima, se ajustan razonablemente a los puntos experimentales



$$p_{\min} = \frac{y_{B'} - y_{A'}}{x_{B'} - x_{A'}} = \frac{(2,775 - 0,850)\text{V}}{(7,90 - 3,00) \times 10^{14} \text{ s}^{-1}} = 3,93 \times 10^{-15} \text{ V} \cdot \text{s}$$

$$p_{\max} = \frac{y_{B''} - y_{A''}}{x_{B''} - x_{A''}} = \frac{(3,000 - 0,750)\text{V}}{(7,90 - 3,00) \times 10^{14} \text{ s}^{-1}} = 4,59 \times 10^{-15} \text{ V} \cdot \text{s}$$

$$\Delta p = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{2} = 0,33 \times 10^{-15} \text{ V} \cdot \text{s} \quad \boxed{\Delta p = 0,3 \times 10^{-15} \text{ V} \cdot \text{s}}$$

Nota: Un cálculo analítico aplicando el método de mínimos cuadrados conduce a resultados similares. Se obtiene, con un nivel de confianza del 68 %,

$$p = (4,2 \pm 0,3) \times 10^{-15} \text{ V} \cdot \text{s}$$

Para que el nivel de confianza aumente al 95 %, es necesario triplicar el margen de error.

### 1.f) Incertidumbre de la constante de Planck

Supuesto que el valor de  $q$  es exacto,  $\Delta h = q \Delta p$   $\boxed{\Delta h = 0,5 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}$

En total, el resultado del experimento, expresado con el número adecuado de cifras significativas, es

$$h = (6,8 \pm 0,5) \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

2ª parte.

2.a) **Tabla 2**

Midiendo con el LED rojo se obtienen los siguientes resultados:

V (V)	I (mA)	ln I
1,551	0,010	-11,5
1,580	0,020	-10,8
1,600	0,031	-10,4
1,620	0,050	-9,90
1,640	0,076	-9,48
1,660	0,118	-9,04
1,680	0,180	-8,62
1,700	0,270	-8,22

2.b) **Factor de idealidad:**

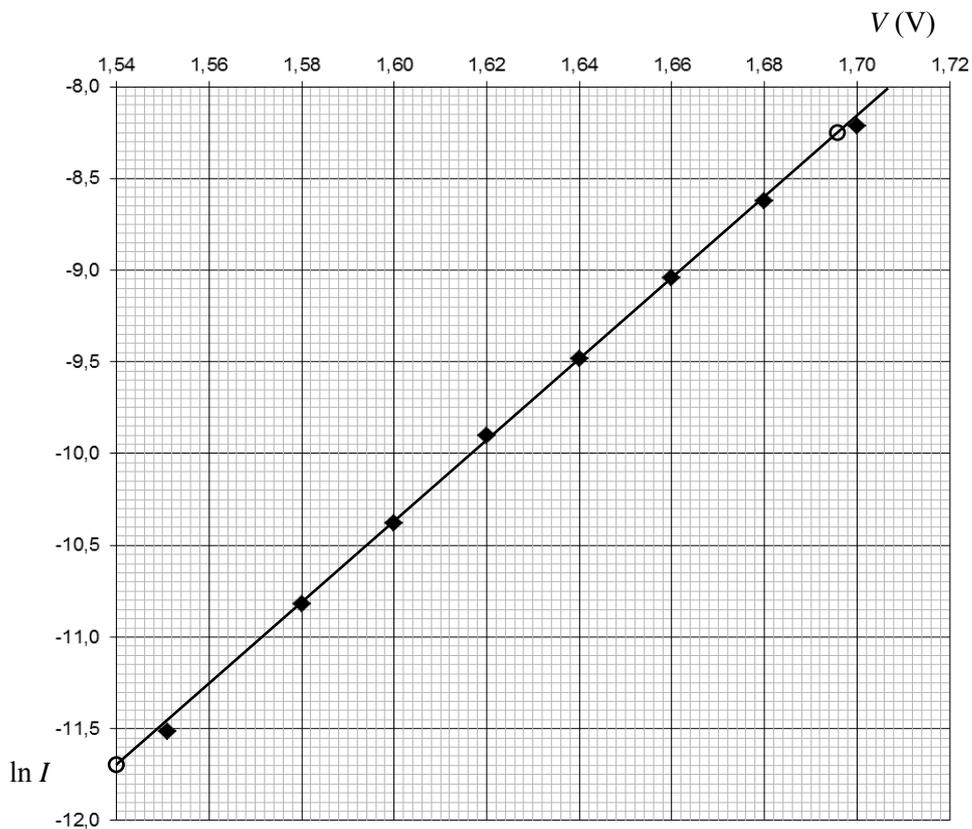
Tomando logaritmos en la ecuación (2) del enunciado

$$\ln I \approx \ln I_s + \frac{q}{\eta k T} V$$

Es decir, se espera una relación aproximadamente lineal entre  $\ln I$  y  $V$ , con pendiente

$$p = \frac{q}{\eta k T}$$

A continuación se presenta la correspondiente gráfica.



La pendiente de la recta a la que se ajustan los puntos experimentales puede obtenerse a partir de las coordenadas de los dos puntos auxiliares indicados

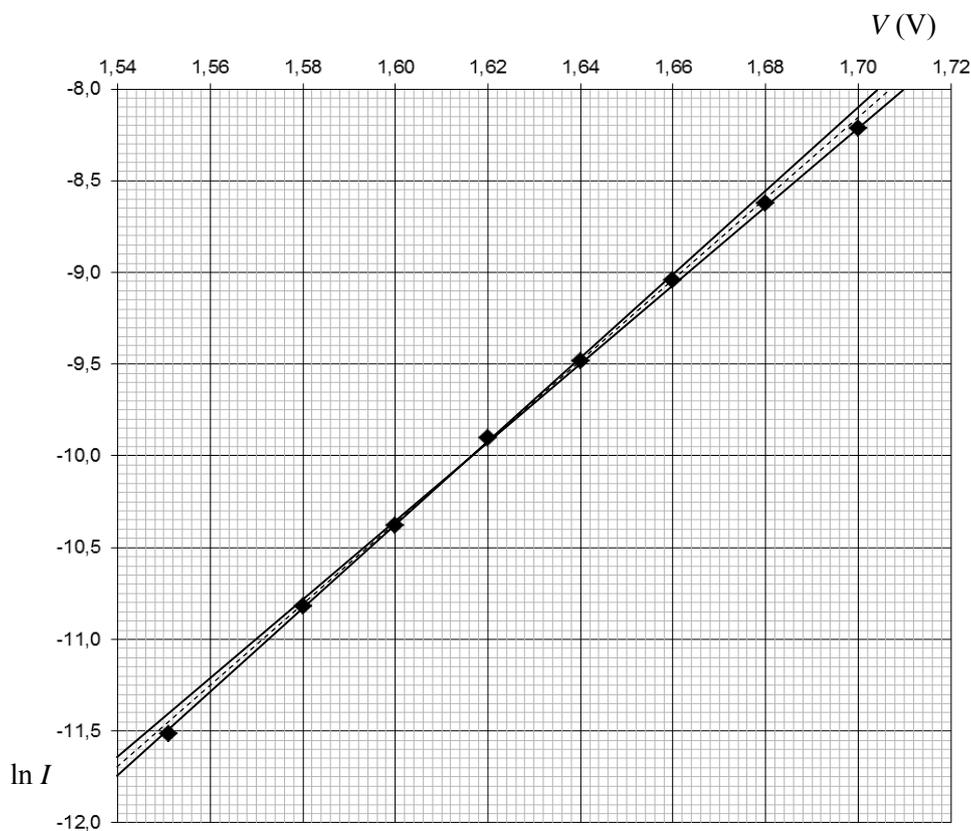
$$p = \frac{-8,25 - (-11,70)}{(1,696 - 1,540)\text{V}} = 22,1 \text{ V}^{-1}$$

Por tanto, el factor de idealidad del LED es

$$\eta = \frac{q}{p k T} \quad (3)$$

$$\boxed{\eta = 1,78}$$

## 2.c) Incertidumbre del factor de idealidad



Las pendientes máxima y mínima pueden estimarse en las rectas de la gráfica anterior, a partir de las coordenadas de sus puntos extremos

$$p_{\min} = \frac{-8,00 - (-11,65)}{(1,710 - 1,540)\text{V}} = 21,47 \text{ V}^{-1}$$

$$p_{\max} = \frac{-8,00 - (-11,75)}{(1,704 - 1,540)\text{V}} = 22,87 \text{ V}^{-1}$$

$$\Delta p = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{2} = 0,7 \text{ V}^{-1}$$

Supuestas  $q$  y  $k$  exactas, las únicas fuentes de error en la determinación del factor de idealidad son las incertidumbres de la pendiente,  $\Delta p$ , y de la temperatura,  $\Delta T$ . Las incertidumbres respectivas transmitidas a  $\Delta \eta$  pueden obtenerse numéricamente o tomando incrementos (en valor absoluto) en la expresión (3)

$$\Delta \eta_p = \frac{q}{kT} \frac{\Delta p}{p^2} = \eta \frac{\Delta p}{p} = 0,056$$

$$\Delta \eta_T = \frac{q}{pk} \frac{\Delta T}{T^2} = \eta \frac{\Delta T}{T} = 0,018$$

La incertidumbre total de  $\eta$  podría estimarse como la suma de las dos anteriores pero, dado que las dos fuentes de error son independientes, es más correcto considerar

$$\Delta \eta = \sqrt{\Delta \eta_p^2 + \Delta \eta_T^2} = 0,059$$

Nótese que el margen de error de la temperatura resulta casi irrelevante en el resultado final.

Redondeando a una única cifra significativa, pues se trata de estimaciones, se obtiene por fin

$$\boxed{\Delta \eta = 0,06}$$

El resultado final del experimento es

$$\eta = 1,78 \pm 0,06$$



**ZTF-FCT**  
Zientzia eta Teknologia Fakultatea  
Facultad de Ciencia y Tecnología



**BFA  
DFB**  
Bizkaiko Foru Aldundia  
Diputación Foral de Bizkaia



**EUSKO JAURLARITZA  
GOBIERNO VASCO**

IKASUNTZA, UNIBERTSITATE  
ETA REKURTZA SAIA  
COMISSIÓ DE EDUCACIÓ,  
UNIBERSITATE E INFORMAZIÓ



## **ANEXO II**

### **Comité organizador de la XXIII Olimpiada Aragonesa de Física**





**FASE ARAGONESA DE LA OLIMPIADA ESPAÑOLA DE FÍSICA  
COMITÉ ORGANIZADOR DE LA XXIII OLIMPIADA (2012)**

**Director:**

D. Juan Pablo Martínez Jiménez

Prof. Titular de Electromagnetismo y Director del Departamento de Física Aplicada de la Universidad de Zaragoza

Armonizador de Física de la Universidad de Zaragoza

**Secretario:**

D. Ángel Alberto Virto Medina

Decano del Colegio Oficial de Físicos en Aragón

**Vocales:**

D. José Tornos Gimeno

Prof. Titular de Óptica del Departamento de Física Aplicada de la Universidad de Zaragoza

D<sup>a</sup>. María Luisa Sarsa Sarsa

Prof<sup>a</sup>. Titular de Física Atómica, Molecular y Nuclear del Departamento de Física Teórica de la Universidad de Zaragoza.

Vicedecana de la Facultad de Ciencias para Relaciones con Empresas

D. José Ramón Blasco Fernández

Catedrático de instituto de Física y Química (jubilado)

D<sup>a</sup>. Esperanza García-Carpintero Romero

Prof<sup>a</sup>. del Departamento de Física y Química. Colegio Jesús María-El Salvador de Zaragoza

D. Jesús Molledo Cea

Catedrático de Física y Química del IES Ramón y Cajal de Zaragoza.

**Representante de la Real Sociedad Española de Física:**

D. Santiago Rodríguez Vallejo

**Representante de la Cátedra José María Savirón de Divulgación Científica**

D. José Alberto Carrión Sanjuán



## **ANEXO III**

### **Estudiantes clasificados en la XXIII Olimpiada Aragonesa de Física**





## FASE ARAGONESA DE LA XXIII OLIMPIADA ESPAÑOLA DE FÍSICA

### ESTUDIANTES CLASIFICADOS ENTRE LOS PUESTOS 1 Y 20 (POR ORDEN ALFABÉTICO)

**Se convoca a estos estudiantes, junto con sus familiares y profesores de Física, al Acto de Entrega de Premios, que tendrá lugar el próximo 9 de marzo, a las 12:00 horas, en el Patio de la Infanta de la Sede Central de Ibercaja.**

ALFARO SARACHO, ÍÑIGO	2º BACH.	COL. JESÚS Mª - EL SALVADOR	ZARAGOZA
ANDRÉS ARROYO, MARTA	2º BACH.	I.E.S. FÉLIX DE AZARA	ZARAGOZA
BARRIOS VALERO, SAMUEL	2º BACH.	I.E.S. FCO. GRANDE COVIÁN	ZARAGOZA
BIELSA PÉREZ, GERMÁN	2º BACH.	I.E.S. PABLO SERRANO (T)	ANDORRA
BLASCO HERNÁNDEZ, PABLO JAVIER	2º BACH.	I.E.S. PABLO SERRANO (T)	ANDORRA
CALLEJA SOLANAS, VIOLETA	2º BACH.	COL. MONTESSORI	ZARAGOZA
CIRIANO LAMBÁN, LAURA	2º BACH.	COL. ESCUELAS PÍAS (BACH.)	ZARAGOZA
GARCÍA CEBOLLADA, HÉCTOR	2º BACH.	COL. ESCUELAS PÍAS (BACH.)	ZARAGOZA
GUERRERO PÉREZ, ALEJANDRO	2º BACH.	I.E.S. FCO. GRANDE COVIÁN	ZARAGOZA
LANASPA FERRER, PABLO	2º BACH.	I.E.S. LUIS BUÑUEL	ZARAGOZA
LOSADA SOSNOVSKY, JUAN MANUEL	2º BACH.	I.E.S. FRANCÉS DE ARANDA	TERUEL
MARTÍN GÓMEZ, JESÚS	2º BACH.	COL. SANTA MARÍA DEL PILAR	ZARAGOZA
MEDEL ALCAINE, DAVID	2º BACH.	I.E.S. PABLO GARGALLO	ZARAGOZA
NAYA FORCANO, ABEL	2º BACH.	I.E.S. MIGUEL CATALÁN	ZARAGOZA
ORERA HERNÁNDEZ, HÉCTOR	2º BACH.	COL. STO. DOMINGO DE SILOS	ZARAGOZA
PÉREZ HEREDIA, ENRIQUE	2º BACH.	COL. LICEO EUROPA	ZARAGOZA
SALDAÑA INDA, IGNACIO	2º BACH.	COL. JESÚS Mª - EL SALVADOR	ZARAGOZA
SANAÚ MARTÍN, JAVIER	2º BACH.	COL. ESCUELAS PÍAS (BACH.)	ZARAGOZA
VINUÉS MARTÍNEZ, MARÍA	2º BACH.	COL. LICEO EUROPA	ZARAGOZA
ZIDOR, FÁTIMA ZAHRA	2º BACH.	I.E.S. ÁNGEL SANZ BRIZ	CASSETAS

## XXIII OLIMPIADA ARAGONESA DE FÍSICA

### ESTUDIANTES CLASIFICADOS EN LOS PUESTOS 1 A 6

1	D. PABLO JAVIER BLASCO HERNÁNDEZ	2º BACH.	I.E.S. PABLO SERRANO (T)	Andorra
2	D. ÍNIGO ALFARO SARACHO	2º BACH.	COL. JESÚS Mª - EL SALVADOR	Zaragoza
3	D. JUAN MANUEL LOSADA SOSNOVSKY	2º BACH.	I.E.S. FRANCÉS DE ARANDA	Teruel
4	D. HÉCTOR GARCÍA CEBOLLADA	2º BACH.	COL. ESCUELAS PÍAS (BACH.)	Zaragoza
5	D. ALEJANDRO GUERRERO PÉREZ	2º BACH.	I.E.S. FCO. GRANDE COVIÁN	Zaragoza
6	D. IGNACIO SALDAÑA INDA	2º BACH.	COL. JESÚS Mª - EL SALVADOR	Zaragoza