Universidad de Huelva

Departamento de Didáctica de las Ciencias y Filosofía

Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato : un estudio de dos casos

Memoria para optar al grado de doctora presentada por:

Leticia Sosa Guerrero

Fecha de lectura: 27 de enero de 2011

Bajo la dirección del doctor:

José Carrillo Yáñez

Huelva, 2011

ISBN: 978-84-15147-53-4
D.L.: H 56 - 2011

Dpto. de Didáctica de las Ciencias y Filosofía

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA EN BACHILLERATO. UN ESTUDIO DE DOS CASOS

Tesis Doctoral

Leticia Sosa Guerrero

Huelva 2010

Universidad de Huelva

Dpto. de Didáctica de las Ciencias y Filosofía

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO PARA LA ENSEÑANZA EN BACHILLERATO. UN ESTUDIO DE DOS CASOS

Tesis doctoral

Realizada por:
Leticia Sosa Guerrero

Dirigida por:
Dr. José Carrillo Yánez

Huelva 2010

AGRADECIMIENTOS

A mi bebé, Lesly Alejandra por apoyarme y entenderme a pesar de lo pequeña que es.

A Martha Alicia Sosa (Licha), a Sara Sosa (Cristy), a Verónica Leticia Martínez (Verito) y a toda mi familia por apoyarme aún y cuando antepuse la tesis y hasta los más pequeños lo supieron entender.

A Diana Zakaryan, a María Teresa Ponce de León, a Emilia Bejarano y a mis dos familias adoptivas Ponce de León y Bejarano Domínguez por su invaluable apoyo y excelente acogida para Alejandra y yo en todo momento, en estas tierras andaluzas.

A las dos profesoras que participan en esta investigación, por su colaboración desinteresada y buena disposición.

A mi asesor, José Carrillo por su dedicación, su gran espíritu de profesionalidad pero sobre todo por su calidad humana, cuya amalgama sella los trabajos que realiza.

A Tim Rowland durante mi estancia en la Universidad de Cambridge y a João Pedro Da Ponte durante la Fifth Yerme Summer School (YESS-5) por sus sabios consejos para la mejora de este trabajo.

A Jose María Cuenca Herreros por su apoyo literario y lingüístico.

A todos mis amigos y amigas de Zacatecas, del Cinvestav (México, D.F,) y de Huelva, por motivarme a seguir adelante.

Al programa de becas Alban (Programa de Becas de Alto Nivel de la Unión Europea para América Latina) y a Conacyt (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología) por su apoyo económico, sin el cual no hubiese sido posible esta investigación.

Thanks!

Dedicado a la memoria de mi Madre y de mi Padre, que tuvieron que marcharse a otra parte del universo durante el desarrollo de esta aventura académica…

ÍNDICE

ÍNDICE DE ANEXOS

CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN

CAPÍTULO I. INTRODUCCIÓN

I.1. Motivación, objeto de estudio y enfoque del trabajo

Para empezar, hay que comentar que esta investigación está inspirada por una motivación personal, social y teórica, donde el objeto de estudio es el conocimiento matemático para la enseñanza (CME) del profesor de bachillerato observado directamente desde la práctica[1]. A continuación intentamos explicitar estas asunciones.

Mi preocupación inicial por la problemática en la educación, en particular por la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, fue engendrada por las anécdotas vividas como profesora de Matemáticas en nivel medio superior, superior y postgrado, donde, a pesar de que se tratase de niveles escolares distintos, apreciaba patrones de problemáticas educativas muy parecidos. Tras reflexionar sobre la compleja problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas (Farfán y Cantoral, 2003), decidí estudiar la maestría (Máster) en Matemática Educativa en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (Cinvestav-IPN) en México D.F. Allí me di cuenta de que la problemática en carácter educativo es mucho más amplia de lo que yo había pensado, lo que acrecentó aún más mi interés por seguir estudiando y preparándome. Dado el amplísimo abanico de líneas de investigación existente, decidí que era necesario especializarme en un área de investigación en concreto.

Al realizar la maestría en el Cinvestav-IPN disfruté la oportunidad de ser invitada a un proyecto de investigación en la línea de formación de profesores (FP), en el cual está inscrita mi tesis de maestría (máster) sobre concepciones y creencias del profesor de bachillerato referidas a la naturaleza de las matemáticas, de su enseñanza y de su aprendizaje (Sosa, 2006). Cabe mencionar que en dicha tesis fue fundamental el marco teórico y los instrumentos de análisis de concepciones del profesorado desarrollado en la UHU (Carrillo, 1996; 1998; Contreras, 1998; 1999), lo que me motivó a realizar mi tesis doctoral en la UHU.

---

[1] Coincidimos con Ball (2000) en el sentido de que la práctica de los profesores es el punto de partida para cualquier propuesta formativa que pretenda incidir sobre su conocimiento profesional.

Además, al terminar la tesis de maestría, comprendí que el tema abordado en ésta, está relacionado con muchas temáticas; entre ellas, la del desarrollo profesional del profesor, y en particular, el conocimiento profesional del profesor. Eso fomentó mi interés por continuar investigando en la línea de FP y en nivel bachillerato (Cantoral, 1989; Farfán y Sosa, 2005; 2006; 2007). Me centré en el nivel bachillerato porque es el nivel educativo en el que hasta ahora más me he desempeñado como profesora y porque los profesores que participaron en esa tesis de maestría, con sus comentarios, me permitieron reforzar mi reflexión por continuar investigando, teniendo siempre en mente las necesidades de los profesores, de elaborar un estudio susceptible de ser aprovechado para refinar la práctica docente, de modo que se aportara un granito de arena para mejorar la enseñanza y aprendizaje de la matemática en ese nivel educativo, pensando en todo momento en ese gremio aún tan abandonado como es el profesorado de nivel bachillerato – por supuesto, agradezco la confianza y esperanza en mí de aquellos profesores.

Debido al conjunto de todas las razones que acabo de exponer, decidí perfilarme en la línea de FP ya que, además, en mi centro de trabajo (Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas, México), una de mis labores consiste en formar a profesores de bachillerato en la Maestría en Matemática Educativa ofertada por esta universidad, a la cual acuden algunas autoridades educativas así como profesores de bachillerato, preocupados por mejorar el quehacer docente en Matemáticas.

Coincidiendo con Elbaz (1983) en que *"existen pocas oportunidades para que los profesores puedan reflexionar y tratar de articular sus experiencias de una manera organizada"* (p.11), hay que mencionar que en México y España es notoria la ausencia de una institución encargada de la formación inicial y continua de profesores de matemáticas de bachillerato. Los cursos de capacitación y actualización que ofrecen algunas escuelas o instituciones a sus profesores en ambos países son, a lo más, cursos cortos que la mayoría de las veces son puntuales más que continuos.

En la actualidad, existen varios espacios para la formación de profesores que se ofertan a profesores de matemáticas de bachillerato en servicio (propuestos por alguna institución o por el propio centro donde labora el profesor); sin embargo, es notoria la ausencia de un organismo, institución o colegiado que vigile o tenga la encomienda de reglar u ordenar la consistencia de la secuenciación y del seguimiento de esa secuencia de los temas y cursos ofrecidos para su formación. Por tanto, no es descabellado admitir la escasez de propuestas formativas diseñadas primordialmente o esencialmente para ese gremio de profesores.

Además de esa escasez de propuestas formativas, podemos hablar de que, cuando en el mejor caso la persona encargada de enseñar los cursos de formación para profesores de matemáticas de bachillerato tiene la intención de organizar una propuesta formativa consistente, sucede que se encuentra con el problema de que es notoria también, dentro de la literatura *ad hoc*, la ausencia de un modelo teórico que describa específicamente el CME en bachillerato, que dé cuenta del CME que pone en acción el profesor al enseñar matemáticas en bachillerato.

Partimos de la premisa de que el profesor es un elemento central en el sistema escolar afectado por distintos factores socioculturales (Mingüer, 2006; Lezama y Mariscal, 2008). Consideramos al profesor de matemáticas de bachillerato como un profesional cuya profesionalidad es caracterizada, en gran medida, por su conocimiento profesional. Asumimos que uno de los principales elementos que componen el conocimiento profesional del profesor es el CME integrado a su vez por distintos subdominios, y es precisamente el CME del profesor de matemáticas de bachillerato el que constituye nuestro objeto de estudio.

Cabe mencionar que, al contrario de lo que creen algunos centros de capacitación, profesores e instituciones, el profesor no es una caja negra donde, con tan sólo introducir algunos que otros cursos inconexos sobre asuntos dispares, el docente va a solucionar sus problemas en la práctica escolar, pues se requiere de todo un proceso continuo para que el profesor reflexione, se capacite y mejore su práctica docente; es decir, no va a cambiar sólo con asistir a un curso, porque simplemente nadie cambia de la noche a la mañana. Hay que remarcar que la práctica docente es una profesión donde el mismo profesor debe ser científico e ir construyendo el objeto a enseñar; por tanto, es muy importante la formación del profesor dado que, por mucho que en la mejora de la calidad del proceso de enseñanza-aprendizaje intervengan varios factores, se requiere imprescindiblemente la calidad de su profesorado (Sosa, 2006).

I.2. Problema, pregunta y objetivos de investigación

Es a través de esas motivaciones (personal, social y teórica) y con esas bases ideológicas hacia el profesor, que identificamos el problema de investigación que consiste en la comprensión del CME que el profesor de bachillerato pone en acción en su práctica diaria. Consideramos que estudiar este problema de investigación constituye un primer acercamiento a una necesidad social y que podemos contribuir aportando elementos para el modelo teórico del CME del profesor de bachillerato.

Ante ese problema de investigación, la pregunta de investigación es: ¿qué subdominos del CME evidencia en la práctica un profesor que enseña matemáticas en bachillerato? Nos interesa saber qué subdominos del CME pone en acción el profesor al enseñar matemáticas.

Los objetivos que nos hemos fijado para contestar esa pregunta son:

Objetivo general:
Identificar y profundizar en la comprensión de los distintos subdominios del CME que el profesor de bachillerato pone en acción.

Objetivos particulares:

- Conocer y comprender el conocimiento del contenido matemático del profesor de bachillerato.
- Conocer y comprender el conocimiento didáctico del contenido del profesor de bachillerato.

A partir de estos objetivos, en concordancia con Miles y Huberman (1994) en cuanto a que las preguntas de investigación representan las fases de una influencia empírica que el investigador desea indagar de forma más profunda, intentamos contestar a la pregunta de investigación proporcionando una matización del CME en bachillerato que dé cuenta de la especificidad de los subdominos del CME que el profesor de bachillerato activa al enseñar matemáticas. Consideramos que esa es una de las mayores aportaciones de nuestra investigación, pues actualmente, como comenta Godino (2009), una de las limitaciones de los modelos teóricos del CME es que dichos modelos incluyen categorías muy generales.

I.3. Contextualización de la investigación

La investigación se desarrolla con dos profesoras del último año de bachillerato, Emi y Aly, de distintos Institutos de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato en la ciudad de Huelva, España. Emi cuenta con una experiencia de 21 años al momento de iniciar este estudio e imparte el curso de matemáticas a estudiantes de la especialidad de Ciencias Sociales. Aly, por su parte, acumula 13 años de experiencia e imparte el curso de matemáticas a un grupo de la especialidad de Científico Tecnológico. Ambas cuentan con una licenciatura en Matemáticas y son reconocidas como excelentes profesionales por sus pares, por sus estudiantes y por autoridades de su institución. Tanto la una como la otra tienen que afrontar la diversidad de su alumnado, de una edad de 17 o 18 años y que en líneas generales presenta grandes diferencias en cuanto a nivel socio-cultural y manifiesta dificultades de aprendizaje. Todas estas dificultades se aprecian fácilmente en problemas como: bajo nivel de hábito de estudio y lector; nivel bajo-medio en comprensión y razonamiento; falta de motivación, superación y autoestima y abandono de los estudios a edades tempranas. La colaboración de las familias con el instituto se puede estimar en general como baja. Este contexto es donde las profesoras desempeñan su labor, y también constituye el escenario de esta investigación.

Es a la luz de ese panorama y con las ideologías expuestas en los apartado anteriores como nace esta tesis en septiembre de 2008. A continuación mencionamos la estructura en la que presentamos este trabajo.

I.4. Estructura del trabajo

El presente trabajo se encuentra estructurado en seis capítulos. En el presente capítulo comentamos las motivaciones que encarnan esta investigación (personal, social y teórica), el objeto de estudio y el enfoque del trabajo. Luego abordamos el problema, la pregunta y los objetivos de investigación, así como la contextualización de la investigación y la estructura del trabajo.

El segundo capítulo es el Marco Teórico, en el que presentamos las bases teóricas que consideramos indispensables para desarrollar la investigación. En él se encuentra inmersa la lente a partir de la cual miramos, analizamos y conjeturamos acerca del problema, la pregunta y los objetivos de la investigación, es decir, el modelo teórico del CME propuesto por Ball, Thames y Phelps (2008). Este capítulo está dividido en dos apartados, en el primero nos enfocamos en ver al profesor como profesional poseedor de un conocimiento profesional en el cual el CME juega un papel primordial. En el segundo apartado explicitamos lo que entendemos por conocimiento profesional y distintas caracterizaciones sobre la naturaleza del conocimiento profesional. Además, en ese mismo apartado, presentamos tres grandes pilares en los estudios sobre el conocimiento profesional enfocado al conocimiento del contenido para la enseñanza: Elbaz, 1983; Schön, 1983; y Shulman 1986; y posteriormente tres posturas más centradas en el área de matemáticas: Davis y Simmt, 2006; Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005; y Ball, Thames y Phelps, 2008.

El tercer capítulo consiste en el marco metodológico, constituido por la pregunta y los objetivos de investigación, los fundamentos, selección del paradigma y nuestra perspectiva ontológica, epistemológica y metodológica. A la luz de esos fundamentos, abordamos después el diseño metodológico, explicando el método (estudio de dos casos) y las técnicas que utilizamos para obtener la información cualitativa (instrumentos y proceso de recogida de la información, conversión de la información recogida en datos, así como los instrumentos de análisis de la información). Terminamos este capítulo haciendo mención a nuestro acercamiento a la triangulación de las fuentes de datos y nuestras consideraciones sobre el rigor de la investigación.

En el cuarto capítulo mencionamos el análisis de las clases grabadas en vídeo y el análisis de los cuestionarios, entrevistas y notas de campo a través de dos apartados. En el primer apartado comentamos los cinco acercamientos al análisis de las clases grabadas en video (éstas fueron nuestra fuente principal para el análisis de la información); en cada uno de los cuales explicamos cada acercamiento efectuado al análisis. Tomamos en cuenta cinco acercamientos para el análisis de la información porque pensamos que es necesario revisar, comprobar y validar constantemente lo que se va obteniendo de dicho análisis; y también para refinar y pulir continuamente los distintos acercamientos para contrastar, examinar y convalidar la información analizada. Defendemos que en esta clase de estudios (cualitativos) es fundamental exigirnos rigor en el análisis de la información para robustecer la confiabilidad de los resultados de la investigación. En este capítulo, por último, en el segundo apartado expresamos las consideraciones al análisis de las fuentes secundarias de información: los cuestionarios, entrevistas y notas de campo.

El quinto capítulo está constituido por los resultados de la investigación atendiendo a los objetivos de la investigación y la discusión sobre éstos. En el apartado de resultados presentamos los subdominios del CME evidenciados en la práctica de las profesoras Emi y Aly. Para ello organizamos la presentación cronológica de los subdescriptores identificados en cada subdominio del conocimiento matemático para la enseñanza (CME) por subtema; primero, para el caso de Emi, y luego para el caso de Aly. Posteriormente, mostramos un agrupamiento de los subdescriptores en descriptores, ubicados en cada subdominio del CME por subtema, tanto para el caso de Emi como para el de Aly. Seguidamente, de manera más resumida, exhibimos un concentrado de los descriptores de cada subdominio del CME por subtema, para el caso de Emi y posteriormente para el caso de Aly. Ante estos resultados, explicamos cada caso (Emi y Aly). Además, hacemos una comparación de los dos casos (comparación de los descriptores del CME evidenciados en la profesora Emi y en la profesora Aly). En el apartado referente a Discusión, presentamos varios descriptores o indicadores que dan luz a la especificidad de los distintos subdominios del CME en bachillerato.

Finalmente, en el sexto capítulo mostramos las conclusiones referentes a los descriptores de los subdominios del CME del profesor de bachillerato respecto a la formación de profesores, así como las aportaciones de la investigación, las limitaciones del estudio y nuestra perspectiva hacia futuras investigaciones.

CAPÍTULO II. MARCO TEÓRICO

II.1. El profesor como profesional

II.2. Conocimiento profesional del profesor

II.2.1. Naturaleza del conocimiento profesional

II.2.2. Conocimiento del contenido para la enseñanza

II.2.3. Conocimiento matemático para la enseñanza

II.1. El profesor como profesional[1]

> *"La cuestión planteada es ¿pueden ser profesionales los profesores?, ahora podemos contestar: ¡Definitivamente SÍ! Sin embargo, para ello se requiere tiempo y considerables recursos. Además, se hace necesario el esfuerzo concertado y el compromiso de un amplio número de personas para hacerlo realidad en las décadas próximas".* (Romberg, 1988, citado en Flores, 1998, p.38).

En la sociedad se considera que la tarea de ser profesor es fácil, como lo expresa Corbalán (2000), explicando que los padres de familia piensan que si los profesores dominan la asignatura y sus hijos tienen el cerebro dispuesto a aprender, entonces todo debería ir bien y si no es así, la culpa tendría que ser de parte de los profesores, en particular, de los profesores de las materias problemáticas para sus hijos.

Pero
"Cuando hablamos del profesor nos estamos refiriendo a alguien que se sumerge en el complejo mundo del aula para comprenderla de forma crítica y vital, implicándose afectiva y cognitivamente en los intercambios inciertos, analizando los mensajes y redes de interacción, cuestionando sus propias creencias y planteamientos, proponiendo y experimentando alternativas y participando en la reconstrucción permanente de la realidad escolar". (Schön, 1992, citado en Lucero y Chiarani, 2004, p.1)

No obstante, actualmente podemos observar que se subestima muchas de las veces el proceso de enseñanza-aprendizaje, sin tomar en cuenta que el proceso no es sencillo porque en él se combinan diversos factores complejos (sociales, culturales, científicos, cognitivos, individuales, grupales, afectivos, contextuales, institucionales, económicos, etc.). Asumimos que para enseñar matemáticas, saber el contenido es una condición necesaria para explicarlas pero no es una condición suficiente, pues existen casos en los

---

[1] Profesional en concordancia con la definición aportada por la Real Academia de la Lengua Española (RAE). Profesional: "*Persona que ejerce su profesión con relevante capacidad y aplicación*". (RAE).

que el profesor cuenta con un buen dominio de la matemática pero no es capaz de desarrollar un proceso adecuado de enseñanza.

De hecho, en el Informe Cockcroft (1985) en su punto 228 y 229, se enuncia que la matemática es difícil de enseñar y difícil de aprender y que es una asignatura que obliga a trabajar y a practicar mucho, independientemente del nivel de conocimiento que se tenga.

En general, "*enseñar es un oficio difícil, tal vez despiadado, pues no podemos dar a nuestros alumnos lo que nosotros no somos*" (Servais, 1980, p.79). Hoy por hoy, socialmente el profesor es visto como el encargado principal de enseñar y por ende, es él quien ha de afrontar profesionalmente las tareas que su labor conlleva, para lo cual ha de poseer un conocimiento profesional, pues una de las características de los profesionales es disponer de un conocimiento profesional. Un conocimiento de cuyo valor en ocasiones el propio profesor no es consciente. En cuanto a este particular coincidimos con la siguiente formulación que Elbaz (1983) hace en su investigación:

"*La visión del conocimiento como "empírico" y "analítico", que prevalece en el pensamiento educativo, tiende a un valor relativamente bajo en el conocimiento experiencial, y por lo tanto los mismos docentes pueden no ser conscientes del valor de sus propios conocimientos. Ciertamente hay poco estímulo para que los profesores se vean a sí mismos como creadores de conocimiento*" (p.11)

Nosotros coincidimos también con Elbaz en que existe poco estímulo para que los profesores se vean a sí mismos como creadores de conocimiento. Ese es otro tema muy importante pero que por ahora no abordaremos.

Por el momento, lo que queremos destacar es el papel del profesor como un profesional, poseedor y productor de conocimiento profesional. A ese respecto, Park y Oliver[2] (2008) distinguen los siguientes principios para entender a los profesores como profesionales, basándose en su investigación y apoyándose en otras referencias, ellos

[2] Cabe mencionar que Park y Oliver (2008) hacen un estudio específicamente del conocimiento didáctico del contenido (CDC) con profesores que imparten la clase de Química en nivel secundaria (high school).

miran al conocimiento didáctico del contenido (CDC)[3] como una herramienta conceptual para comprender dicho profesionalismo:

1. Los profesores son productores de conocimiento, no receptores de conocimiento. Para Park y Oliver esta característica es esencial para ver a los profesores como profesionales.

2. La idiosincrasia caracterizada por la autonomía y las habilidades de los profesores en relación con el acceso y la generación de información y conocimiento, también es un atributo clave de los docentes como profesionales (Donnelly 2001).

3. Al desarrollar el CDC, los profesores llegan a crear teorías personales y explicaciones basadas en ellos y luego esas teorías informan las decisiones y acciones de los profesores en la enseñanza. El profesional desarrolla teorías de acción por las cuales se practica la profesión (Argyris y Shön 1974), este aspecto del CDC también contribuye a la profesionalidad de los docentes.

Para Park y Oliver el CDC es el corazón del profesionalismo del profesor. En esta investigación asumimos que el **conocimiento matemático para la enseñanza** (del cual el CDC representa uno de los dos dominios a considerar[4]), es un elemento clave en el conocimiento profesional del profesor y en la profesionalización en sí del profesor para desarrollar su actividad.

Seguidamente comentamos lo que entendemos por conocimiento profesional del profesor.

---

[3] El término original del CDC es Pedagogical Content Knowledge, conocido también por sus siglas en inglés: PCK. En castellano algunos investigadores lo llaman conocimiento pedagógico del contenido y otros, conocimiento didáctico del contenido. Nosotros usaremos este último porque consideramos que expresa más su especificidad en cuanto a la asignatura. Más adelante hablaremos más extensamente del CDC.

[4] Los dos dominios a los que nos referimos son: Conocimiento del Contenido y Conocimiento Didáctico del Contenido de los cuales hablaremos más adelante cuando expongamos el modelo de Ball et al. (2008).

II.2. Conocimiento profesional del profesor

El conocimiento profesional necesario en cada profesión es un conocimiento muy específico de ésta. El conocimiento profesional se refiere al cuerpo de conocimiento y habilidades que son necesarios para funcionar con éxito en una profesión particular (Tamir, 1991). Para Compagnucci y Cardós (2007) el conocimiento profesional del profesor es una categoría que involucra el saber teórico y práctico del docente, es un sistema complejo que se va constituyendo en función de saberes, creencias, destrezas, habilidades y capacidades.

Aunado a lo anterior, en este estudio asumimos que el conocimiento profesional del profesor consiste en la conjunción de todos los saberes y experiencias que éste posee y de los que hace uso en el desarrollo de su trabajo docente, conocimiento que se va adquiriendo y construyendo desde su formación inicial y continua durante toda su carrera (Climent, 2005).

Una vez mencionado lo que entenderemos por conocimiento profesional en esta investigación, queremos comentar también que en las investigaciones sobre conocimiento profesional los investigadores han ido asignando algunas características a éste. A continuación pretendemos presentar los aspectos más relevantes a este respecto.

II.2.1. Naturaleza del conocimiento profesional

Climent (2005) destaca como principales características otorgadas por distintos investigadores al conocimiento profesional las siguientes: *situado y contextualizado; social e individual; personal; dinámico, integrado y complejo; parcialmente tácito; y práctico.* Enseguida las comentamos de forma sintetizada.

El conocimiento profesional está ligado al *contexto* de la profesión que se ejerce tanto en su génesis como en su conservación y desarrollo. Como sostiene Llinares (1994), se trata de un conocimiento *situado* que surge de la actividad, del contexto y de la cultura en que es empleado. En cuanto a los estudiantes que se preparan para trabajar como docentes, les corresponde modificar y ampliar dichos conocimientos como consecuencia de utilizarlos en actividades contextualizadas. En esta misma línea, autores como Matos

(2000) defienden que el aprendizaje y el conocimiento del profesor constituyen procesos compartidos socialmente por una comunidad más que procesos individuales. Greeno (1997) (citado en Carillo 2000), incide en un enfoque similar, en el que la identidad del profesor en tanto que aprendiz se enmarca en una actividad social. Asimismo el conocimiento es *social e individual*, tal como subraya Ponte (1994) todo nuestro conocimiento, creencias y concepciones tienen raíces sociales en nuestra actividad y se nutren de nuestra experiencia, pero existe también un margen para que el profesor mejore su conocimiento a través de la reflexión consciente. Aunque el conocimiento profesional *personal* (de cada profesor) sea idiosincrásico, distinto respecto al del resto de sus colegas, ello no es impedimento para que pueda comunicarse al resto de compañeros de profesión, ni implica que esté aislado de la sociedad y las circunstancias en las que vive el individuo (Clandinin y Conelly, 1988).

Otro aspecto insoslayable, estudiado tanto por Elbaz (1983) como por Fennema y Franke (1992), lo constituye la naturaleza *dinámica, integrada y compleja* del conocimiento profesional del docente, en tanto que supone un proceso de cambio continuo en el que se van integrando diversos saberes y habilidades interdependientes. Schön (1983, 1987), Calderhead (1988), Leinhardt et al. (1985, 1986, 1991), y Porlán y Rivero (1998) hacen hincapié en una característica complementaria a lo anterior, el carácter *parcialmente tácito* del conocimiento. Shön (1983, 1987) hace notar que el conocimiento profesional es tácito y parte de ese conocimiento es un *saber desde la acción*, en cuanto que los profesores rara vez son capaces de describir con detalle el saber que se plasma de manera espontánea en su actividad docente, quizás porque no son conscientes de ese saber. Es un saber que se desarrolla a través de la experiencia y es la reflexión el medio mediante el cual se puede llegar a convertir el *saber desde la acción* en *conocimiento desde la acción*. Hay que añadir a lo anterior que la reflexión puede ayudar a impedir el sobre-aprendizaje, es decir, la pérdida de la capacidad de sorpresa por la gran compilación de casos, expectativas, imágenes y técnicas del profesional que hacen que su saber tácito sea más espontáneo, lo cual le lleva a perder oportunidades de pensar sobre lo que se hace y por ello pasar por lo alto el valor de experiencias novedosas para extraer nuevos conocimientos y habilidades.

Otro rasgo fundamental del conocimiento profesional del docente consiste en que es un saber eminentemente *práctico*. García (1997) expresa que las investigaciones de Elbaz

(1983) o Schön (1983) representan dos referentes en estudios que reconocen que los profesores poseen un conocimiento fruto de su formación y experiencia. Dicho conocimiento amalgama componentes muy diversos, algunos de los cuales permanecen latentes la mayor parte del tiempo, y que, por mucho que integren aportaciones externas, se van construyendo principalmente a través del proceso de enseñanza.

Clandinin y Conelly (1988) destacan la noción de *imágenes* del profesor, que se refiere al modo en que la experiencia docente da lugar a una suma de recursos para enfrentarse a situaciones prácticas, las cuales, a su vez, van enriqueciendo el conjunto de imágenes del profesional de la enseñanza. No obstante, esto no excluye en absoluto la necesidad de fundamentar las habilidades prácticas en una teoría, y viceversa, lo que lleva a Carrillo (1999) y a Ponte (1994) a rechazar que la práctica docente por sí sola baste para formar aprendizajes en el profesor si está ausente un análisis de la praxis educativa, de tal modo que ha de establecerse una retroalimentación entre teoría y práctica. A este mismo respecto, Azcárate (1999), en la línea de Rusell (1994), propone un plano epistemológico intermedio entre el conocimiento académico (teórico) y el puramente experiencial (práctico) y defiende que el conocimiento profesional es un saber de naturaleza práctica que se caracteriza por la elaboración de *teorías prácticas* que son las que orientan y dirigen su acción.

Se han ideado varios modelos para plasmar el aspecto práctico del conocimiento profesional, por ejemplo el de Elbaz (1983) y el de Leinhard y sus colegas (1985, 1986, 1991). Elbaz (1983) distingue entre reglas de la práctica (hábitos en la labor docente sobre qué hacer en situaciones prácticas habituales), principios prácticos (relacionados con los propósitos y la dimensión personal de la práctica) e imágenes (modelos ideales sobre cómo debería ser la enseñanza). Leinhardt y sus colaboradores acuñan tres tipos de esquemas en relación con el conocimiento de la estructura de la lección, ellos los denominan con los términos rutinas (tácticas o procesos particulares), agendas (estructura global de la sesión) y scripts (objetivos).

En nuestro estudio, podríamos decir que el conocimiento profesional es situado si entendemos situado en cuanto a la localización del objeto de estudio en el espacio y el tiempo, pero no así si consideramos el calificativo de situado a partir de la perspectiva del aprendizaje situado (en la línea de Lave y Wenger, 1991), en el que se enfatiza el carácter social del aprendizaje, pues en nuestra investigación se ha primado el carácter individual del conocimiento profesional sobre su componente social cuando identificamos y analizamos el conocimiento matemático para la enseñanza en dos estudios de caso; sin embargo, es contextualizado por ser un conocimiento que se evidencia en un contexto concreto (eg. en un aula y con unos estudiantes específicos). En cada estudio de caso tomamos en cuenta el conocimiento personal de cada una de las profesoras, lo cual implica un conocimiento idiosincrático en cada caso. Sabemos que el conocimiento profesional del profesor es dinámico, integral y complejo, y en nuestro estudio asumimos que es dinámico y complejo, sin embargo, desde el propio marco de referencia que tomamos en nuestra investigación, es decir, el modelo del conocimiento matemático para la enseñanza (CME) propuesto por Ball et al. (2008), es un modelo en el que a pesar de que se supone que en la práctica los dominios y subdominios del CME se presenten de manera integrada, el propio modelo sugiere hacer un esfuerzo para descomprimir esos subdominios, con la finalidad de comprender y obtener mayor información relativa al CME de los profesores mientras estos se encuentran inmersos en su propia práctica (Ball, 2000, 2002; Ball y Bass, 2003; Ball et al. 2008). De esta forma, el propio modelo del CME de Ball y sus colaboradores, al ser un modelo que proviene del estudio y análisis directamente de la práctica de los profesores, hace explícita su naturaleza práctica, naturaleza tal que coincide con nuestro estudio. Aunado a lo anterior, asumimos que el CME de las dos profesoras que participan en nuestra investigación es parcialmente tácito debido a que muchas de las veces las dos profesoras no son conscientes de ese saber.

Por otro lado, queremos expresar que en la literatura referente al conocimiento profesional del profesor existen varias investigaciones realizadas desde distintas perspectivas, de las cuales podemos hablar de dos parcelas: Conocimiento del contenido para la enseñanza y Conocimiento matemático para la enseñanza. A continuación exponemos algunos aspectos de éstas, que ayudan a constituir el marco teórico de esta investigación.

II.2.2. Conocimiento del contenido para la enseñanza

Las investigaciones sobre el conocimiento del profesor y la enseñanza han sido realizadas bajo distintos marcos de referencia, entre los más notables podemos comentar los de Elbaz (1983), Schön (1983) y Shulman (1986), los cuales influenciaron la dirección de la investigación sobre profesores (Ponte y Chapman, 2006).

Para Clandinin (1986) la investigación de Elbaz (1983)

… acerca del conocimiento práctico abre una vía a través de la cual observar este conocimiento como experiencial, encarnado y fundamentado en la narración de la experiencia. (Clandinin, 1986, p.19).

Elbaz (1983) propone la conceptualización del *"conocimiento práctico"* del profesor. Se centra en el estudio del conocimiento práctico (construido a lo largo de la práctica) de una profesora y en saber cómo es poseído y utilizado tal conocimiento. Elbaz organiza el *conocimiento práctico* a través de cinco categorías: *conocimiento de sí mismo, del entorno, de la asignatura, del currículo y del proceso de enseñanza*.

A continuación presentamos de forma sucinta algunos aspectos relevantes a las cinco categorías.

Para Elbaz (1983) el conocimiento que de *sí mismo* tiene el profesor se refiere al conjunto de valores, propósitos y creencias personales que informan de su conocimiento (eg. conocer sus potenciales y limitaciones con respecto a sus colegas y alumnos). En cuanto al conocimiento del *entorno*, consiste en el conocimiento del medio en el que se desarrolla su trabajo (eg. en una visión interactiva de la clase, la relación con sus compañeros de trabajo, etc.). Respecto al conocimiento de la *asignatura* que imparte, se refiere al conjunto de conocimientos y destrezas que debe enseñar (eg. la colección de técnicas específicas y rutinas para la enseñanza). Asimismo, el conocimiento del *currículo* es referido al conocimiento de su implementación y desarrollo (eg. la planificación para orientar el aprendizaje). Finalmente, el conocimiento del *proceso de enseñanza* representa el estilo de enseñanza (eg. los métodos para organizar y desarrollar el proceso de enseñanza).

Con lo anterior, podemos concluir que el *conocimiento práctico* es un conocimiento respecto al contenido y proceso de enseñanza, pero también respecto a espacios, creencias, relaciones, situaciones y posiciones personales ante lo que ocurre dentro y fuera del aula.

Por su parte, Shön (1983) considera que la reflexión es característica de una buena práctica y en su estudio sobre la formación de profesionales reflexivos diferencia dos tipos de reflexión que pueden ocurrir y que determinan el conocimiento profesional del profesor: reflexión en la acción y reflexión sobre la acción.

La reflexión en la acción es un proceso de comunicación continuo a partir del cual se va formando una teoría, se emprende una búsqueda de especificaciones adaptadas a la situación, se definen de manera interactiva los medios y los fines, además de redefinir y evaluar continuamente los procedimientos (Yinger, 1986). Dicho de otra forma, la reflexión en la acción es el proceso mediante el cual los profesores hacen explícito el conocimiento en la acción, significa detenerse a pensar durante la propia acción acerca de las razones por las que actuamos y las consecuencias de esa actuación. La reflexión tiene lugar en un intervalo de tiempo que varía según el contexto de cada situación, de tal modo que esa circunstancia nos permite reorganizar nuestra labor mientras la llevamos a cabo (Schön, 1983).

La reflexión sobre la acción se refiere a la reflexión que realiza el profesor en un momento posterior a la clase, en un contexto más tranquilo en el que el profesor está liberado de las urgencias de las decisiones interactivas. Se trata de una reflexión que podría influenciar los acontecimientos futuros en su actuar en el aula. Schön (1983) define este proceso como el análisis que efectúa una persona *a posteriori* sobre las características y los procesos de las acciones que ha realizado, y considera que este tipo de reflexión es un componente esencial del proceso de aprendizaje permanente por parte del profesor, quien a su vez elabora un diseño flexible de enfoque progresivo que experimenta y reconduce de forma continua en su interacción con la situación como resultado de esta reflexión.

El profesor reflexivo confronta los esquemas teóricos y sus creencias implícitas, enfrentándose a una situación de enseñanza, lo cual le permite analizar lo que hace y modificar sus decisiones de manera consciente sobre la marcha.

Por otro lado, el trabajo de Lee Shulman y compañeros (Shulman, 1986, 1987; Wilson, Shulman y Richert, 1987) es considerado como un marco de referencia importante y a partir del cual emergieron gran parte de las ideas y teorías relacionadas con el conocimiento profesional. Inclusive el trabajo de Shulman (1986) se reconoce como pionero en llamar la atención sobre el carácter específico del conocimiento del contenido para la enseñanza y su propuesta ha jugado un papel importante en el desarrollo de investigaciones e implementaciones curriculares para la formación de profesores.

Shulman y sus colaboradores defienden en sus trabajos que el conocimiento profesional se divide en siete componentes: conocimiento del contenido, conocimiento didáctico del contenido, conocimiento de los alumnos y sus características, conocimiento de los contextos educativos (eg. comunidad y cultura), conocimiento de las necesidades educativas (fines, propósitos y valores de la educación), conocimiento curricular y conocimiento didáctico general. A pesar de dividir el conocimiento profesional en estas siete componentes, Shulman (1986) considera que los tres componentes fundamentales y que sostienen la especificidad de cada materia a enseñar son, particularmente: 1) C*onocimiento del contenido*, 2) *conocimiento didáctico del contenido* y 3) *conocimiento curricular*.

1) *Conocimiento del contenido (Subject matter)*: Se refiere a la cantidad y organización de conocimiento de contenido en la mente del profesor. El profesor debe entender lo que está enseñando y el porqué del contenido a enseñar. Shulman (1986) expresa que para Schwab (1978) existen dos tipos de estructuras del conocimiento del contenido: estructura sustantiva y estructura sintáctica. La estructura sustantiva incluye la comprensión acerca de las distintas formas en las cuales los conceptos básicos y principios son organizados para incorporar sus hechos. La estructura sintáctica consiste del conjunto de formas en las cuales la verdad o falsedad, validez o invalidez, son establecidas.

2) *Conocimiento didáctico del contenido* (CDC): Es el conocimiento que va más allá del conocimiento del contenido, es el conocimiento de contenido que incorpora los aspectos más relacionados a su enseñanza. Incluye *"… las formas más útiles de representación de esas ideas, las analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones más adecuadas – en una palabra, las formas de representar y formular el contenido para hacerlo comprensible para otros."* (Shulman, 1986, p.9).

Además Shulman señala que el CDC "*incluye también la comprensión de lo que hace el aprendizaje de temas específicos fácil o difícil: las concepciones y preconcepciones que los estudiantes de diferentes edades y procedencias traen para el aprendizaje de los temas y lecciones frecuentemente más enseñadas*" (p. 9)

Cabe mencionar que, como sostienen Ponte y Chapman (2006), Shulman hizo hincapié en el CDC como un aspecto clave para abordar en el estudio de la enseñanza, y es precisamente el CDC el dominio que ha sido durante casi dos décadas el foco de atención en muchas investigaciones acerca del conocimiento profesional del profesor (eg. Even y Markovits (1991); Klein y Tirosh (1997); Rossouw y Smith (1998)). Ponte y Chapman destacan también que el énfasis de la comunidad de investigadores fue puesto sobre la categoría "conocimiento didáctico del contenido", la cual en su momento presentó un avance importante en las concepciones sobre el conocimiento del profesor.

Actualmente los tres dominios identificados por Shulman siguen vigentes, aun y cuando las interpretaciones iniciales dadas a las mismas se han ido modificando. Philipp (2007) (citado en Godino 2009, p.17) expresa que algunas de las cuestiones sobre las cuales se continúa trabajando respecto al CDC son referidas a: 1) El papel de las creencias, afectos y valores en el desarrollo del CDC del profesor; 2) determinar si los componentes del CDC son dependientes de los paradigmas de enseñanza-aprendizaje asumidos; 3) mejora de los métodos para evaluar el CDC y nociones relacionadas; 4) elaboración de nociones más globales que incluyan conocimientos, creencias y afectos, tales como orientación, perspectiva e identidad del profesor.

3) *Conocimiento Curricular,* está *"representado por el conjunto de programas diseñados para la enseñanza de temas específicos y temas a un nivel determinado, la variedad de materiales educativos disponibles en relación con los programas, y el conjunto de características que sirven tanto como las indicaciones y contraindicaciones para la el uso del plan de estudios particulares o los materiales del programa en determinadas circunstancias"* (Shulman, 1986, p. 10)

Shulman distingue dos dimensiones del conocimiento curricular: el conocimiento curricular lateral y el conocimiento curricular vertical. El conocimiento lateral relaciona el conocimiento del currículo que está siendo enseñado con el conocimiento del currículo que los estudiantes están aprendiendo simultáneamente en otras clases. El conocimiento vertical incluye "*la familiaridad con los temas y cuestiones que han sido y serán impartidas en la misma materia durante los años anteriores y posteriores en la escuela, y los materiales que los encarnan*[5] " (Shulman, 1986, p. 10)

II.2.3. Conocimiento matemático para la enseñanza

Marcadamente desde los años ochenta, y cada vez más, se ha venido discutiendo y profundizando el estudio del conocimiento profesional de los profesores, emergiendo recientemente distintas perspectivas sobre el conocimiento profesional, en particular sobre qué conocimiento matemático posee el profesor y qué conocimiento matemático debería poseer para el ejercicio de su función docente.

La discusión de la complejidad del conocimiento profesional es así una preocupación constante de los investigadores en Educación Matemática, habiéndose celebrado, recientemente, como prueba de esa preocupación, un *Research Fora* en el PME (2009)[6], titulado *Teacher knowledge and teaching: considering a complex relationship through three different perspectives*, en el que se han discutido tres perspectivas específicas de las matemáticas: *Mathematics for teaching* (Davis y Simmt, 2006), *Knowledge Quartet*

[5] Encarnan corresponde a la traducción que hicimos de la palabra inglesa "*embody*".

[6] En la reunión del grupo de Psychology of Mathematics Education (PME) celebrado en Tesalónica, Grecia 2009.

(Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005) y *Mathematical knowledge for Teaching* (Ball, Thames y Phelps, 2008).

A continuación presentamos algunos aspectos relevantes de cada una de estas tres perspectivas más detalladamente porque son tres marcos ubicados en el conocimiento matemático para la enseñanza (CME) y dicho conocimiento es central en nuestra investigación. Cabe aclarar que situamos en la categoría del CME a los modelos de Rowland et al. y Ball, et al., porque hasta el momento sus investigaciones han sido mayormente orientadas al área de matemáticas, pero estas dos perspectivas pretenden extenderse a otras áreas, como el inglés, tal como se explicita en Rowland, 2008, p. 295 y MET Project – http://metproject.org/project, respectivamente.

En la propuesta de Davis y su grupo de investigación denominada *Mathematics for teaching* (MfT), se usa el marco interpretativo *"complexity science"*[7], en particular se ve a los profesores como sistemas y el interés se centra en saber cómo aprenden (Davis y Simmt, 2003; Davis y Simmt, 2006). Estos investigadores distinguen a las *matemáticas para la enseñanza* como una *"rama específica dentro de las matemáticas"* y organizan sus investigaciones en torno a "*estudio de conceptos" (concept studies)* (Davis, 2008), una estructura de aprendizaje colectivo a través del cual los educadores matemáticos identifican, interpretan, interrogan, inventan y elaboran imágenes, metáforas, analogías, ejemplos, ejercicios, gestos y aplicaciones a los que los profesores recurren de manera implícita o explícita para sustentar la comprensión de los estudiantes.

Davis (2010) propone el *"estudio de conceptos"* como entornos (*settings*) en los que los profesores pueden combinar sus conocimientos para cuestionarse y elaborar su conocimiento matemático para la enseñanza. Él afirma que el *"estudio de conceptos"* puede ayudar a cambiar la forma en la que las matemáticas son vistas, entendidas y usadas dentro del aula.

[7] Complexity science es el estudio científico de los sistemas complejos, sistemas con muchas partes que interactúan para producir un comportamiento global que no es fácil de explicar en términos de interacciones entre los elementos del componente individual. http://www.complexity.ecs.soton.ac.uk/ visitada el 28 de agosto de 2010.

“[...] el estudio de conceptos parece contribuir a los cambios en las formas en que la matemática es vista, entendida, y empleada dentro de los entornos.” (Davis, 2010, p.63)

El término *concept study* proviene de otras dos nociones en la matemática educativa, *concept* analysis y lesson *study:* concept analysis (eg. Leinhardt, Putnam y Hattrup, 1992) en cuanto a explicar las estructuras lógicas y asociaciones de conceptos matemáticos (origen y aplicación del concepto); lesson study en cuanto a la articulación, crítica y desarrollo de estrategias matemáticas para la enseñanza, con miras a conseguir nuevas posibilidades pedagógicas mediante una participación comprometida, colectiva y en curso en un entorno de lesson study *“los profesores participan en la mejora de la calidad de su enseñanza y en el enriquecimiento de las experiencias de aprendizaje de los estudiantes”* (Fernandez y Yoshida, 2004, p.2).

El *estudio de conceptos* es regido por los siguientes supuestos (Davis, 2010):

1. Los conceptos matemáticos y las concepciones de la matemática están siempre implicados.
2. Mediante la selección de las interpretaciones particulares y haciendo hincapié en ellas sobre las demás, los profesores son participantes vitales en la creación cultural de las matemáticas.
3. El conocimiento de los profesores de matemáticas es en gran parte tácito, pero los elementos críticos del mismo pueden aparecer ante cuestionamientos conscientes suscitados en entornos colectivos.
4. El saber individual y colectivo no puede ser dicotomizado – participar en la interpretación colaborativa puede afectar profundamente la comprensión individual.

Davis (2010) expresa que él está interesado en saber qué pasa cuando en un entorno para varios profesores (eg. un grupo de profesores que hacen un máster (una maestría) en un programa enfocado en *“teachers disciplinary knowledge of mathematics”*), diseñado con la lente de *“estudio de conceptos”*, y guiados por la convicción de transformar su práctica, se plantea la necesidad de diseñar entornos transformativos para profesores de matemáticas. Además a él le interesa saber cómo los seres humanos llegan a adquirir un concepto y por ello estudia además de algunos aspectos cognitivos, otros que pueden influir en la adquisición de éste.

"[...] mi interés se centra en cómo los seres humanos llegan a conocer el concepto, y por esa razón atiendo a las estructuras anidadas del cerebro, el pensamiento, el lenguaje, la cultura, la sociedad y la ecología – estructuras implicadas que permiten y limitan la comprensión" (Davis, 2010, p. 67)

Podemos decir que son dos los grandes constructos en la perspectiva de Davis, aparte del *"estudio de conceptos"* está la visión de las *"Mahtematics-for-teaching"* como una aplicación de la matemática, con una mirada matemática especial, es decir, él ha estudiado, junto con varios colegas (eg. con Simmt y Renert), acerca de sistemas en complex science y teoría de grafos para tratar de explicar y entender el complejo mundo de las matemáticas para la enseñanza.

Actualmente, él apuesta por el *"estudio de conceptos"* como una metodología formal que pueda ser usada para investigar el conocimiento matemático de los profesores (para la enseñanza).

Por otra parte están Rowland y colaboradores, con su perspectiva conocida como *Knowledge Quartet* (KQ). El KQ es un marco conceptual de base empírica (empirically-based conceptual framework) que se usa en clases de formación inicial, para observar y analizar la enseñanza de matemáticas con estudiantes, a partir de clases videograbadas de matemáticas preparadas e impartidas por otros estudiantes del último año de su formación para profesores de primaria, para desarrollar conocimiento matemático para la enseñanza. El foco de atención es la reflexión sobre el contenido matemático y el rol del conocimiento del contenido y del conocimiento didáctico del contenido (CDC) en matemáticas, su principal interés está en los conocimientos y creencias del profesor y cómo pueden ser identificadas las oportunidades para mejorar el conocimiento matemático para la enseñanza (Rowland y Turner, 2007).

La propuesta de Rowland y colaboradores (2005) conocida como KQ nace en el proyecto colaborativo SKIMA (subject knowledge in mathematics), en el que participaron tres universidades de Inglaterra (Goulding, Rowland y Barber, 2002). El marco conceptual KQ fue desarrollado entre los años 2002 y 2004 y modificado en 2007, videograbaron 24 clases de matemáticas de estudiantes para profesor de primaria al final de su formación (*practicum*) y escribieron una breve sinopsis descriptiva (400-500 palabras) con la intención de dar idea de los aspectos relevantes acontecidos en cada clase.

En las 24 clases videograbadas identifican situaciones que dan cuenta de aspectos significativos sobre el conocimiento del contenido y el CDC, o sobre la carencia de estos, analizan las clases bajo la metodología de la Grounded Theory (Glaser y Strauss, 1967) con la intención de generar teoría. Al analizar las situaciones asignan un código preliminar a ese momento o episodio y observan que hay algunos de esos códigos que son recurrentes en diferentes episodios de una u otras clases, así distinguen los momentos y episodios más sobresalientes así como sus correspondientes códigos. De esto, obtienen una gran lista de códigos reducida posteriormente por negociación y acuerdos en el equipo de investigación a 18 códigos emergentes[8], con los que surge el desafío de englobarlos en categorías que sirvan como marco teórico para establecer discusiones entre profesor y observador, un marco teórico que consista de importantes ideas y factores del conocimiento del contenido y CDC integrado por pocas categorías conceptuales, las cuatro categorías o unidades que concretan son: *fundamentos, transformaciones, conexiones y contingencias;* cabe mencionar que tanto los códigos como la conceptualización de cada una de sus dimensiones están abiertas a revisión. (Rowland, 2008).

Rowland y sus colegas otorgan mayor importancia en el sentido amplio de las categorías emergentes más que a tener una lista de códigos (Rowland et. al. 2005); además, Rowland (2008) enfatiza que para su teoría, al analizar las clases, es más

[8] Los 18 códigos quedan incluidos en las cuatro categorías de la siguiente forma:

Fundamentos: *adheres to textbook, awareness of purpose, concentration on procedures, identifying errors, overt subject knowledge, theoretical underpinning, use of terminology.*

Transformaciones: *choice of examples, choice of representation, demonstration.*

Conexiones: *anticipation of complexity, decisions about sequencing, making connections between concepts, making connections between procedures, recognition of conceptual appropriateness.*

Contingencias: *deviation from agenda, responding to children's ideas; use of opportunities.* (Rowland y Turner, 2007).

significante la clasificación de las situaciones bajo las cuales subyace el conocimiento matemático para la enseñanza que hacer una distinción entre diferentes tipos de conocimiento matemático para la enseñanza (dicha distinción es un aspecto característico de la teoría propuesta por Ball et al. 2008).

A continuación presentamos brevemente la conceptualización de las cuatro categorías que aparecen de manera más detallada en Rowland et. al. (2005).

En los *fundamentos* se incluye el conocimiento de las matemáticas en sí, concepciones y creencias sobre la naturaleza de las matemáticas y sobre qué, por qué y cómo enseñar, incluye la propia percepción que se tenga sobre el rol del profesor en el salón de clases; todo esto adquirido antes y durante su formación (intencionalmente o no). Mientras que en las *transformaciones* se abordan aspectos del conocimiento en la acción (*knowledge-in-action*), incluye las formas y contextos en los cuales el conocimiento es desarrollado durante la planificación y la enseñanza, y la capacidad en sí que se tenga para *transformar* el conocimiento a enseñar y hacerlo accesible a los alumnos, por ello, en esta categoría consideran la selección y uso de las formas de representación: analogías, ilustraciones, ejemplos, explicaciones y demostraciones expresadas en Shulman (1986).

Las *conexiones* se refieren al conocimiento que manifiestan los profesores cuando establecen conexiones entre las distintas partes del contenido, a la *coherencia* durante la planificación o enseñanza mostradas a lo largo de un episodio o de una o varias clases. Se puede hablar de conexiones entre conceptos o entre procedimientos. Incluyen la secuenciación de los tópicos a enseñar dentro y entre clases así como el orden de tareas y ejercicios y su grado de dificultad. Y las *contingencias* se presentan en aquellas situaciones en las que los profesores han de responder ante eventos inesperados que emergen durante la instrucción, acontecimientos que son casi imposibles de planear, en los que entra en juego la habilidad del profesor para "*think on one's feet*", es decir, la capacidad de responder a las diversas ideas inesperadas de los alumnos y desviarse de lo que tenía planeado (*deviation from agenda*) cuando lo considere apropiado, la calidad de las respuestas que dé el profesor está determinada, en parte, por la fuente de conocimiento disponible que tenga el profesor (Rowland et. al. 2005).

Rowland y sus colegas (2005) destacan como potencialidad del KQ el hecho de ser un marco conceptual manejable para la reflexión sobre aspectos del conocimiento del contenido en las discusiones realizadas entre el tutor (*mentor*) y el aprendiz en formación inicial -y no sólo del CDC-, ya que normalmente, como se muestra en el estudio de Brown et. al. (1999), tales discusiones se enfocan más a características de corte organizacional de la clase, con menos atención a los aspectos matemáticos de las clases de matemáticas.

Posteriormente Rowland (2008) expresa que el KQ es un marco conceptual accesible para observar, analizar y discutir acerca de la enseñanza de matemáticas a partir de la perspectiva del conocimiento matemático para la enseñanza (ambos conocimiento del contenido y CDC) que posee el profesor y enfatiza que pretenden que el KQ sea una herramienta para apoyar el desarrollo del profesorado, con objetivos claramente determinados y organizados sobre el impacto de su conocimiento del contenido y CDC en la enseñanza. Además menciona que últimamente han analizado clases de nivel secundaria, no sólo de matemáticas sino también de inglés, ciencias y lenguas extranjeras aplicando el KQ exitosamente, con lo cual Rowland y sus colegas se cuestionan si la conceptualización del KQ podría funcionar en otras disciplinas y no sólo en matemáticas (Rowland, 2008). En conclusión, Rowland y su equipo de investigadores consideran que el KQ es un instrumento para desarrollar la enseñanza y el conocimiento de los profesores.

Por otro lado, Ball y sus colegas proponen el *Mathematical knowledge for Teaching*. Sus investigaciones se centran en el conocimiento matemático para la enseñanza, en particular en el nivel de primaria, estudiando dicho conocimiento a partir de la práctica del profesor. Ellos proponen un modelo multi-dimensional (que comentamos más adelante) en el que hacen un refinamiento a las dimensiones del conocimiento del contenido y didáctico del contenido propuesto por Shulman (1986) adaptado a las matemáticas.

De las diferentes perspectivas acerca del conocimiento matemático para la enseñanza podemos constatar fácilmente que existen sobreposiciones en algunas de las componentes definidas por los autores anteriormente referidos. Todos ellos refieren, de forma más o menos explícita, que el profesor deberá ser conocedor del contenido que pretende enseñar y también de conocimientos didácticos que le permitan hacerlo. En ese sentido (Ball, 2000) refuerza la necesidad de que los profesores adquieran conocimiento del contenido y conocimiento didáctico del contenido y de efectuar las interconexiones necesarias entre estos tipos de conocimientos con el objetivo de conseguir utilizarlos para lograr que sus alumnos aprendan matemáticas.

De entre las distintas perspectivas existentes relativas al conocimiento profesional de los profesores, optamos por el conocimiento matemático para la enseñanza de Ball et al. (2008), por distintas razones: Porque a diferencia de otros modelos, este modelo ofrece una **categorización específica del conocimiento matemático para la enseñanza**; además, es un modelo que surge directamente del estudio y análisis de la **práctica** del profesor, es decir, de profesores en servicio, pues se fundamenta en la construcción de una teoría basada en la práctica. Ambos aspectos encajan con nuestra pregunta de investigación en cuanto a saber qué subdominios del CME evidencia en la práctica un profesor que enseña matemáticas. Aunado a estas razones, está la principal aportación del modelo de Ball et al, que, a nuestro juicio, consiste en distinguir el CEC, en particular, en llamar la atención en el conocimiento matemático (puro) propiamente necesario por los profesores para afrontar sus múltiples tareas en la enseñanza; con ello se acentúa el enfoque a razonamientos matemáticos a los que se enfrenta el profesor en el día a día de su trabajo; por ejemplo, a conocer la naturaleza matemática de los errores comunes de sus estudiantes o saber la validez matemática de diversas e inesperadas respuestas que dan los estudiantes.

Consideramos, en la línea de Climent (2005), al conocimiento profesional como una conjunción de saberes y experiencias que el enseñante posee y de los que hace uso en el desarrollo de su trabajo docente. Sin embargo, debido a su complejidad, para hacer más fácil su análisis e interpretación, asumimos que éste puede ser dividido en varias componentes (relacionadas entre sí), cada una enfocada hacia uno o varios aspectos específicos del proceso de enseñanza, una de los cuales corresponde al conocimiento matemático específico para la enseñanza. En la tentativa de identificar, analizar y estudiar los distintos subdominios del conocimiento matemático para la enseñanza que entran en juego cuando un profesor imparte clase, coincidimos con Ball (2000) en el sentido de que la práctica es el punto de partida para el trabajo de la enseñanza, el lugar para la génesis de ideas, inquietudes y problemas y donde estas ideas se prueban, refinan y algunas veces se abandonan. Cabe mencionar que en el ámbito de los proyectos *Mathematics Teaching and Learning to Teach Project* (MTLT) y en el *Learning Mathematics for Teaching Project* (LMT), por Ball (2002, 2003), Ball & Bass (2003), Ball et al. (2005) y Ball et al. (2008), surgió el término *Conocimiento Matemático para la Enseñanza (CME).*

En el proyecto *Mathematics Teaching and Learning to Teach Project* (MTLT), el grupo se interesó en lo que los profesores hacían mientras enseñaban (Ball et al. 2005), en concreto se enfocaron en el estudio de la enseñanza de la matemática y también en la matemática utilizada durante el proceso de enseñanza. Con este enfoque pretendían desarrollar una teoría, basada en la práctica, sobre cuál es el conocimiento del contenido necesario para la enseñanza de las matemáticas. En el proyecto *Learning Mathematics for Teaching Project* (LMT), siguiendo la línea del anterior, desarrollaron cuestionarios para *medir*[9] el conocimiento matemático para enseñar, lo cual les permite analizar diversas hipótesis relativas a la naturaleza del conocimiento matemático para enseñar. Ball y sus colegas definen este tipo de conocimiento como "*el conocimiento matemático usado para llevar a cabo el trabajo de la enseñanza de las matemáticas. Como ejemplo de este trabajo de la enseñanza se incluye la explicación de términos y conceptos a los alumnos, interpretar sus afirmaciones y soluciones, revisar y corregir libros de texto sobre determinados tópicos, utilizar representaciones exactas en la clase, así como proporcionar a sus alumnos ejemplos de conceptos matemáticos, algoritmos y demostraciones*". (Hill, Rowan y Ball, 2005, p. 373).

En concordancia con Ball y colaboradores (Ball, 2000, 2002; Ball y Bass, 2003; Ball, Hill y Bass, 2005) pretendemos, en esta investigación, obtener una mayor información relativa al conocimiento de los profesores mientras éstos se encuentran inmersos en su propia práctica – y no con base en los documentos oficiales, i.e. no a partir del currículo que el profesor ha de enseñar o de los estándares marcados por las instituciones u organismos encargados de la educación–; nos enfocamos en el modelo del conocimiento matemático para la enseñanza elaborado por su grupo, y presentado en Ball et al. (2008), el cual es un refinamiento de los dominios del conocimiento profesional del

[9] Escribimos *medir* por la traducción al español de la palabra *measure*, pero en el contexto de las investigaciones de Ball y su grupo es identificar, analizar y estudiar las componentes del CME.

modelo propuesto por Shulman (1986). Asumimos que el conocimiento matemático para la enseñanza juega un rol importante en la enseñanza de la matemática (Hill, et al. 2008a).

Ball y su grupo de investigación presentan una propuesta centrada en el conocimiento matemático para la enseñanza, ellos incluyen el conocimiento curricular planteado por Shulman (1986) en el conocimiento didáctico del contenido, obteniendo así sólo dos grandes dominios que se encuentran, por su parte, cada uno de ellos subdivididos en tres subdominios, como se muestra en la Figura 1. El conocimiento del contenido queda subdividido en tres subdominios: Conocimiento común del contenido (CCC), Conocimiento especializado del contenido (CEC) y Horizonte matemático (HM). Y el CDC en: Conocimiento del contenido y estudiantes (CC-Es), Conocimiento del Contenido y Enseñanza (CC-En) y Conocimiento Curricular (CC).

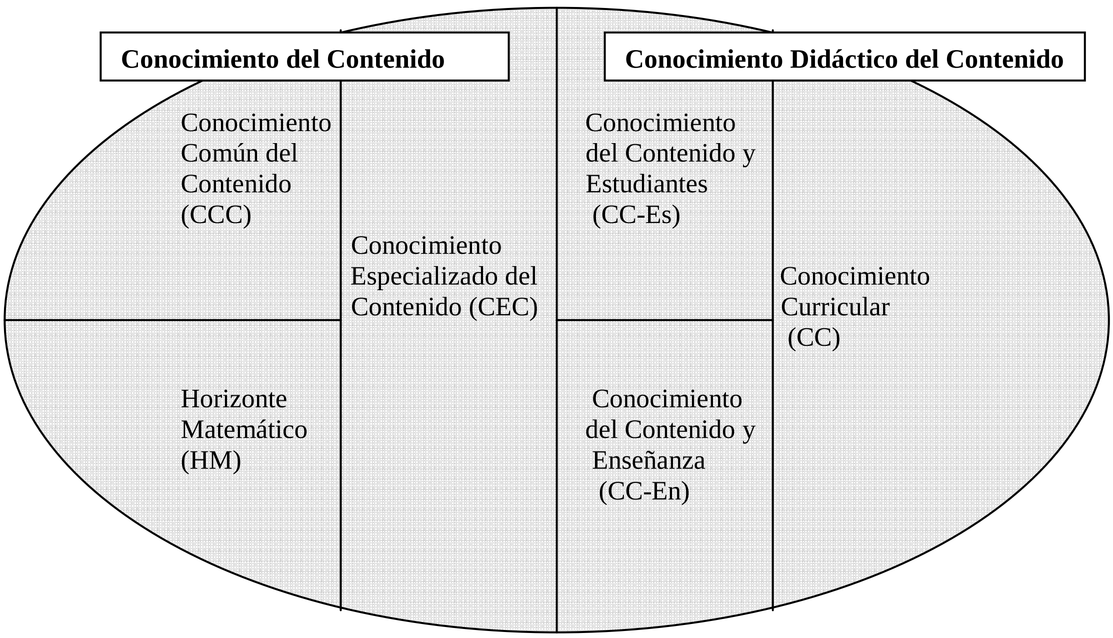


Figura 1. Dominios del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT[10]). (Ball et al., 2008)

[10] Siglas correspondientes a la expresión inglesa, "Mathematical Knowledge for Teaching"

Conocimiento Común del Contenido (CCC): Se refiere al conocimiento matemático y a las habilidades necesarias para resolver las tareas que los estudiantes están realizando, los profesores *necesitan ser capaces de hacer las tareas que ellos están asignando a sus estudiantes* (Ball et al., 2008, p.399). El CCC es un conocimiento no necesariamente único de los profesores, por ejemplo en bachillerato. Puede ser que mucho del conocimiento matemático de los contenidos sea común entre los profesores y otros, como los matemáticos, ingenieros, arquitectos, físicos, etc. Más aún, puede ser común con cualquier persona que sea capaz de realizar correctamente las tareas matemáticas (eg. hacer las operaciones, utilizar los métodos y resolver problemas).

Conocimiento Especializado del Contenido (CEC): Conocimiento constituido por el conocimiento matemático y las habilidades que son propias de la profesión de los profesores, el CEC incluye el conocimiento que permite a los profesores conocer la naturaleza matemática de los errores que cometen los alumnos y razonar si alguna de las soluciones que dan sus alumnos podrían funcionar en general o no.

El CEC es el conocimiento matemático en sí que se tenga para distinguir, averiguar, valorar e interpretar la validez de diversas e inesperadas respuestas que pueden dar los alumnos cuando los profesores supervisan el trabajo de sus estudiantes. En el CEC se destaca el hecho de que los profesores tienen que desarrollar una clase de conocimiento matemático especial en tanto que los profesores requieren de un entendimiento y razonamiento matemático único de su profesión para realizar sus tareas escolares día a día, siendo el propio trabajo de la enseñanza de las matemáticas el que crea la necesidad de un cuerpo de conocimiento matemático especializado para la enseñanza.

Horizonte Matemático (HM): Es considerado como el conocimiento de la trayectoria de un contenido matemático a lo largo de las diversas etapas educativas, así como las conexiones intra y extramatemáticas. Este subdominio incluye las habilidades que tienen los profesores para saber la importancia que tiene un determinado contenido matemático durante su trayectoria curricular.

Cabe destacar que Ball, Thames y Phelps (2008) expresan que el HM aún está en estudio y que no están seguros de si el HM es un subdominio del conocimiento del contenido o si afecta a los otros subdominios del CME.

Conocimiento del Contenido y Estudiantes (CC-Es): Se refiere a la conjunción del entendimiento del contenido y saber lo que los alumnos pueden pensar o hacer matemáticamente, el CC-Es incluye las habilidades que tienen los profesores para predecir lo que a los alumnos les parecerá interesante, motivante, fácil, difícil, aburrido o agobiante.

Los profesores se hacen una imagen de lo que posiblemente harán los alumnos en las tareas matemáticas que les asignen, en este tipo de conocimiento se considera también la capacidad que tienen los profesores para escuchar e interpretar el pensamiento que expresan los alumnos en su lenguaje usual.

El CC-Es también incluye las habilidades de los profesores para identificar los conceptos previos, las dificultades de aprendizaje y concepciones erróneas que traen los estudiantes acerca de un contenido matemático particular.

Conocimiento del Contenido y Enseñanza (CC-En): Se refiere a la conjunción del entendimiento del contenido y su enseñanza, al entendimiento del contenido matemático y su familiaridad con los principios pedagógicos para enseñar ese contenido. El CC-En incluye las habilidades que tienen los profesores para saber qué representaciones son más adecuadas para enseñar un contenido específico y usar diferentes métodos y procedimientos para enseñar ese contenido matemático.

El CC-En incluye también la capacidad que tiene el profesor para

"*… decidir con qué ejemplo empezar, cuáles usar para profundizar en el contenido. […] qué aportaciones de los alumnos tomar en cuenta, cuáles ignorar y cuáles destacar para usarlas posteriormente*" (Ball et al., 2008, p. 401)

además de saber

"… cuándo aclarar más una idea, cuándo hacer una nueva pregunta o encomendar una nueva tarea para fomentar más el pensamiento matemático de los alumnos" (p.401).

Nótese que el CC-En es, por tanto, una amalgama entre el conocimiento del contenido y las habilidades más potentes para enseñar ese contenido.

Queremos cerrar este capítulo comentando que, en síntesis, el contenido del conocimiento profesional del profesor, la forma en que se organiza y sus características están siendo ampliamente estudiadas en la Educación Matemática y que en nuestra investigación nos centraremos en el estudio de las características de una parte del conocimiento profesional, en particular en el estudio de los descriptores que distinguen el contenido del conocimiento matemático para la enseñanza (CME) propuesto por Ball y su equipo de investigación en su modelo del CME.

CAPÍTULO III. MARCO METODOLÓGICO

CAPÍTULO III. MARCO METODOLÓGICO

En este capítulo intentamos recoger los fundamentos y procedimientos metodológicos que sustentan la realización de esta investigación.

Al desarrollar la investigación, el investigador se plantea un proceso de investigación. Durante el proceso de investigación el investigador está en constante diálogo interno consigo mismo cuestionándose constantemente el cómo realizar la investigación y cómo justificar los “por qué” de todas las decisiones que tome. En ese proceso, la reflexión y la escritura[1] juegan un papel esencial. De hecho, una de las cualidades que debe caracterizar al investigador cualitativo es la denominada “*reflectivity*”. Este es un término utilizado por varios autores (Hammersley y Atkinson, 1995; Stake, 2000; Denzin y Lincoln, 2003; Ritchie y Lewis, 2005) para referirse a la auto-reflexión de las experiencias del investigador y cómo ha llegado a ellas. Es en ese proceso cuando el investigador a través de una perspectiva holística y comprensiva mira el proceso de investigación como un todo y escribe las interpretaciones construidas en ese proceso.

En el presente capítulo presentamos primero la pregunta y objetivos de investigación, luego intentamos dar cuenta del marco metodológico, de los fundamentos, selección del paradigma y nuestra perspectiva ontológica, epistemológica y metodológica. Bajo esos fundamentos, abordamos posteriormente el diseño metodológico, explicando el método y las técnicas que utilizamos para obtener la información cualitativa así como el instrumento de análisis de la información. Finalmente comentamos nuestro acercamiento a la triangulación de las fuentes de datos y nuestras consideraciones sobre el rigor de la investigación.

III.1. Pregunta y objetivos de investigación

Una de las etapas fundamentales dentro del proceso investigativo es la generación de la pregunta de investigación con sus objetivos. En la presente investigación, la pregunta desde la cual nos fijamos los objetivos para responderla es formulada a partir de dos

[1] Escritura en el sentido de Bassey (1999) quien concibe a la escritura como un estímulo grandioso para el pensamiento.

problemáticas: una social y una teórica. La social se refiere a la notoria ausencia de una institución que tenga la encomienda de reglar la consistencia de la formación (inicial y continua) de los profesores de bachillerato. Nos posicionamos en la visión del profesor como un profesional y consideramos que un elemento distintivo de su profesionalidad lo constituye su conocimiento profesional, en el cual uno de los ejes principales que lo componen es el conocimiento matemático para la enseñanza (CME) integrado a su vez por distintos subdominios. Ante esta postura, a la inconsistencia y escasez de propuestas formativas, hemos de añadir la problemática teórica, la ausencia de un modelo teórico que describa específicamente el CME en bachillerato. Es a través de estas dos problemáticas y con esos cimientos ideológicos que identificamos el problema de investigación que consiste en la comprensión del CME del profesor en bachillerato, como un primer paso para atender a una necesidad social y aportar elementos para el modelo teórico del CME del profesor de bachillerato.

Ante la luz del problema de investigación, la pregunta de investigación es: ¿qué subdominos del CME evidencia en la práctica un profesor que enseña matemáticas en bachillerato?

Para contestar esa pregunta, nos trazamos los siguientes objetivos.

Objetivo general:
Identificar y profundizar en la comprensión de los distintos subdominios del CME que el profesor de bachillerato pone en acción.

Objetivos particulares:

- Conocer y comprender el conocimiento del contenido matemático del profesor de bachillerato.
- Conocer y comprender el conocimiento didáctico del contenido del profesor de bachillerato.

Tras enunciar la pregunta y los objetivos de investigación, a continuación presentamos el marco metodológico de la investigación.

III.2. Marco Metodológico: Fundamentos, selección del paradigma y nuestra perspectiva ontológica, epistemológica y metodológica[2]

Antes de comentar el paradigma de investigación que seleccionamos, es conveniente mencionar lo que entendemos por paradigma. En la literatura existen varias definiciones al respecto. Aquí coincidimos con la definición propuesta por De Miguel (1988) porque es una definición muy orientada a la investigación educativa. Para él, paradigma se refiere a *"un punto de vista o modo de ver, analizar e interpretar los procesos educativos que tienen los miembros de una comunidad científica y que se caracteriza por el hecho de que tanto científicos como prácticos comparten un conjunto de valores, postulados, fines, normas, lenguajes, creencias y formas de percibir y comprender los procesos educacionales"* (p. 66). El paradigma es un esquema teórico, una forma de percibir y comprender el mundo y que a su vez determina la manera de analizarlo e interpretarlo.

Existen tres cuestiones básicas que constituyen un paradigma: ontológica, epistemológica y metodológica (Lincoln y Guba, 1985). Éstas son tres cuestiones distintas pero inter-relacionadas entre sí, pues la forma como nos posicionemos ante una de las cuestiones repercute directamente en las otras dos (Santos, 2002).

En lo que respecta a la cuestión ontológica, primero hay que considerar que la ontología de acuerdo con Denzin y Lincoln (1998) es referida al estudio del ser y versa sobre la naturaleza de la realidad en tanto que remite a los supuestos que una perspectiva particular de investigación social hace respecto de la naturaleza de la realidad social. De tal forma que la cuestión ontológica consiste en la interpretación particular que el investigador haga de la realidad, es decir, *"en la forma como encaramos la realidad y lo que consideramos posible saber sobre esa misma realidad"* (Santos, 2002, p.158).

Nuestra perspectiva ontológica está fundada en la forma de ver y entender la realidad que nos interesa estudiar, es decir, en el modo de interpretar la naturaleza del CME que el profesor de bachillerato pone en acción. En particular, interpretamos que el CME

[2] La estructura y orientación de este epígrafe está inspirado en las que realiza Muñoz-Catalán (2009) en su tesis doctoral.

evidenciado por las profesoras Emi y Aly es contextualizado, personal (por tanto idiosincrático en cada caso), dinámico, complejo, práctico (evidenciado desde la práctica) y parcialmente tácito[3].

En cuanto a la cuestión epistemológica, la epistemología es la teoría del conocimiento que trata sobre el origen, la naturaleza y la construcción del conocimiento, y de los supuestos que se hacen en relación a la naturaleza de lo que es el conocimiento (Longino, 1990; Dalmiya y Alcoff, 1993). En la cuestión epistemológica se exponen las bases del conocimiento en cuanto a *"su naturaleza y formas, cómo se pueden adquirir y cómo comunicar a otros seres humanos"* (Cohen y Manion, 2002, p. 29). Cabe mencionar que Ritchie y Lewis (2005) afirman que las discusiones en investigación social se organizan respecto a tres aspectos epistemológicos: la relación entre el investigador y el investigado, las "teorías de verdad" y el modo en que se adquiere el conocimiento.

Para explicitar nuestra postura epistemológica, intentamos responder a esos tres aspectos epistemológicos. Antes de comentar la relación entre el investigador y el investigado hacemos mención a la relación entre quien investiga y la realidad que le interesa estudiar. Adoptamos una postura externa para conocer la realidad, es decir, nos acercamos a comprender el CME pero básicamente sólo observando la práctica de las dos profesoras, sin intención de manipularla. En cuanto a la relación entre el investigador y el investigado (en nuestro caso se trata de dos investigadas: Emi y Aly), se hizo un esfuerzo por tratar de interferir lo menos posible durante la interacción entre el investigador y cada una de las profesoras durante la recogida de la información para evitar, en la mayor medida posible, manipular la información o la respuesta de Emi o Aly. Sin embargo, somos conscientes de que hay momentos en los que es inevitable que el investigador haga explícitas sus emociones de manera inconsciente (por ejemplo, en algunas ocasiones cuando Emi o Aly dan sus respuestas en la entrevista). Por su parte, los investigados al saber que serán observados, y algunas veces videograbados, inevitablemente modifican (aunque sea en menor medida) su práctica. En este sentido existe una influencia mutua, ambos van construyendo la investigación, al menos en la

[3] Para mayor detalle de estos aspectos sobre la naturaleza del CME en nuestro estudio, ver el epígrafe II.2.1. del marco teórico correspondiente a la naturaleza del conocimiento profesional.

recogida de la información y al discutir los resultados de la investigación obtenidos a través de la negociación entre los investigados y el investigador (Corbin y Strauss, 2008).

En referencia al segundo aspecto epistemológico de Ritchie y Lewis (2005) respecto a las "teorías sobre verdad", hemos de destacar que nuestra investigación está situada en la teoría de verdad intersubjetiva o teoría consensual, en la cual los fenómenos no pueden medirse de una manera absoluta sino por consenso. Según Habermas (1973) -fundador de esta teoría- *"la verdad es una pretensión de validez que logramos a los enunciados de los cuales nos servimos en nuestras afirmaciones"* (Habermas, 1973, p. 212, citado en Belardinelli, 1991, p.122) y para establecer el consenso *"el fin de una comunicación es la provocación de un estar de acuerdo que termina en la comunión intersubjetiva de la comprensión recíproca, del saber participado y de la confianza recíproca"* (Belardinelly, 1991, p.116). En nuestro caso, el consenso ha sido establecido a través de la comunicación interna entre el investigador y el asesor de tesis; entre el investigador y cada uno de los investigados al negociar la validez de los resultados de la investigación; y entre el investigador y parte de la comunidad científica *ad hoc* (al presentar parte de la investigación en congresos (SEIEM[4]: Sosa y Carrillo 2010), reuniones académicas (SIDM[5]) y encuentros internacionales de jóvenes investigadores cuyo objeto de estudio tiene alguna similitud con el de esta investigación (YESS-5[6])).

Respecto al tercer aspecto epistemológico de Ritchie y Lewis (2005) referente al modo en que se adquiere el conocimiento, desarrollamos el proceso de nuestra investigación a través del método deductivo-inductivo. Partimos de un marco de referencia, el modelo teórico del CME de Ball et al. (2008), luego recolectamos datos (información) a partir de dos casos particulares en nivel bachillerato (Emi y Aly), y posteriormente mediante el análisis de los datos con base en el modelo teórico de Ball y sus colaboradores, siempre en alerta ante la posibilidad de que surgieran nuevos subdominios de dicho modelo, extrajimos descriptores generales sobre cada uno de los subdominos del modelo teórico de Ball et al. (2008).

---

[4] SEIEM (XIV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, 2010).

[5] SIDM (Seminario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Huelva).

[6] YESS-5 (Yerme Summer School, 2010).

En cuanto a la cuestión metodológica, la metodología se refiere a cómo construimos conocimiento respecto de la realidad, a la manera en que podemos obtener dicho conocimiento. Es en la cuestión metodológica en la que el investigador se pregunta cómo debería proceder y el porqué de las decisiones que tome.

De acuerdo con Bisquerra (2004), *"la creencia de la comunidad investigadora respecto al modo de ver la realidad conlleva una postura coherente en las dimensiones epistemológica (modo de acercarse a la realidad) y metodológica (en el modo de conocerla e interpretarla)"* (p. 67). Con esto queremos resaltar la influencia de la cuestión ontológica y epistemológica en la cuestión metodológica.

Antes de profundizar más en la metodología que vamos a seguir en esta investigación, vamos a comentar nuestra selección del paradigma pues éste sugiere y apuntala los procedimientos a seguir.

Existen diversos paradigmas de investigación en la literatura pero son tres los paradigmas más reconocidos por los distintos autores: positivista[7], interpretativo y crítico[8]. Dentro de estos tres se encuentra el paradigma en el que centramos nuestra investigación. Este estudio está enmarcado dentro del paradigma interpretativo (Latorre et al., 1996) porque intentamos comprender e interpretar el CME en bachillerato. En dicha interpretación, el investigador juega un papel importante, característica distintiva de este paradigma (Bogdan y Biklen, 1994). Nuestro propósito no está en explicar, controlar y predecir (aspectos que caracterizan al paradigma positivista) ni pretendemos conseguir la emancipación y el cambio de la realidad como se procura en el paradigma crítico.

Cuando el propósito principal es comprender e interpretar la realidad, entonces consecuentemente se precisa del uso de métodos y técnicas cualitativas que permitan

---

[7] El paradigma positivista se caracteriza por su enfoque nomotético. En este paradigma el objetivo de la investigación consiste en explicar, predecir y controlar los fenómenos objeto de estudio, identificando las regularidades sujetas a leyes con la intensión de generalizar y obtener leyes universales (Latorre, et al. 1996).

[8] El paradigma crítico se caracteriza porque la finalidad que tiene la investigación consiste en analizar la realidad, emancipar, concienciar e identificar el potencial para el cambio (Latorre, et al. 1996).

conocer la realidad en un proceso de indagación. Así pues, consideramos pertinente una investigación de corte cualitativo debido a que nuestro propósito es *comprender, descubrir e interpretar la realidad* (Merriam, 1988). Hay que destacar que para Erickson (1986), la característica que más distingue a la indagación cualitativa es el énfasis en la interpretación. En este sentido, la naturaleza del propósito nos sitúa y nos guía en el proceso de indagación y por tanto, en la elección de unos u otros métodos.

En particular, decidimos desarrollar una investigación de corte cualitativo porque nuestro objetivo es identificar y profundizar en la comprensión de los distintos subdominios del CME que el profesor de bachillerato pone en acción, es decir, nuestro interés está en la profundización del objeto de estudio y en tomar dos casos (dos profesoras: Emi y Aly) para su comprensión en profundidad, para captar justamente la singularidad de los acontecimientos suscitados en los dos casos, para que dichos casos den luz a la identificación y comprensión de los distintos subdominios del CME. También tomamos esa decisión por la riqueza holística de los estudios cualitativos en cuanto a mirar el contexto en su forma natural a partir de sus distintos ángulos y perspectivas, lo cual implica el uso de diversas técnicas interactivas, flexibles y abiertas a través de las cuales se puede captar la realidad de todas las dimensiones que la componen (Bisquerra, 2004).

Una vez mencionado el paradigma que seleccionamos, un siguiente paso es profundizar en el diseño de la investigación, *"el investigador debe acercarse a la realidad sabiendo qué debe observar, cómo y cuándo actuar, cómo obtener información relevante (informantes claves), cuáles son las técnicas apropiadas de recogida de información más apropiadas y cómo analizar la información"* (Bisquerra, 2004, p.284)

III.3 El diseño metodológico: métodos y técnicas

En nuestra investigación, consideramos que el diseño de una investigación es la tentativa de un investigador de poner orden a un conjunto de fenómenos de tal forma que tenga sentido y pueda informar de ese sentido a los demás (Erlandson et al., 1993). Además, el diseño de la investigación es útil para situar al investigador en el mundo empírico y que sepa las actividades que tendrá que efectuar para poder conseguir el objetivo propuesto (Denzin y Lincoln, 1994). De tal forma que el diseño de investigación es referido a la organización de las actividades que deben realizarse para dar solución al problema o responder a la pregunta planteada (Pérez Juste, 1985), viendo así al diseño de investigación como el puente entre la pregunta de investigación y la solución o contestación que se le proporcione a la pregunta. De forma tal, que el diseño de la investigación emerge de la reflexión del investigador después de sus primeras aproximaciones a la realidad objeto de estudio (Rodríguez et al., 1996).

Al diseñar la investigación, dos aspectos esenciales a considerar son el método y las técnicas a utilizar.

El método constituye la vía para alcanzar los propósitos de la investigación y está determinado por su carácter regular, explícito, repetible, racional, ordenado y objetivo para conseguirlo (Latorre et al., 1996). Y la técnica concreta el cómo de la tarea de investigar (Bisquerra, 2004). Para Del Rincón et al. (1995) las técnicas de investigación son referidas a los *instrumentos, las estrategias y los análisis documentales* empleados por los investigadores para la recogida de la información.

En nuestra investigación, situados en el paradigma interpretativo, el método consiste de un estudio de dos casos. Y la técnica está constituida tanto por la obtención de la información cualitativa: observación de aula, notas de campo, cuestionarios y entrevista semi-estructurada; como por el instrumento de análisis de la información. A continuación intentamos comentar y justificar más explícitamente el método y la técnica considerados en nuestro estudio.

III.3.1. Método: El estudio de caso

En la presente investigación, el estudio de dos casos nos permite responder a la pregunta de investigación: **¿qué subdominos del CME evidencia en la práctica un profesor que enseña matemáticas en bachillerato?** Coincidimos con Patton (1980) en concebir un estudio de caso como una forma específica de recoger, organizar y analizar datos; y con García Jiménez (1991), al considerar que un estudio de caso implica un proceso de indagación que se caracteriza por el examen minucioso, comprehensivo, metódico y en profundidad del caso objeto de interés. Manejamos una noción de examen similar a la de Denny (1978), quien define un estudio de casos como "*un examen completo o* *intenso de una faceta, una cuestión o quizás los acontecimientos que tienen lugar en un marco geográfico a lo largo del tiempo*" (Denny, 1978, citado en Rodríguez et al., 1996, p.91).

Asimismo nos interesa conocer el CME característico y esencial del caso, en concordancia con Ponte (2006), que expresa que la comprensión en un estudio de caso *"[…] se asume como una investigación particularista, buscando descubrir lo que en ella hay de más esencial y característico"* (p.105).

En tanto que, respecto a la intención de investigar el estudio de caso, coincidimos en parte, con diversas, que no contradictorias, posiciones. Coincidimos con Merriam (1988), quien expresa que el estudio de casos se plantea con la intención de describir, interpretar o evaluar. Y con Stake (1994), quien opina que a través del estudio de casos el investigador puede alcanzar una mayor comprensión de un caso particular, conseguir una mayor claridad sobre un tema o aspecto teórico concreto, o indagar un fenómeno, población o condición general. Pues en nuestro estudio, los objetivos de investigación son los que orientan el estudio de los dos casos. En términos generales pretendemos explorar, comprender, interpretar y describir los distintos subdominios del CME en bachillerato, para conseguir una mayor comprensión de dicho conocimiento en ese nivel educativo.

Entretanto, es necesario traer a colación la idea de Rodríguez et al. (1996) en cuanto a que, de manera general, el estudio de caso se basa en el razonamiento inductivo y las generalizaciones, conceptos o hipótesis surgen a partir del examen minucioso de los datos, de tal forma que el estudio de caso puede dar lugar al descubrimiento de nuevos significados, ampliar la experiencia o confirmar lo que se sabe. Durante la recogida de información y análisis de ésta, nosotros teníamos en mente esta idea de Rodríguez y sus colegas, pues a partir del examen minucioso de la información, además de confirmar los distintos subdominios del CME propuestos en el marco de referencia de nuestra investigación (modelo teórico para ese conocimiento propuesto por Ball et al., 2008), estábamos en alerta de que pudieran surgir otros subdominios, a pesar de que al final no hubo nuevos subdominios.

III.3.1.1 Definición y características del caso

En bastante literatura sobre estudios de caso se comenta lo que se entiende por estudio de caso y se describen sus características y hasta sus ventajas, pero pocos aclaran explícitamente lo que se entiende por caso. Por ello, antes de describir cada uno de los dos casos que estudiamos en esta investigación, nos posicionamos en lo que entenderemos por caso, atendiendo a la definición aportada por Neiman y Quaranta (2006): "e*l caso es definido como un sistema delimitado en tiempo y espacio de actores, relaciones e instituciones sociales*" (Neiman y Quaranta, 2006, p.220). En nuestro estudio vemos al profesor como un profesional poseedor de un sistema cognitivo complejo delimitado en tiempo y espacio capaz de establecer relaciones sociales. A partir de esta idea, el diseño de esta investigación consiste en un estudio de dos casos: Emi y Aly. Cada caso es de corte instrumental de acuerdo con Stake (1994), para quien este tipo de caso permite profundizar en la comprensión de un tema determinado o afinar una teoría. Con los dos casos pretendemos tener una mejor comprensión del CME en bachillerato, por lo que nuestro interés no está en el caso en sí, sino en aumentar la comprensión de un fenómeno asociado a él.

Decidimos estudiar dos casos porque queríamos contar al menos con dos contextos diferentes para comparar los distintos subdominios del CME que el profesor de bachillerato activa al enseñar matemáticas y así obtener mayor riqueza en la información de nuestro estudio al tener dos profesoras.

III.3.1.2 Selección de los casos para la obtención de la información

Podríamos pensar en "*seleccionar los casos que son típicos o representativos de otros casos, pero los criterios que debe perseguir la selección del caso o los casos no se plantean en términos de representatividad de los mismos, habida cuenta de que la investigación cualitativa no se caracteriza por su intencionalidad representativa o generalizada. Antes al contrario, una de las características fundamentales de la investigación cualitativa es su preocupación por lo peculiar, lo subjetivo y lo idiosincrásico*" (Rodríguez et al., 1996, p.99).

En esta investigación participan dos profesoras de bachillerato que por cuestiones éticas nombraremos con los seudónimos Emi y Aly. Las dos profesoras se seleccionan de manera intencional, pues a diferencia de buscar una muestra aleatoria, se buscaba a dos profesores (sin preferencia de género, al final se logra encontrar a dos profesoras) que pudieran dar información al objetivo trazado en la investigación, es decir, profesores que impartieran matemáticas preferentemente en el último año de bachillerato, reconocidos en su ámbito como excelentes profesionales por parte de sus colegas, por su institución y por sus propios alumnos y que estuvieran dispuestos a colaborar en la investigación, aportando (implícita o explícitamente) elementos sobre el CME en bachillerato. Nos interesaba que impartieran matemáticas en el último año de bachillerato porque en posibles estudios futuros nos gustaría realizar investigaciones referentes a problemáticas relacionadas con la transición del nivel bachillerato a Universidad.

Pedíamos que fueran profesores reconocidos en su gremio como excelentes profesionales durante su historial como profesores de matemáticas de bachillerato, asumiendo esta característica como indicador de buen poseedor de CME. Consideramos pertinente este requisito porque nuestro objetivo de investigación consiste en identificar y profundizar en la comprensión de los distintos subdominios del CME que el profesor de bachillerato pone en acción. Dichos subdominios extraídos directamente de la práctica del profesor y no del currículo o de las normativas marcadas por las instituciones encargadas de la Educación, esto en concordancia con las investigaciones realizadas por Ball y su grupo de investigación (Ball, 2000, 2002; Ball y Bass, 2003; Ball, Hill y Bass, 2005; Ball, Thames, y Phelps, 2008).

Además se deseaba que los profesores tuvieran algún vínculo con algún miembro del grupo de investigación de Didáctica de la Matemática para que hubiese un compromiso moral aparte del profesional y asegurar de alguna forma su apoyo hasta el final de la investigación. El requisito era, también, que aceptaran participar en las diferentes etapas de recogida de información, conscientes de que su información sería utilizada con meros fines de investigación y sin ninguna retribución económica, es decir, lo harían de manera voluntaria, dispuestos a compartir con nosotros parte de sus experiencias como profesores.

Finalmente, atendiendo a esas características, son dos las profesoras que participan y nos regalan de su tiempo para proporcionarnos información sobre los subdominios del CME en bachillerato. Emi y Aly mostraron bastante interés en colaborar en la investigación y disponibilidad para contribuir con lo que esté a su alcance.

III.3.1.2.1 Caso Emi y caso Aly

III.3.1.2.1.1 Caso de Emi

Emi es una profesora muy identificada con su profesión, trabaja en un Instituto de Educación Secundaria y Bachillerato (IESyB) y es reconocida como excelente profesional por parte de sus pares (otros profesores de Matemáticas), por sus propios alumnos y ex-alumnos y por su institución. Ella tiene una licenciatura en Matemáticas, cuenta con 21 años de experiencia impartiendo clases de Matemáticas en secundaria y bachillerato[9] y además de enseñar Matemáticas siente interés por la tecnología y los idiomas (inglés e italiano). Al momento de hacer esta investigación, Emi ocupa el cargo de Secretaria del IESyB e imparte además de otras asignaturas de Matemáticas, la de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II a estudiantes del último año de bachillerato de la especialidad de Ciencias Sociales, con la particularidad de que en este curso cuenta con una alumna con deficiencia visual severa, a esta alumna la llamamos con el seudónimo E9 (Estudiante 9).

III.3.1.2.1.2 Caso de Aly

Aly labora en otro IESyB, ella tiene una licenciatura en Matemáticas y cuenta con 13 años de experiencia impartiendo Matemáticas en secundaria y bachillerato. Ella, durante la recogida de información, además de impartir otras asignaturas de Matemáticas, imparte en particular Matemáticas a los estudiantes del bachillerato de Científico Tecnológico del último año de bachillerato. Aly es una profesora muy identificada con su profesión y es reconocida como excelente profesional por parte de sus colegas, por sus propios alumnos y ex-alumnos y por su institución. Ella además de enseñar

[9] En Huelva capital, es común que en el mismo instituto se imparta secundaria y bachillerato y que por tanto, sea normal que el mismo profesor que imparte la asignatura de matemáticas en bachillerato, lo haga también en secundaria.

Matemáticas siente interés por el idioma inglés, más en concreto por enseñar clases de matemáticas en inglés[10].

Los dos IESyB están ubicados en la ciudad de Huelva, España.

III.3.2. Técnicas. Obtención de la información cualitativa e instrumento de análisis de la información

III.3.2.1 Obtención de la información cualitativa

III.3.2.1.1 Instrumentos y proceso de recogida de la información

Un estudio de caso es una investigación de naturaleza empírica que se basa fundamentalmente en un trabajo de campo o en análisis documental, estudia un fenómeno contemporáneo dentro de su contexto real, sacando todo el provecho posible de múltiples fuentes de evidencia como entrevistas, observaciones, documentos y artefactos (Yin, 1984). En este estudio haremos uso de varias fuentes de evidencia, pues, como expresa Kagan (1990), el análisis del conocimiento del profesor, por su complejidad, requiere de la combinación de varios instrumentos que aporten información, ya que esa complejidad no puede ser capturada por un solo instrumento. Por ello, en este estudio la recogida de la información con cada profesora es a través de:

- Observaciones de aula
- Notas de campo
- Cuestionarios
- Entrevista semi-estructurada

De acuerdo con Rodríguez et al. (1996), "*cuando el investigador se siente a gusto y relajado y se centra en lo que está sucediendo, y los participantes comienzan a entender qué es lo que se está estudiando y reconocen el interés especial del investigador,*

[10] En Huelva, España, existe un proyecto bilingüe en algunos IESyB en los cuales se hace una selección de los mejores estudiantes de nivel secundaria y todas las asignaturas se las imparten en inglés (incluyendo matemáticas).

entonces pueden facilitar mucha más información para la indagación. En ese momento está comenzando la recogida productiva de los datos" (p.74).

En nuestro estudio, para realizar las observaciones de aula con cada una de las profesoras, el primer acercamiento del investigador con la profesora y los estudiantes en contexto, en cada caso, consiste en iniciar junto a ellos el curso. Luego se comienza a grabar en video[11] a partir de la segunda semana. Conforme iba avanzando el desarrollo del curso de manera conjunta, era notoria la implicación más natural de los distintos involucrados: profesora, investigador y estudiantes. Ambos nos sentíamos más a gusto y cada quien ejercía su papel.

Las observaciones de aula se realizan durante el primer trimestre del curso utilizando el "*método de observación no participante*"[12] (Cohen y Manion, 2002) y corresponden a las clases impartidas por Emi y Aly mientras enseñan el tema de Álgebra en el curso de matemáticas de segundo de bachillerato de la especialidad de Ciencias Sociales (CS) y Científico Tecnológico (CT). Cabe mencionar que el tema de Álgebra incluye tres subtemas en cada caso, para la especialidad de CS los subtemas son: matrices, resolución de ecuaciones y programación lineal; y para la especialidad de CT son: matrices, determinantes y resolución de ecuaciones. Decidimos elegir el tema de Álgebra porque, a diferencia de los otros temas abordados en ese curso de matemáticas por Emi y Aly[13] (Geometría, Análisis, Probabilidad y Estadística), el Álgebra es una asignatura que está más trabajada por los profesores de bachillerato (e inclusive por los

---

[11] La grabación en vídeo de las observaciones de aula, enfocada a la profesora, permite registrar las interacciones entre ésta y los alumnos, además permite al investigador reproducir el vídeo cuantas veces sea necesario (Rochelle, 2000), para hacer las transcripciones y analizar las observaciones.

[12] En la observación no participante, el observador permanece separado de las actividades del grupo que está investigando y evita ser miembro del grupo (Cohen y Manion, 2002). Es decir, el observador trata de pasar desapercibido y de que su presencia como observador modifique lo menos posible el desarrollo normal de la clase que está observando.

[13] En el curso de matemáticas que imparte Emi a la especialidad de Ciencias Sociales, los temas a abordar son: Álgebra, Análisis y Probabilidad y Estadística con una duración aproximada de 3 meses para cada tema, 4 clases de 50 minutos a la semana. Mientras que en el caso de Aly para la especialidad de Científico Tecnológico, se deben impartir los temas: Álgebra, Geometría y Análisis Matemático, con una duración aproximada de 3 meses para cada tema, 4 clases de 50 minutos a la semana.

estudiantes, pues han visto elementos de Álgebra desde cursos anteriores), pues normalmente en la ciudad de Huelva, España, es muy común que los mismos profesores que imparten matemáticas en bachillerato también imparten en secundaria (ESO) porque en el mismo instituto se ofrece secundaria y bachillerato. De manera tal que si el área de Álgebra aparece desde 1º de secundaria, y el profesor ha impartido cursos del tema de Álgebra tanto en secundaria como en bachillerato, puede ser indicio de que el profesor tenga un mayor dominio sobre esa área, lo cual podría permitir mayor visibilidad al investigador para identificar/detectar los subdominios del conocimiento matemático que el profesor pone en acción en su práctica. Consideramos a su vez, que ese podría ser un buen comienzo para acercarse al estudio del CME que evidencian los profesores en su práctica en bachillerato.

De esas observaciones de aula se filmaron 15 clases de cada una de las profesoras con una duración aproximada de 50 minutos cada una. Al menos 9 clases corresponden al inicio de la presentación del subtema en cada uno de los tres subtemas en cada estudio de caso y el resto de ellas corresponde a la revisión de ejercicios en clase. En un inicio pensábamos que el mejor momento para grabar las clases era cuando las profesoras empezaran a presentar el subtema porque pondrían en juego estrategias para saber cómo presentar el contenido, de lo cual pudimos obtener evidencias ricas de distintos subdominios del CME. Sin embargo, conforme avanza la investigación, observamos que durante la presentación del subtema existe poca interacción de las profesoras con los estudiantes, así que necesitábamos otras evidencias de situaciones donde se diera la interacción entre el profesor y los estudiantes en torno a un contenido. Con esos miramientos consideramos cubiertos los tres criterios que considera Thames (2009, citado en Ball et al. (2009), p.123) para distinguir lo que es importante tomar en cuenta al estudiar el CME. Los tres criterios propuestos por Thames consisten en tener acceso a las interacciones entre el profesor y los estudiantes respecto a un contenido, tener acceso al pensamiento y razonamiento del profesor durante la instrucción (quizás implícitamente) y suficiencia del contexto (enough of the context) para interpretar las acciones del profesor y los estudiantes (eg. acceder a materiales curriculares que están usando).

En el transcurso de las clases impartidas por las profesoras durante la enseñanza del tema de Álgebra se toman notas de campo por parte del investigador porque consideramos que de acuerdo con Evertson y Green (1989) son registros que contienen aspectos teóricos, puntos de vista y reflexiones personales que subyacen en la observación de una situación o de las conversaciones con los participantes en el estudio. Tomamos las notas de campo "*in situ*" (de manera inmediata) durante la estancia en el escenario y "*a posteriori*", es decir, después del contacto en el escenario como sugiere Lofland y Lofland (1984). De tal forma que, como propone Bisquerra (2004), al registrar las notas de campo el investigador realiza una selectividad de la información, es decir, en nuestro caso intentamos priorizar aspectos que el investigador considera relevantes al hacer sus anotaciones. Pensamos que con esas consideraciones se obtienen impresiones más completas respecto a la observación. En nuestra investigación las notas de campo constituyen una fuente secundaria en la obtención de la información, encontramos en ellas un apoyo para alcanzar nuestro objetivo de investigación.

Cabe mencionar que además de las notas de campo, se continúa recogiendo información durante todo ese ciclo escolar, es decir, hasta que terminó el curso completo, pues en ese intervalo de tiempo se aplican los cuestionarios a las profesoras y se realiza la entrevista.

Previamente a la entrevista se pide a las profesoras que contesten de manera secuencial cuestionarios con preguntas abiertas referentes a aspectos profesionales (formación, experiencia, etc.) y a algunas cuestiones de los subdominios del CME en bachillerato que normalmente no se ven directamente cuando las profesoras imparten la clase, por ejemplo preguntas de corte curricular. En el ANEXO III presentamos las preguntas de los cuestionarios y las respuestas dadas a éstos por las profesoras.

Optamos por aplicar secuencialmente los cuestionarios porque, al estar elaborando el guión para la entrevista, observamos que habría demasiadas preguntas en ella. Para optimizar la organización de las preguntas y el tiempo de realización de la entrevista, seleccionamos algunas de las preguntas del guion de la entrevista y solicitamos a las dos profesoras que las contestaran a modo de cuestionarios; aunque aun y con eso, al final de todas formas quedó un considerable número de preguntas en la entrevista.

Posteriormente, con el objetivo de obtener más información referente a los subdominios del CME en bachillerato se realiza una entrevista semi-estructurada a cada una de las profesoras, como un apoyo que nos ayude a comprender los subdominios. Tanto a los cuestionarios como a la entrevista los consideramos sólo como un apoyo, pues hay que remarcar que nuestra intención es comprender los subdominios del CME desde el conocimiento que pone en evidencia el profesor en la práctica. Ante la sospecha de que puede existir coherencia pero también "incoherencia" entre lo que el profesor conoce y el conocimiento que evidencia ante contextos situados en espacio y tiempo, no consideramos pertinente tomarlos como fuente principal.

Coincidimos con Bisquerra (2004), en que *"las entrevistas semiestructuradas parten de un guión que determina de antemano cuál es la información relevante que se necesita obtener, por lo tanto existe una acotación en la información y el entrevistado debe remitirse a ella. Las preguntas, en este formato, se elaboran de forma abierta, lo que permite obtener una información más rica en matices"*. (p.337)

Tomamos en cuenta las recomendaciones de Bisquerra y realizamos la entrevista a cada una de las profesoras. Cada entrevista está grabada en audio porque consideramos que al no ser videograbada, cada profesora podría sentirse más libre a la hora de contestar las preguntas si sólo se graba en audio. En el ANEXO IV presentamos el guión de la entrevista, y en el ANEXO V y VI presentamos la transcripción de las entrevistas de Emi y Aly, respectivamente.

III.3.2.1.2 Conversión de la información recogida en datos, transcripción de las clases grabadas y de la entrevista

Una vez que se cuenta con las 15 clases grabadas en video de Emi y 15 de Aly se procede a la transcripción de éstas. Tales transcripciones se presentan en forma de tablas en el ANEXO I y II respectivamente. Al realizarlas intentamos escribirlas apegándonos lo más fielmente posible al contexto y a la realidad.

Similarmente, una vez efectuada la entrevista semi-estructurada a cada una de las profesoras en estudio, realizamos las transcripciones de éstas. Dichas transcripciones, como comentamos anteriormente, aparecen en los ANEXOS V y VI, respectivamente.

Al terminar de transformar la información en datos, se da inicio al análisis de la información.

III.3.2.2 Instrumentos de análisis de la información

Las clases grabadas en video y posteriormente las transcripciones de éstas, son la fuente principal para analizar la información. Para analizar estas clases, se utilizaron dos instrumentos. Por un lado, para organizar la información de las transcripciones y poder analizarlas, utilizamos un primer instrumento, obtenido de una adaptación realizada al modelo propuesto por Ribeiro (2008) para modelar la enseñanza. Y por otro lado, para identificar los subdominios del CME usamos el modelo del CME propuesto por Ball et al. (2008).

Así remarcamos entonces que, en concreto, para analizar la información, las notas de campo, cuestionarios y entrevistas son fuentes secundarias mientras que la fuente principal consiste en las clases grabadas en video.

III.3.2.2.1 Modelo para organizar la información de las transcripciones

Ribeiro (2008) elabora un modelo para efectuar el análisis de la práctica del profesor de matemáticas en temas de primaria. Su modelo está inspirado en el que propone Schoenfeld (1998a, b; 2000) y en las adaptaciones realizadas al área de las ciencias experimentales por otros miembros de nuestro equipo de investigación en la Universidad de Huelva (eg. Monteiro (2006); Monteiro, Carrillo y Aguaded (2008)) con base a las necesidades y a los objetivos de su investigación.

En el modelo de Ribeiro (2008) se considera a la clase como un todo formado por episodios fenomenológicamente coherentes, regidos por un objetivo declarado o interpretado por el investigador (referente a lo que el profesor pretende enseñar en la clase y moldeado por las acciones que el profesor desarrolle para la enseñanza). En los episodios se identifica el evento inicial y final de ese objetivo (estos momentos son etiquetados con el nombre de evento desencadenante y evento de término, respectivamente). En el transcurso de estos dos eventos el profesor interactúa con los alumnos usando un determinado tipo de comunicación y uno o varios recursos para alcanzar su objetivo. En las interacciones se identifican los indicadores de creencias (Climent, 2005) y los conocimientos matemáticos para la enseñanza siguiendo a Ball et al. (2008). Para identificar el episodio de una forma más manejable y comprensible, Ribeiro (2008) sugiere que el nombre del episodio esté directamente relacionado con el objetivo del profesor en aquella situación concreta.

La representación gráfica del modelo propuesto por Ribeiro (2008) (Ilustración 1) es la siguiente. Del lado izquierdo, [i,j] se representa la clase i y episodio j, al que corresponde esa situación específica. Luego se escribe la información sobre si el episodio formaba, o no, parte de la imagen de la lección[14]. Después se especifica el evento desencadenante y de término, encontrándose entre estos las informaciones respecto a los indicadores de creencias, objetivo(s) y conocimientos matemáticos para la enseñanza (CME) evidenciados por el profesor, además del tipo de episodio con referencia al contenido abordado. Del lado derecho se encuentran las acciones del profesor realizadas en cada situación concreta. En este contexto, las acciones del profesor deben ser entendidas/identificadas con su actuación en la clase durante la construcción de conocimientos por parte de los alumnos.

[i.j] Designación del episodio (Tipo de episodio, tipo de comunicación, forma de trabajo de los alumnos, recurso(s)) (línea de inicio – línea de fin)

¿Forma parte de la imagen de la lección? Sí o no (se hace o no parte de la imagen de la lección).

Evento desencadenante: Evento que funciona como desencadenante de la secuencia de acciones

Indicadores de Creencias:
Identificación del indicador, o conjunto de indicadores de creencias, subyacente(s) a esta secuencia de acciones.
Objetivos: Identificación del objetivo subyacente a esta secuencia de acciones.
Conocimientos:

[i.j.k] Acción inicial del profesor, recurso(s) utilizado(s), tipo de comunicación, acción del profesor, contenido específico (línea de inicio – línea de fin)

Tipos de diálogos (línea de inicio – línea de fin)
Objetivo específico: Objetivo específico asociado a esta acción.

[i.j.k+1] Acción inicial del profesor, recurso(s) utilizado(s), tipo de comunicación, acción del profesor, contenido específico

[14] *La imagen de la lección es [...] el artefacto escrito que proporciona la estructura prevista de la lección* (Schoenfeld, 2000, p.250). La imagen de la lección de un profesor incluye todo aquello que el profesor considera que pudiera pasar en la clase: la secuencia del día, las formas de interacciones con los estudiantes, lo que es flexible y lo que no y planear cómo llevar a cabo la discusión. (Schoenfeld, 2000)

Identificación de los conocimientos del profesor para que implemente esta secuencia de acciones – Conocimiento Común del Contenido (CCK), Conocimiento Especializado del Contenido (SCK), Conocimiento del Contenido y de los Alumnos (CCA), Conocimiento del contenido y de la Enseñanza (CCE), Conocimiento Propedéutico (HK). **Tipo de episodio:** Rutina, Script, Guión de acción, Improvisación de contenido o Improvisación de gestión. **Evento de término:** Evento que funciona como causa de término de la secuencia de acciones	(línea de inicio – línea de fin) Tipos de diálogos (línea de inicio – línea de fin) Objetivo específico: Objetivo específico asociado a esta acción.

Ilustración III.1 – Representación del modelo (Ribeiro, 2008).

Nosotros hemos realizado una adaptación a este modelo porque nos interesa enfocarnos en los elementos centrales del modelo para el análisis de la caracterización del CME. Consideramos que cuando se pretende identificar y profundizar en la comprensión de los subdominios del CME que el profesor pone en acción, tanto los objetivos como los conocimientos son dos elementos centrales en el modelo. La identificación de los objetivos da luz de la división en episodios fenomenológicamente coherentes, permitiendo también identificar los eventos iniciales y finales. A este respecto, las acciones que toma el profesor juegan un papel muy importante porque sirven de apoyo para comprender y moldear el objetivo del profesor para enseñar el contenido matemático. En cuanto a los conocimientos alusivos al CME, éstos se convierten en nuestro foco de interés. De tal forma que el modelo que usaremos queda representado en la Ilustración 2.

Cabe hacer notar que, cuando nuestro interés se enfoca en identificar y comprender los subdominios del CME en la práctica del profesor propuestos por Ball et al. (2008) –CCC, CEC, HM, CC-Es, CC-En y CC– para obtener mayor especificidad del CME, identificamos y construimos ejemplos o subdescriptores que *den cuenta* –tanto como sea posible– de los distintos subdominos del CME, conocimientos o capacidades específicas del profesor que son activados durante aquel momento particular de la clase y que permiten la interpretación de los subdominios de forma detallada.

[i.j] Descripción del episodio. (línea de inicio – línea de fin)

Objetivo general: Identificación del objetivo del contenido matemático que pretende enseñar el profesor.

Evento desencadenante: Evento que funciona como causa de inicio del episodio.

[A, i.j][15] Acción tomada por el profesor para enseñar el contenido matemático.

Conocimientos:
Identificación de los conocimientos del profesor evidenciados durante ese episodio.

Conocimiento Común del Contenido (**CCC**)
Subdescriptores
Conocimiento Especializado del Contenido (**CEC**)
Subdescriptores
Horizonte Matemático (**HM**)
Subdescriptores
Conocimiento del Contenido y de los Estudiantes (**CC-Es**)
Subdescriptores
Conocimiento del contenido y de la Enseñanza (**CC-En**)
Subdescriptores
Conocimiento Curricular (**CC**)
Subdescriptores

Evento de término: Evento que funciona como causa de término de ese episodio.

[16][i.j.k] Descripción del subepisodio. (línea de inicio – línea de fin)
Objetivo particular: Identificación del objetivo del contenido matemático que pretende enseñar el profesor.
Evento desencadenante: Evento que funciona como causa de inicio del subepisodio.
[A, i.j.k] Acción tomada por el profesor para enseñar el contenido matemático.
Conocimientos:
Identificación de los conocimientos del profesor evidenciados durante ese subepisodio.
CCC
Subdescriptores
CEC
Subdescriptores
HM
Subdescriptores
CC-Es
Subdescriptores
CC-En
Subdescriptores
CC

Subdescriptores

Evento de término: Evento que funciona como causa de término de ese subepisodio.

[15] En la etiqueta de la acción, en esta adaptación hubo que anteceder la letra A para que no se confunda la etiqueta del subepisodio con la de la acción.

Ilustración III.2 – Representación del modelo.

III.3.2.2.2 Modelo para identificar los subdominios del CME

Nosotros usamos el modelo teórico propuesto por Ball et al. (2008) como marco de referencia para identificar los subdescriptores del CME correspondientes a cada uno de los subdominios – CCC, CEC, HM, CC-Es, CC-En y CC- (representados en la Figura 1), atentos a que surgieran otros subdominios normados por el propio nivel educativo, es decir, por situaciones peculiares del nivel bachillerato. La explicación teórica referente a cada uno de los subdominios expuestos por Ball y sus colegas (2008), se encuentra más explícita en la sección correspondiente al modelo de Ball et al. en el apartado II.2.3 del capítulo referente al Marco Teórico.

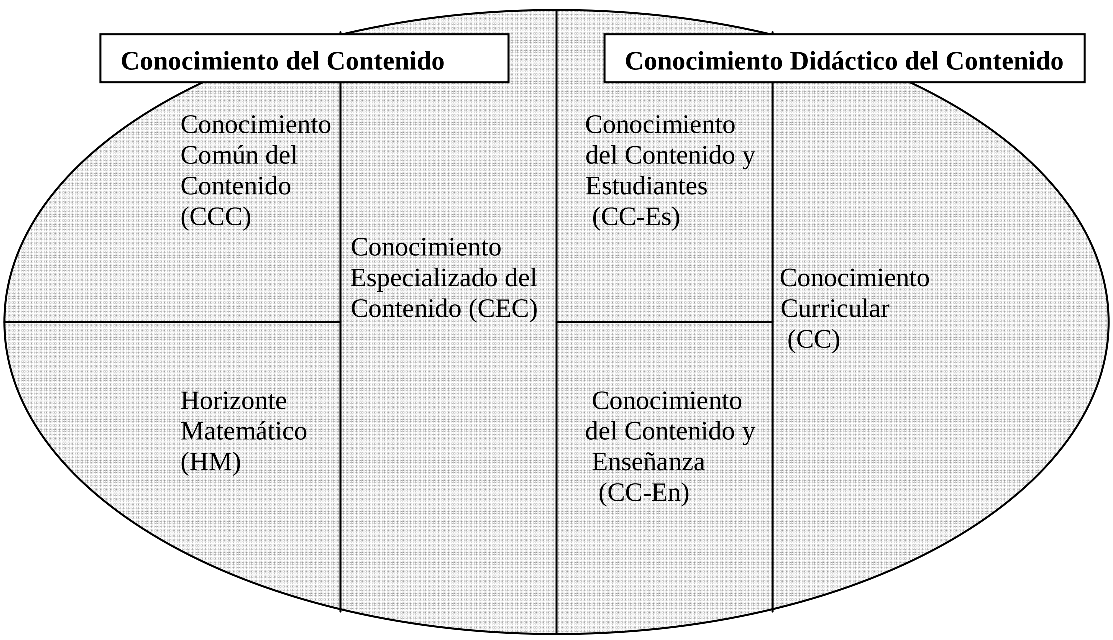


Figura III.1. Dominios del CME (MKT[17]). (Ball et al., 2008)

---

[16] En el caso en el que haya subepisodios, éstos siguen la misma estructura interna que los episodios, pero cambiamos el tamaño de letra para diferenciarlos de los episodios. La ubicación de los subepisodios depende de la propia naturaleza del objetivo general y/o particular y de la acción que realice el profesor para enseñar el contenido.

[17] Siglas correspondientes a la expresión inglesa, "Mathematical Knowledge for Teaching"

III.4. Triangulación de las fuentes de datos

Entendemos la triangulación de las fuentes de datos como un proceso en el cual se hace un *"esfuerzo por ver si aquello que observamos de lo que informamos contiene el mismo significado cuando lo encontramos en otras circunstancias"* (Stake, 2007). En particular, coincidimos con Denzin (1970) en que la triangulación de los datos está referida a la confrontación de diferentes fuentes de datos en un estudio y que dicha triangulación se produce cuando existe concordancia o discrepancia entre estas fuentes.

Una vez analizada la información obtenida de las clases grabadas en video, analizamos las notas de campo, los cuestionarios y la entrevista, buscando aspectos que nos brindaran información relevante respecto al objetivo de nuestra investigación, es decir, en cuanto a identificar y profundizar en la comprensión de los distintos subdominos del CME que el profesor de bachillerato pone en acción. De ese análisis no surgieron nuevos descriptores, pero sí nos ayudó a sustentar los existentes y a comprender y explicar mejor cada uno de los dos casos estudiados en esta investigación. De tal manera que la información recogida con estos instrumentos jugó un papel muy importante al momento de triangular la información para fundamentar los resultados de esta investigación.

III.5. Rigor de la investigación

Nosotros estamos interesados en asegurar el rigor de la investigación y estamos en concordancia con Rodríguez et al., (1996) en que hay que atender las siguientes tres cuestiones:

1. Suficiencia y adecuación de los datos. Suficiencia en cuanto a la cantidad de datos recogidos, antes que al número de sujetos. Se consigue cuando se llega a un estado de "saturación informativa" y la nueva información no aporta nada nuevo. La adecuación es referida a la colección de la información de acuerdo con las necesidades teóricas del estudio y el modelo emergente.

2. Presentar los primeros análisis que se realicen a los informantes y de esa forma asegurar el rigor, verificando el estudio con los informantes para confirmar de forma inmediata la pertinencia, adecuación y validez del estudio. De esta manera los informantes pueden ofrecer informaciones adicionales aunque también cabe la posibilidad de que los participantes no estén de acuerdo con los hallazgos.

3. A través del proceso de triangulación, usando diferentes métodos, datos, teorías o disciplinas.

En cuanto a la primera cuestión, la suficiencia y adecuación de los datos, nosotros llegamos a un estado de "saturación informativa" después de los cuatro instrumentos de información que desarrollamos en este estudio. Una vez que teníamos las observaciones de aula, las notas de campo, los cuestionarios y la entrevista semi-estructurada, también obtuvimos las fotocopias de los exámenes calificados del tema en estudio (Álgebra) por cada profesora y las fotocopias de las notas de los estudiantes, pero ya no nos aportaban nada nuevo. Por ello, decidimos no considerarlos como instrumentos de recogida de información. Respecto a la adecuación de los datos, discurrimos también que esos cuatro instrumentos de recogida de información eran los más apropiados para proporcionarnos la información acorde a nuestro problema, pregunta y objetivos de investigación.

Teniendo en cuenta la segunda cuestión, una vez que obtuvimos los primeros análisis, por cuestiones de tiempo de las dos profesoras, verificamos sólo algunas partes del análisis de clases, momentos puntuales de algunas de sus clases, que desde el punto de vista del investigador eran más relevantes para obtener la información de los distintos subdominios del CME, una vez validada esa información, al obtener los resultados de cada caso, la investigadora se reúne por separado con cada una de las profesoras (porque así lo consideramos más ético) para confirmar la pertinencia, objetividad, adecuación y validez de esos resultados. Las dos profesoras estuvieron de acuerdo en más del 95% de los resultados, y posteriormente del otro casi 5% una vez discutidos los resultados.

Respecto a la tercera cuestión, para robustecer la calidad de los resultados reportados en esta investigación, acudimos a la triangulación de las fuentes de datos. Nuestra principal fuente de información fueron las transcripciones de las clases grabadas, sin embargo, en algunos momentos de redactar algunas afirmaciones en los resultados, necesitábamos del sustento de algunos aspectos de los subdominios del CME en bachillerato, y para ello, acudimos a las notas de campo, los cuestionarios y la entrevista.

En el siguiente capítulo presentamos el análisis de la información.

CAPÍTULO IV. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

IV.1. Análisis de las clases grabadas en video

IV.1.1. Primer acercamiento al análisis de la información

IV.1.2. Segundo acercamiento al análisis de la información

IV.1.3. Tercer acercamiento al análisis de la información

IV.1.3.1. Modelación del proceso de enseñanza de la profesora Emi

IV.1.3.2. Modelación del proceso de enseñanza de la profesora Aly

IV.1.4. Cuarto acercamiento al análisis de la información

IV.1.5. Quinto acercamiento al análisis de la información

IV.2. Análisis de los cuestionarios, las entrevistas y las notas de campo

CAPÍTULO IV. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

IV.1. Análisis de las clases grabadas en video

El análisis de las clases grabadas es realizado a partir de cinco acercamientos. Para analizar dichas clases, basados en las transcripciones de éstas, y utilizando la adaptación hecha al modelo de Ribeiro (2008) para organizar la información de las transcripciones y proceder a identificar los distintos subdominios del conocimiento matemático para la enseñanza (CME) propuesto por Ball et al. (2008) (y estando atentos por si aparecían nuevos subdominios), en cada clase se hizo una división de episodios fenomenológicamente coherentes de manera recurrente, identificando los eventos iniciales y finales, después de haber identificado el objetivo declarado por el profesor o interpretado por la investigadora, respecto al contenido matemático que la profesora pretende enseñar en esa clase, y usando una metodología de revisión/comparación constante entre las divisiones anteriores y posteriores para garantizar una consistencia interna de esa división. Después de tener la división de los episodios, en los episodios que se requiera, se divide cada episodio en sub-episodios, siguiendo la misma metodología.

Consideramos necesarios cinco acercamientos para el análisis de la información porque si bien es cierto que como expresa Kagan (1990), estudiar el conocimiento del profesor requiere de varias fuentes de información, pensamos que también es necesario realizar varios acercamientos al análisis de la información para revisar, comprobar y validar constantemente lo que se va obteniendo de dicho análisis. Y a su vez refinar y pulir continuamente los distintos acercamientos para contrastar y confrontar la información analizada. Defendemos que en este tipo de estudios cualitativos es muy importante exigirnos rigor en el análisis de la información para robustecer la credibilidad de los resultados de la investigación.

Queremos hacer notar que en este caso no estamos hablando de triangular con distintas técnicas de análisis en sí, sino de un refinamiento y validación interna entre varios acercamientos al análisis de la información dentro de una sola técnica.
A continuación un esquema donde mostramos de manera sintética cada uno y después comentamos en qué consiste cada uno de los cinco acercamientos al análisis de la información.

ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

FUENTE PRIMARIA:
Clases grabadas y transcritas

FUENTES SECUNDARIAS:
Cuestionarios
Entrevista
Notas de campo

1er acercamiento
Primera identificación de los subdominios del CME en cada una de las 30 clases (15 de cada profesora).
Obtención: Primera lista de descriptores.

2º acercamiento
Selección de clases para analizar en profundidad.
Obtención: Clases seleccionadas.

3er acercamiento
Focalización y descripción con mayor detalle de cada uno de los subdominios "visibles" del CME.
Obtención: Registros de subdescriptores de los subdominios del CME plasmados en esquemas de modelaciones del proceso de enseñanza de cada profesora.

4º acercamiento
Construcción de nuevos descriptores y refinamiento de los identificados en el primer acercamiento al análisis, además de la verificación de que la información de los subdescriptores corresponda a esos descriptores.
Obtención: Una clasificación refinada y etiquetada de descriptores de los subdominios del CME.

5º acercamiento
Codificación de los subdescriptores de los subdominios del CME plasmados en las modelaciones del proceso de enseñanza de cada profesora y verificación de que la adaptación de la información evidenciada de la práctica de las dos profesoras corresponda con la recogida en los subdescriptores y a su vez en los descriptores.
Obtención: Subdescriptores codificados de los subdominios del CME.

IV.1.1. Primer acercamiento al análisis de la información

En este primer acercamiento realizamos una primera identificación de los subdominios del CME en cada una de las 30 clases grabadas y transcritas (15 de cada profesora). La identificación de los subdominios del CME en bachillerato asociados a cada episodio y subepisodio fue efectuada después de haber dividido las observaciones de aula en episodios y sub-episodios. Esta identificación está basada en el instrumento teórico de las dimensiones para el CME propuesto por Ball et al. (2008) y en alerta a que se pudieran obtener nuevas dimensiones.

De este primer acercamiento se obtiene una primera clasificación de descriptores evidenciados en cada uno de los dos casos respecto a cada uno de los subdominios del CME que presentamos enseguida.

Tabla IV.1. Primera lista de descriptores

CCC	Saber o conocer cuando sus estudiantes tienen una respuesta correcta/incorrecta.
	Saber usar términos y notación matemática (que aparece en las definiciones formales).
	Saber la definición del concepto, regla, propiedad, teorema o método que está presentando.
	Saber lo que piden en un ejemplo o ejercicio.
	Saber a qué o hasta donde llegar en un ejemplo o ejercicio.
	Saber hacer un ejemplo o ejercicio.
	Saber que la notación es muy importante en matemáticas.
	Saber la estrategia para hacer la demostración de una regla o teorema.
	Saber hacer la demostración de una regla (Cramer) o teorema.
CEC	Distinguir, averiguar, valorar e interpretar la validez de diversas e inesperadas preguntas que pueden dar los estudiantes, cuando los estudiantes las expresan de forma oral o escrita. Saber responder correctamente con conocimiento matemático las preguntas de los estudiantes. (Depende de lo que responda matemáticamente, si se preocupa por saber o entender el pensamiento matemático que pudo producir esa pregunta, saber qué matemática está de fondo, si es correcta esa matemática o no y si ese pensamiento matemático funciona en general o no)
	Identificar, distinguir, averiguar, valorar e interpretar la validez de diversas e inesperadas respuestas[1] que pueden dar los estudiantes, cuando los estudiantes las expresan de forma oral o escrita.

[1] RAE, **Respuesta:** Satisfacción a una pregunta, duda o dificultad. **Solución:** Desenlace o término de un proceso. Resolver una duda.

	(Depende de lo que responda matemáticamente, si se preocupa por saber o entender el pensamiento matemático que pudo producir esa pregunta, saber qué matemática está de fondo, si es correcta esa matemática o no y si ese pensamiento matemático funciona en general o no).
	Saber argumentar el "¿por qué si o por qué no?" de un contenido con fundamentos matemáticos (Por ejemplo un ingeniero puede saber multiplicar por 10 pero <u>no necesita explicar por qué</u> cuando multiplicamos por 10 agregamos un cero).
	Saber que pueden ver la propiedad tanto de un lado de la igualdad como del otro
	Capacidad para saber varias formas de solucionar un problema matemático (y por ende saber cuál es la "mejor").
	Identificar patrones sobre errores comunes que cometen los estudiantes. (Depende si esos patrones están más relacionados a dificultades de los estudiantes entonces hay indicio del CC-Es y si están más relacionados a la matemática pura propia del profesor entonces hay indicio de CEC)
	Entender diferentes formas/interpretaciones de las operaciones que dan/hacen los estudiantes. (En el ejemplo de la resta de Ball et al. (2008), unos alumnos lo hacen de un modo, otros de otro, es decir, el profesor debe entender las diferentes interpretaciones del concepto (resta) que hacen los alumnos en las operaciones).
HM	Conocer las similitudes (las relaciones) entre varios conceptos matemáticos de un mismo bloque o unidad (cuando la relación es entre conceptos de una misma unidad o bloque el HM es muy cercano al CEC)
	Saber que un contenido está relacionado con otro más general (aunque no aborde esa forma más general en este grupo porque el programa no lo incluye).
CC-Es	Capacidad para escuchar e interpretar el conocimiento/pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje (usual o en proceso de adquisición del nuevo concepto)
	Prever las necesidades de los estudiantes sobre ese contenido matemático (Ej. En el caso de E9 con Emi).
	Prever las dificultades de aprendizaje que puede tener un estudiante sobre el contenido matemático que está enseñando.
	Prever que los estudiantes pueden suponer una idea errónea sobre alguna propiedad matemática sobre ese contenido.
	Habilidad para prever la confusión que pudiera tener el alumno con algo que se esté viendo en clase o posteriormente en otras clases.
	Habilidad para prever (anticipar) que los estudiantes no saben o no recuerdan un concepto o propiedad matemática. (Ej. Emi anticipa que los estudiantes no saben o no recuerdan a cuánto equivale un área).
	Habilidad para prever (anticipar) que los estudiantes se pueden quedar con una imagen inadecuada del contenido y por ello luego siente la necesidad de hacer una aclaración o comentario.
	Saber lo que les parecerá cansado y aburrido de un contenido

	matemático específico.
	Prever que los estudiantes pueden equivocarse al hacer determinado cálculo o de un número o de un signo (más leve), provocado por un despiste al hacer una(s) operación(es)/transformación(es); o por no dominar el contenido que se les está presentando (eg. retroceder en lugar de avanzar al diagonalizar la matriz por Gauss-Jordán).
	Saber que los estudiantes deben proceder ordenadamente (eg Prever que los estudiantes pueden cometer un error referente al adecuado acomodo de los elementos de una matriz con base en su posición).
	Prever una posible situación concreta susceptible de error para los estudiantes, en ejercicios posteriores. Dicha situación es mostrada a los estudiantes como medida preventiva en situación de riesgo de error de los estudiantes.
	Prever/saber que los estudiantes podrían hacer cálculos mecánicamente sin saber realmente lo que están haciendo.
	Prever que a los estudiantes se les puede ocurrir una respuesta intuitiva para resolver un problema.
	Prever que los estudiantes no vean que un problema es equivalente a otro; o que no vean que una igualdad la pueden usar en un sentido o en otro.
	Prever que los estudiantes pueden ponerse a hacer cálculos sin antes fijarse si pueden usar una propiedad.
	Prever que para los estudiantes será más comprensible un tema si lo ven con un ejemplo concreto que aparece en el libro de texto.
	Prever que los estudiantes entenderán “mejor” el ejemplo si antes de empezar a hacerlo les remarca las principales características del concepto que usará en el ejemplo.
	Prever que los estudiantes pueden atascarse en algunos detalles de la solución del problema y perder el sentido del problema.
	Prever que a los estudiantes les puede parecer extraño usar la primera vez un método/regla que estaba diseñado para otro caso/situación del contenido (eg. usar Cramer en un SCI).
	Prever que los estudiantes al resolver problemas extensos, pueden olvidar algún cálculo que ya habían hecho y al inicio y no aprovecharlo cuando se ocupe nuevamente para solucionar el mismo problema.
	Prever que los estudiantes se pueden confundir con cierta notación y entonces el profesor la cambia (Aly cree que los alumnos se pueden confundir con la z y la t que ahora son parámetros y por lo tanto mejor cambia esas letras por λ y μ, A12, p6).
	Habilidad para prever que algún dato del ejercicio puede despistar a los estudiantes al resolver el problema.
	Habilidad para prever, anticiparles una respuesta incorrecta que pueden dar (los estudiantes) en la solución de un problema particular. Prever una posible respuesta incorrecta de los alumnos/prever que pueden equivocarse.
	Prever que un proceso o procedimiento puede ser más complicado de entender o trabajar por los estudiantes (eg. trabajar la demostración con x1, x2, x3 y no con x, y, z).
	Prever que los estudiantes no entienden cierta simbología y entonces

	la traduce a lenguaje común (eg. Emi preve que no entienden $x+y\leq 9$ entonces traduce "no puede superar el 9").
CC-En	**Ejemplos**
	Capacidad para decidir con qué ejemplo o ejercicio empezar, cuándo y cuáles usar para enfatizar, reforzar o generalizar cierta idea matemática.
	Habilidad para considerar la aplicación del concepto en un ejemplo para ir induciendo luego la definición del concepto. (eg. Emi Clase 1, considera la aplicación de matrices en el ejemplo de criptografía para ir induciendo luego la definición de matriz).
	Aprovechar el ejemplo para hacerles notar, explícitamente al desarrollar el ejemplo, los aspectos relevantes del contenido matemático que pretende enseñarles ese día en clase.
	Habilidad para seleccionar qué ejemplos y ejercicios dejarles de deberes para que practiquen (más fáciles o más difíciles desde el punto de vista del profesor).
	Habilidad para darles ayudas a los estudiantes, pueden ser ayudas puntuales para dar solución/resolver un ejercicio/problema. O de plano llegar a ayudarles a hacer el ejercicio completo (en situaciones especiales).
	Habilidad para explicarles o hacerles hincapié en lo que quiere que hagan en un ejemplo/ejercicio y para qué quiere que lo hagan. O simplemente explicarles de lo que trata el ejemplo, ejercicio o problema.
	Capacidad para tratar de que los estudiantes vean que ciertos resultados de un ejemplo o ejercicio tiene un significado concreto.
	Habilidad para señalar a los estudiantes algún dato del problema que no aparece explícito y que luego se ocupará para (plantear el problema) dar solución a un ejercicio o resolver un problema.
	Gestión de la participación **Preguntas**
	Capacidad para introducir una nueva pregunta para hacerles ver que es equivocada la respuesta de un estudiante y orientar la pregunta a la respuesta que el profesor(a) quiere escuchar.
	Capacidad para ir haciendo preguntas a los estudiantes sobre cierta idea, no necesariamente a cierto estudiante, (algunas veces las contesta ella misma y otras los estudiantes).
	Capacidad para introducir una nueva pregunta para introducir un nuevo concepto o una nueva propiedad o una clasificación de sistemas.
	Habilidad para involucrar a estudiantes pasivos, en particular para hacer preguntas sobre el contenido a un estudiante que normalmente no participa en clase.
	Habilidad para gestionar por lo menos una participación pasiva de los demás estudiantes cuando existe un diálogo entre el profesor y un determinado estudiante.
	Habilidad para ir guiando la solución a un ejercicio, resolver un

	problema o hacer una representación gráfica a través de preguntas.
	Habilidad para transferir e interpretar la pregunta de un estudiante y luego dar la respuesta a forma de explicación para todos los estudiantes.
	Gestionar la participación de los estudiantes en clase y que no sólo copien lo que ella hace, por ello les invita a que calquen una parte del problema o que lo resuelvan completo.
	Habilidad para invitar a los estudiantes a participar en la respuesta de un ejercicio.
	Saber cuándo hacer una nueva pregunta.
	Habilidad para interrumpir o ignorar la respuesta de un estudiante (Aly prefiere que también los demás estudiantes intenten resolverlo por ello “calla” a E1).
	Habilidad para preguntarles a los estudiantes si tienen dudas, una vez que termina de resolver un problema.
	Capacidad para resolver un ejemplo mediante preguntas enfocadas a eses contenido.
	Respuestas
	Capacidad para decidir qué respuestas de los estudiantes aceptar, cuáles interrumpir, cuáles ignorar o cuáles destacar.
	Capacidad para orientar una respuesta correcta a un lenguaje matemático aceptado en la matemática escolar, es decir, atendiendo o enfocado a una convención matemática.
	Aprovechar una respuesta incorrecta para hacer ver las consecuencias en el contenido.
	Aprovechar la respuesta de un estudiante, corregirla y utilizarla para explicar algún aspecto del contenido.
	Aprovechar la respuesta de un estudiante para corregir la de otro.
	Aprovechar la discusión que se presenta en el grupo con la intervención de varios estudiantes para hacerles notar algún aspecto incorrecto del contenido.
	Capacidad para retomar la aportación hecha por un estudiante anteriormente.
	Capacidad para ir guiando las respuestas de los estudiantes y dándoles ayudas explícitas para abordar el contenido que desea impartir el profesor en clase.
	Capacidad para transferir e interpretar la pregunta de los estudiantes y luego dar la respuesta a forma de explicación.
	Traducir
	Capacidad para explicarles el contenido matemático en lenguaje usual o bien, explicarles el contenido matemático de una manera más explícita o detallada.
	Capacidad para “traducir” a los estudiantes lo que está haciendo otro estudiante (eg. cómo está resolviendo E2 un ejercicio). O bien “traducir” alguna parte del libro de texto a su lenguaje usual.
	“Traducción”/ Transformación hasta llegar al término exacto que usa comúnmente en el grupo. (eg. “sale un sistema compatible determinado, es decir, que tiene solución única, es decir, que existe

		una única solución").
		Traducir a lenguaje usual un contenido matemático/ Traducir a lenguaje más cómodo para los estudiantes un contenido matemático.
	Hacer notar/remarcar/destacar	
		Saber cuándo remarcar, enfatizar, destacar, aclarar o reforzar cierta idea acerca del contenido a enseñar.
		Capacidad para re-distinguir (distinguir nuevamente) un aspecto relevante de un concepto o contenido específico.
		Remarcarles la caracterización de un concepto o de una propiedad o de una regla (Cramer).
		Hacerles notar la similitud que existe entre varios conceptos que está representando.
		Habilidad para hacer notar o explicar herramientas o aspectos relevantes en los datos de un problema.
		Capacidad para hacerles hincapié en que observen primero el problema (el determinante que hay que calcular) antes de hacer nada.
		Remarcar nuevamente la esencia de propiedades matemáticas (de determinantes).
	Alertar/Prevenir	
		Capacidad para alertar o prevenir a los estudiantes sobre situaciones susceptibles de que los estudiantes puedan cometer algún error (erróneamente dar por hecho que se cumple una propiedad matemática sobre ese contenido, tener cuidado al hacer una transformación elemental).
		Habilidad para plantearles una situación hipotética para prevenirlos de error.
		Hacerles señalamientos sobre errores que cometieron algunos estudiantes en el examen, el decir en el grupo puede alertar a los demás sobre los errores que se cometen y de alguna forma prevenirlos de ese error.
	Recursos	
		Habilidad/capacidad para prepararles distintos recursos a los estudiantes, materiales para que los estudiantes puedan comparar sus soluciones paso a paso (fotocopias con ejercicios propuestos; fotocopias con la solución de los ejercicios propuestos, resueltos paso a paso; fotocopias del examen resuelto; fotocopias de modelos de examen para que practiquen y ensayen antes del examen y posteriormente fotocopia con la solución a esos modelos de examen para que comparen si lo hicieron bien).
	Forma de presentarlo/representarlo	
		Introducir un concepto mediante la relación de conceptos matemáticos vistos anteriormente.
		Estrategia de pregunta-respuesta para relacionar unos conceptos con otros hasta llegar al deseado: Ej. Álgebra→Sistemas de ecuaciones→Matrices→Utilización de las matrices→Tipos de ejercicios→Problemas→Grafos→Matriz.
		Remarcarles a forma de resumen/concentrado para concluir un ejemplo o la presentación de un tema, los aspectos más relevantes

	del contenido que acaban de ver.
	Habilidad para recapitular aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento y aprovecharlos para orientar el contenido a enseñar posteriormente. (eg. Emi en la clase 1, da un repaso en el que menciona los tipos de matrices que han estado haciendo y lo aprovecha para continuar).
	Habilidad para "preparar terreno" para el siguiente ejemplo o contenido matemático.
	Habilidad para usar la analogía de un objeto matemático con un objeto común, para aproximarse más al lenguaje usual de los estudiantes y que logren entender "mejor" el significado de un contenido matemático.
	Capacidad para rescatar la idea de cierto contenido tras la digresión en su discurso.
	Usar una analogía o diferencia (la no conmutatividad del producto de matrices en comparación con los números reales) entre contenidos matemáticos previos y el actual para explicar este último.
	Comentarles la utilidad, aplicación, dirección/orientación de ese contenido en temas siguientes.
	Presentar/representar la definición de un concepto en forma genérica y no con números concretos.
	Habilidad para comentar, describir o explicar una parte o toda la estrategia de una demostración o de la solución de un ejemplo, ejercicio o problema.
	Usar el método de repetición del procedimiento para aclarar la duda de los estudiantes; o para reafirmar algunos aspectos del contenido.
	Habilidad para comparar distintos métodos de resolución de ejercicios, decirles otra forma de resolver un mismo ejercicio.
	Habilidad para usar la "comparación" entre algunas formas de hacer un ejercicio o entre varias representaciones, para hacerles notar a los estudiantes en lo que se deben fijar.
	Evocar a un tema, problema, ejercicio, ejemplo o procedimiento equivalente visto anteriormente en clase para que los estudiantes traigan a la mente ese contenido o se hagan una idea de cómo se resuelve el nuevo problema.
	Habilidad para usar un esquema (gráfico) para presentar/representar un contenido.
	Habilidad/capacidad para decidir no resolver totalmente un ejercicio sino sólo repetir el procedimiento (después de ver que ningún estudiante lo resolvió en casa, es decir, lo retoma e intenta explicar cómo se haría para que ellos lo hagan en casa y no dárselos ella resuelto).
	Capacidad para introducir el tema con algún dato histórico o breve reseña histórica de ese contenido matemático (o dar una breve reseña/anécdota histórica para contextualizar un ejemplo).
	Comparar la solución que obtuvieron en un ejemplo con la del libro de texto porque eso pudiera dar más confianza a los estudiantes en el resultado que han obtenido.
	Proponerles a los estudiantes que ellos planteen el problema, pero al final el profesor es el que termina planteándolo a través de preguntas

	a los estudiantes.
	Habilidad para aprovechar una propiedad, generalizarla y sacar otra nueva propiedad; o para aprovechar lo que ha visto acerca del menor para abordar lo del menor complementario.
	Hacer uso de un tema anterior (ecuaciones de segundo grado, regla de Rufini) para clarificar el contenido que está enseñando.
	Habilidad para enseñar por descubrimiento (heurística), en particular, para que los estudiantes descubran una fórmula con el apoyo del profesor(a) y no darles directamente la fórmula.
CC	Saber los contenidos que vienen en el libro de texto.
	Capacidad para saber qué temas se verán posteriormente en el curso.
	Saber qué contenido deben aprender los estudiantes aunque no aparezcan en el libro de texto (método de Gauss-Jordán).
CPG	**Conocimiento Pedagógico General.**
	Una forma motivante de presentar un concepto, una demostración, o un ejemplo.
	Anunciarles lo que hicieron o faltó ver en la clase de ese día y lo que verán en la próxima clase.
	Dejarles deberes.
	Conocimiento para controlar la indisciplina o distracción en el aula, para atraer la atención de los estudiantes. /Llamar la atención a los estudiantes cuando están haciendo cosas que no son de la clase.
	Habilidad para tranquilizarlos y motivarlos, haciéndoles algún(os) comentario(s) cuando ve a los estudiantes agobiados, decepcionados de ellos mismos o preocupados por el trabajo de clase que tienen que hacer; o porque se consideren incapaces de aprender un método para hacer ejercicios o procedimientos.
	Preparar a los estudiantes psicológicamente para que no se vayan a inquietar cuando vean que el "nuevo" ejemplo tiene mayor grado de dificultad o para que no se inquieten al saber que aún les falta abordar otros métodos en ese bloque o simplemente anunciarles el(los) tema(s) que verán en la clase para que los estudiantes se hagan una imagen del contenido que se va a trabajar en ese día o posteriormente.
	Una forma de motivar o exigir a los estudiantes que hagan una demostración, los ejemplos o los ejercicios (normales o de deberes).
	Una forma de preguntarles si les ha quedado claro lo que acaban de hacer (eg. ¿se fijaron cómo salen las cuentas?), si tienen más dudas (eg ¿alguna duda más?), de explicarles las dudas (explicando en la pizarra), ver si van entendiendo lo que han visto; acercarse al lugar de los estudiantes cuando levantan la mano porque tienen alguna duda; o porque ponen cara "rara".
	Tomar en cuenta a los que si hicieron sus deberes al momento de revisar en clase algún ejercicio que había dejado de deberes.
	Controlar al estudiante que si hizo sus deberes para que también trabajen otros estudiantes, al hacer o revisar los deberes en clase.
	Una forma de acercarse a revisar lo que han hecho los estudiantes y cómo lo han hecho: preguntándoles qué resultados han obtenido ellos, después de que un estudiante ha hecho el ejercicio en la pizarra; o antes de hacerlo ella en la pizarra.

Aspirando al rigor y calidad de los estudios cualitativos, esta primera identificación obtenida a través de revisión/comparación constante sirve para dar paso al segundo acercamiento, al análisis de los datos.

IV.1.2. Segundo acercamiento al análisis de la información

En el segundo acercamiento se hizo una primera selección de clases a analizar en profundidad. Una vez que contábamos con una primera identificación de los subdominios del CME queríamos aprovechar al máximo las que dieran más información a los objetivos de investigación, es decir, nuestro interés giraba en torno a profundizar el análisis en aquellas clases grabadas que más dieran cuenta de los subdominios del CME, así que en lugar de dar una segunda revisión a todas esas clases, teníamos que decidir cuáles de ellas merecían más la pena para ser analizadas con mayor detalle. Primero pensamos que sería mejor analizar aquellas en las que las profesoras evidenciaban mayor número de conocimientos. Luego nos dimos cuenta de que no era suficiente dar mayor relevancia a aquellas en las que había un mayor número de conocimientos sino que también interesaba que fueran aquellas en las que quedaran representados los distintos subdominios del CME (aquellas en las que hubiera más interacción entre la profesora y los estudiantes para tratar de tener evidencia de subdominios distintos al CCC y CC-En, que eran dos de los que comúnmente más aparecían en las clases, tomando en cuenta que cuando existe interacción entre la profesora y el estudiante se da una situación en la que los estudiantes tienen mayor oportunidad de participar cuando la clase es fundamentalmente de corte tradicional–instrumentalista) y en las que quedaran representados al menos todos los descriptores que habíamos obtenido en el primer acercamiento al análisis de la información. Posteriormente, notamos que también era importante que esas clases que seleccionáramos para analizar en profundidad fueran aquellas en las que además, quedaran representados los distintos subtemas que abordaron las profesoras durante el tema de Álgebra.

Cabe hacer notar que cuando en las clases de los dos casos de estudio había descriptores parecidos, se elegía para analizar en profundidad la clase del caso que presentara mayor riqueza de información de acuerdo con los criterios mencionados en el párrafo anterior. Por ejemplo, en el subtema de matrices teníamos cuatro clases en cada caso, pero en el caso de Emi se evidenciaban mayor número y distintos descriptores del CME en tres de ellas, mientras que en el caso de Aly sólo en una; por tanto, analizamos tres clases en profundidad de Emi y una de Aly para ese subtema. Contrariamente, en el último subtema en cada caso, analizamos en profundidad cuatro clases de Aly y dos de Emi, por las razones explicadas anteriormente.

A partir de los criterios de selección, finalmente analizamos en profundidad 8 de las 15 clases de cada profesora (es decir, 16 de las 30). De las 7 clases restantes de cada una, decidimos rescatar sólo los aspectos que nos parecían distintos y relevantes en comparación con los que ya teníamos registrados en los descriptores obtenidos en el primer acercamiento, así que sólo los consideramos para enriquecer los ya registrados; y los aspectos que fueran parecidos a los ya registrados, los reservamos para tenerlos en cuenta como apoyo para triangular la información en los resultados de la investigación.

Seguidamente, presentamos la distribución de clases grabadas de cada profesora acorde a cada subtema. Marcamos con una X las clases analizadas en profundidad y comentamos cuáles clases corresponden a cada subtema.

Emi	C1[2] X	C2	C3 X	C4 X	C5	C6 X	C7 X	C8 X	C9	C10	C11 X	C12	C13 X	C14	C15
Aly	C1	C2	C3	C4 X	C5	C6 X	C7 X	C8 X	C9	C10	C11 X	C12 X	C13	C14 X	C15 X

Emi: Subtema	**Clases grabadas**	**Clases analizadas**
Matrices	C1, C2, C3, C4 y C5	C1, C3 y C4
Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL)	C6, C7, C8 y C9	C6, C7 y C8
Programación Lineal	C10, C11, C12, C13, C14 y C15	C11 y C13

[2] Las Ci con $i=1,\ldots,15$ indican la etiqueta a cada una de las clases, de acuerdo al orden en que fueron grabadas.

Aly: **Subtema**	**Clases grabadas**	**Clases analizadas**
Matrices	C1, C2, C3 y C4	C4
Determinantes	C5, C6, C7, C8 y C9	C6, C7 y C8
Resolución de SEL	C10, C11, C12, C13, C14 y C15	C11, C12, C14 y C15

IV.1.3. Tercer acercamiento al análisis de la información

Una vez que se decidió en qué clases profundizar el análisis en términos de los criterios mencionados en el segundo acercamiento al análisis, en el tercer acercamiento, en esas clases se intenta focalizar y describir cada uno de los subdominios "visibles" del CME en las dos profesoras y se trata de considerar todos los aspectos que puedan aportar información sobre alguno de los subdominios. De esto se obtienen registros de evidencias que llamamos subdescriptores de los subdominios del CME. Éstos los plasmamos en las siguientes modelaciones del proceso de enseñanza de cada profesora.

Primero presentamos la modelación del proceso de enseñanza de la profesora Emi y luego la de la profesora Aly, para las cuales hicimos uso de la adaptación realizada al modelo de Ribeiro (2008) y del modelo de Ball et al. (2008), que mencionamos al inicio de este capítulo y que presentamos en el capítulo III en el apartado III.3.2.2.

Cabe mencionar que en las siguientes modelaciones del proceso de enseñanza de las dos profesoras, cuando haya subepisodios, éstos siguen la misma estructura interna que los episodios, pero cambiamos el tamaño de letra para diferenciarlos de los episodios. Además, la ubicación de los subepisodios depende de la propia naturaleza del objetivo general y/o particular y de la acción que realice el profesor para enseñar el contenido.

La estructura de la modelación del proceso de enseñanza para el análisis de cada clase consiste, *grosso modo*, en anotar primero la etiqueta y nombre del episodio, luego el objetivo (declarado por la profesora o interpretado por la investigadora de lo que pretende realizar para enseñar el contenido matemático), evento desencadenante (evento inicial del objetivo), la acción que realice el profesor para conseguir su objetivo, los conocimientos en acción (subdescriptores evidenciados del CCC, CEC, HM, CC-Es, CC-En y/o CC) y evento de término (evento final del objetivo).

IV.1.3.1. Modelación del proceso de enseñanza de la profesora Emi

Análisis de la clase 1 de Emi

[1.1] Introducción del concepto de matriz a través de dos ejemplos. (1-231)

Objetivo general: Introducir el concepto de matriz a través de dos ejemplos.

Evento desencadenante: Iniciar la clase presentando un ejemplo de Criptografía.

[A, 1.1] Emi presenta el concepto de matriz en la pizarra usando un ejemplo de Criptografía y otro referente a estudios sociológicos.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber la definición de una matriz. (1-231)

Saber usar términos y notación matemática que corresponden al concepto de matriz. (1-231)

CC-En
Decidir empezar con estos ejemplos para enfatizar/enfocar el concepto de matriz, con el de Criptografía y con el de Sociología. (35-231)

[1.1.1] Presentación de la operatividad y utilidad de las matrices en un ejemplo de Criptografía. (35-125)

Objetivo particular: Presentar la operatividad y utilidad de las matrices en un ejemplo de Criptografía.

[A, 1.1.1] Emi explica en la pizarra cómo se haría un ejemplo de Criptografía usando matrices.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber multiplicar matrices, aunque en este caso Emi se despista y comete un error numérico escribe 119 y debe ser 123 (el 123 es obtenido de (34)(2)+(11)(5)). (94-102)

Saber la operatividad de las matrices (producto de matrices XA=B y obtener X=BA^{-1} y saber la utilidad de la matriz inversa (para descifrar un mensaje en un ejemplo de Criptografía). En el ejemplo, Emi no obtiene la matiz inversa (pues por el momento no es el objetivo) y sólo comenta su funcionalidad (ayudar a descifrar el mensaje) en este ejemplo. (120-125)

HM
Capacidad de relacionar varios conceptos matemáticos hasta llegar al deseado.
Álgebra → Sistemas de ecuaciones → Matrices → Tipos de ejercicios → Problemas→ Grafos →

Matriz. (13-34)

CC-Es
Capacidad para escuchar e interpretar el pensamiento que expresan los alumnos en su lenguaje usual. En este caso, Emi pregunta qué es lo que recuerdan del tema anterior (sobre el planteamiento de problemas de sistemas de ecuaciones), E1 contesta que había que poner los datos en una especie de tabla y Emi completa esa respuesta traduciendo y transfiriendo lo que dijo E1 (Emi: *Que cuando nos plantean un problema tú quieres decir que es útil colocar los datos no de cualquier manera sino en una tabla que nos facilita la toma de datos y luego el planteamiento del problema* - Emi voltea a ver a E1 y le pregunta - *¿No es así?*). (1-12)

CC-En
Capacidad de transferir y orientar la respuesta del estudiante para conducir dicha respuesta a lo que ella explicará posteriormente. Emi acepta la respuesta de E1 y la completa utilizando términos o aspectos del contenido que usará posteriormente. En este caso, Emi pregunta qué es lo que recuerdan del tema anterior (sobre el planteamiento de problemas de sistemas de ecuaciones), E1 contesta que había que poner los datos en una especie de tabla y Emi completa esa respuesta traduciendo y transfiriendo lo que dijo E1 (Emi: *Que cuando nos plantean un problema tú quieres decir que es útil colocar los datos no de cualquier manera sino en una tabla que nos facilita la toma de datos y luego el planteamiento del problema* - Emi voltea a ver a E1 y le pregunta - *¿No es así?*). (1-12)

Introducir un concepto mediante la relación de conceptos matemáticos vistos anteriormente. Emi usa la estrategia de pregunta-respuesta para relacionar dichos conceptos. En este caso, Emi para introducir el concepto de matriz hace un recorrido deductivo, es decir, parte de lo general a lo particular relacionando varios conceptos matemáticos familiares a los estudiantes. Empieza por comentarles que el Álgebra es una parte de las matemáticas que durante muchos siglos se ocupaba de resolver ecuaciones hasta aterrizar en que a un grafo se le puede asociar una matriz (Álgebra → Sistemas de ecuaciones → Matrices → Tipos de ejercicios → Problemas→ Grafos → Matriz). (13-34)

Considerar la aplicación de matrices en el ejemplo de Criptografía para introducir luego la definición de matriz. (35-125)

A manera de cierre del ejemplo de Criptografía. Remarcarles a forma de resumen dos aspectos importantes: 1. Que las matrices no sólo sirven para guardar datos, para almacenar información, sino que con las matrices se pueden realizar operaciones que ayudan a proteger el descifrado de un mensaje y 2. Que con la ayuda de la matriz inversa se puede volver de nuevo al mensaje original. (120-125)

Evento de Término: Emi terminó de explicar la operatividad y utilidad de las matrices en el ejemplo de Criptografía.

[1.1.2] Presentación de la utilidad de las matrices en estudios sociológicos. (128-231)

Objetivo particular: Presentar la utilidad de las matrices en estudios sociológicos.

Evento desencadenante: Iniciar a hacer otro ejemplo (en este caso uno de aplicación de las matrices en sociología).

[A, 1.1.2] Emi "construye" junto con los estudiantes el ejemplo.

Conocimientos en acción:

CCC

Saber que las matrices tienen aplicación en varios campos, en particular en sociología y en economía. (35-231)

CC-En[3]
Emi da un prefacio para empezar este ejemplo. Aprovechar y a especie de repaso mencionarles los tipos de matrices que han estado haciendo (matrices asociadas a grafos y matrices asociadas a problemas). Su habilidad para orientar el contenido a enseñar (recapitula y luego continúa), en particular, para relacionar, para hacer un puente entre el ejemplo que acaba de hacer (sobre criptografía) y el que hará ahora (aplicado a Sociología). (128-138)

Hacerles énfasis en que vean que las matrices se usan en estudios sociológicos y hacerles notar su interés (de la profesora) de que vean que las matemáticas se aplican en campos muy diversos, en particular, en sociología; después de ver los dos ejemplos de aplicación de matrices. (221-226)

Proponer un ejemplo cercano a los estudiantes que luego utiliza para hacer ver la aplicabilidad de las matrices (del contenido matemático) en estudios sociológicos. Todo esto puede coadyuvar a que el alumno se familiarice con el concepto y tenga una mayor comprensión del concepto para aplicarlo. Posteriormente para que el estudiante vea que el concepto de matriz puede aparecer en distintos ámbitos, por ejemplo en estudios sociológicos. (136-223)

Hacerles notar que aunque las matrices se pueden estudiar en campos muy diversos, en este curso se centrarán más en el campo económico, es decir, en el uso de matrices en Economía. (226-231)

Evento de Término: Emi terminó de comentarles la aplicación de matrices en este ejemplo, en este caso, en un estudio sociológico.

[1.2] Presentación de la definición de matriz y explicar aspectos relevantes a ella (orden de la matriz: posición y forma de los elementos). (232-387)

Objetivo general: Presentar la definición de matriz y explicar aspectos relevantes a ella (orden de la matriz: posición y forma de los elementos).

Evento desencadenante: Empezar a dar la definición de matriz.

[A, 1.2.] Emi explica en la pizarra lo que es una matriz, luego explica lo que significa el

[3] En el CC-En aparecen directamente ("en bruto") los puntos de información evidenciados e identificados en las clases de las profesoras. Éstos nos dan pie, posteriormente a la redacción de los descriptores de este subdomio en términos de *saber* o *conocer*. Por ejemplo, el punto de información: "Emi da un prefacio para empezar este ejemplo. Aprovechar y a especie de repaso mencionarles los tipos de matrices que han estado haciendo (matrices asociadas a grafos y matrices asociadas a problemas). Su habilidad para orientar el contenido a enseñar (recapitula y luego continúa), en particular, para relacionar, para hacer un puente entre el ejemplo que acaba de hacer (sobre criptografía) y el que hará ahora (aplicado a Sociología)", nos da pauta para redactar el descriptor: Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente. En este subdominio en particular, el punto de información puede jugar un papel potente para dar más idea del descriptor y entenderlo, específicamente por tratarse del subdominio conocimiento de contenido y **enseñanza**, y ser precisamente la **enseñanza** la que estamos observando al realizar esta investigación, al considerar como marco de referencia el modelo del CME de Ball et al. (2008) **captado directamente de la práctica (enseñanza).** Inclusive, el hecho de que para analizar el CME lo hagamos a través de la **enseñanza** de las dos profesoras, tiene una implicación inmediata en los resultados, donde se pude ver que del subdominio que obtuvimos más descriptores fue el CC-En.

"orden de una matriz" en el caso genérico (mxn) y en casos concretos (5x4 y 4x5) y como localizar la posición de un elemento de la matriz conociendo los subíndices, por ejemplo localizar el elemento a_{24}.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber que la notación es muy importante en matemáticas. Que en una matriz a diferencia de una tabla es mejor decir elementos que datos y que la matriz se denota con paréntesis. (234-235); (241-244)

Saber que en una matiz de dimensión mxn, m y n son números naturales. (247-268); (258-364)

Saber que las matrices se denotan con letras mayúsculas y sus elementos con letras minúsculas. (284-287)

Saber que los elementos de la matriz tienen la forma a_{ij} con i=1, 2,…, m y j=1, 2,…, n y que si el orden de una matriz es mxn, entonces m indica el número de filas y n el número de columnas. (288-302)

Saber lo que en a_{ij}, los subíndices ij indican la posición del elemento en la matriz, la fila y la columna respectivamente. (309-313)

Saber escribir la forma genérica desarrollada de los elementos de una matriz de orden mxn $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$. (316-323)

Saber que los elementos de la matriz son números reales. (351-356)

Saber en una matriz de 4x5:
1. El número de filas y columnas que tiene esa matriz.
2. Que los elementos de la matriz pueden ser enteros y fraccionarios.
3. Que para localizar un elemento sólo hay que contar la fila y la columna para conocer su posición. (357-387)

CEC
Saber que al expresar el lenguaje matemático el error de los estudiantes puede provenir de la falta de precisión en el lenguaje en la matemática escolar. Saber que expresar el pensamiento matemático con un lenguaje adecuado tiene gran peso. En este caso, Emi les precisa que cuando se hable de matriz se hablará de elementos y no de datos. (234-235)

CC-Es
Interpretar las respuestas de los estudiantes y guiarlas para llegar a las palabras que ella quiere escuchar, por ejemplo: "¿En lugar de datos decimos elementos?" Pues pretende que los estudiantes aprendan a ir usando el vocabulario adecuado matemáticamente para las matrices, en particular, en la definición de matriz. (232-239)

Prever las necesidades de los estudiantes, en este caso Emi sabe que E9 puede tener problemas y acude a ella. Emi anticipa el problema de E9, en este caso, Emi se acerca a E9 para mostrarle en el libro de E9 - en Braille- el ejemplo que se va a hacer. (348-350)

CC-En

Aprovechar la respuesta de E7, aceptarla y completarla para dar una definición más precisa de matriz (Emi: *Decidme, ¿qué es una matriz?* E7: *Un conjunto de datos que se disponen en columnas*, Emi: *¿En lugar de datos decimos elementos?*, E7: *También*, Emi: *Sería prácticamente lo mismo pero más genérico, entonces es un conjunto ordenado de elementos dispuestos en filas y columnas*). (234-235)

Usar la analogía de una caja para aproximarse más al lenguaje usual de los estudiantes, para que logren entender "mejor" lo que significa "tamaño de la matriz o dimensión de la matriz" y remarcarles que es importante la dimensión que tenga la matriz. (247-268)

Introducir una nueva pregunta para hacerles ver que es equivocada la respuesta de un estudiante y orientar la pregunta a la respuesta que quiere escuchar. En este caso, Emi habla de que una matriz tiene dimensión mxn y les pregunta qué tipo de números serán m y n. E3 contesta que son enteros y entonces Emi les pregunta si tendrá sentido que m y n fueran números negativos o decimales, a lo cual E8 contesta que son naturales y Emi le confirma a E8 que en efecto son naturales. (258-264)

Transferir y orientar la respuesta del estudiante para llegar a lo que ella quiere (Emi: *¿Cuál es la matriz más pequeña? de tamaño*, E3: *mx1*, Emi: *¿mx1?, una columna, ¿1x1?*, E3: *Sí*). (268-275)

Comentarles varios ejemplos de dimensiones de matrices (2x1, 3x2, 4x5, 6x6, etc.) para que los estudiantes conozcan que existe una amplia gama, pero que las que trabajarán en clase serán dimensiones pequeñas, justificando que la teoría es la misma para todas. (279-283)

Comentarles, antes de hacer un ejemplo, que los elementos de la matriz tienen la forma a_{ij} con i=1, 2,…, m y j=1, 2,…, n y les remarca que si el orden de una matriz es mxn, entonces m indica el número de filas y n el número de columnas. (288-302)

Abordar un ejemplo de una matriz de orden 5x4 para hacerles notar que la matriz tendría en total 20 elementos distribuidos en 5 filas y 4 columnas. (303-309)

Hacerles notar que en la forma genérica desarrollada de los elementos de una matriz de orden mxn se ve de forma explícita cuáles son los elementos que componen la matriz, tanto en filas como en columnas, a diferencia de la forma abreviada $A=(a_{ij})$ con i=1, 2,…, m y j=1, 2,…, n . (324-327)

Orientar una respuesta correcta a un lenguaje matemático aceptado en la matemática escolar, es decir, atendiendo o enfocado a una convención matemática. En este caso E3 da una respuesta correcta respecto a la ubicación del elemento de la matriz con subíndices 2 y 3, E3 responde que ese elemento estaría en la tercera columna, segunda fila, pero Emi orienta esa respuesta para que se vayan acostumbrando a decir primero el número de filas y luego el número de columna en concordancia con esa convención matemática. (332-335)

Hacerles notar que los elementos de la matriz son números reales, antes de seguir avanzando en la presentación del contenido de matrices. (351-356)

Hacerles notar en el ejemplo de la matriz de 4x5 que:
1. El número de filas y columnas que tiene esa matriz.
2. Que los elementos de la matriz pueden ser enteros y fraccionarios.
3. Cómo localizar un elemento sabiendo los subíndices, es decir, hacerles ver que para localizar un elemento sólo hay que contar la fila y la columna para conocer su posición. (357-387)

Explicar el contenido en lenguaje usual. Una forma de saber localizar un elemento sabiendo los subíndices (comentarles que para conocer la posición del elemento a_{24} sólo hay que ir contando por fila y columna y ubicarlo). (380-387)

Evento de Término: Emi terminó de presentar la explicación del orden de una matriz en cuanto a la posición y forma de los elementos.

[1.3.] Presentación de los principales tipos de matrices (cuadrada, fila, columna, nula, triangular (superior e inferior), diagonal, escalar, unidad, traspuesta y opuesta). (388-723)

Objetivo general: Presentar los principales tipos de matrices (cuadrada, fila, columna, nula, triangular (superior e inferior), diagonal, escalar, unidad, traspuesta y opuesta).

Evento desencadenante: Empezar a presentar distintos tipos de matrices, en particular, se comienza viendo la matriz cuadrada.

[A, 1.3.] Emi explica en la pizarra varios tipos de matrices: cuadrada, fila, columna, nula, triangular (superior e inferior), diagonal, escalar, unidad, traspuesta y opuesta.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber lo que es una matriz cuadrada (matriz que tiene el mismo número de filas que de columnas). (391-394)

Saber escribir un ejemplo genérico de matriz cuadrada de orden 2 (400-413); y de orden 3 (416-428)

Saber la definición de diagonal principal de una matriz (elementos que ocupan una posición en la que el número de fila coincide con el número de columna). (444-446)

Saber lo que es una matriz fila (la que tiene una sola fila) y representarla de forma genérica $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$. (447-463)

Saber lo que es una matriz columna (la que tiene una sola columna) y representarla de forma genérica $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$. (464-472)

Saber lo que es una matriz nula (aquella en la que todos sus elementos sean cero). (483-486)

Saber lo que es una matriz triangular superior (matriz cuadrada en la que todos los elementos que están situados por encima de la diagonal principal son cero) y representarla en forma genérica. (511-528)

Saber lo que es una matriz triangular inferior (matriz cuadrada en la que todos los elementos que están situados por debajo de la diagonal principal son cero) y representarla (apoyándose en un esquema gráfico). (539-548)

Saber la definición de matriz diagonal (matriz cuadrada en la que todos los elementos que están fuera de la diagonal principal son cero). (559-561)

Saber lo que es una matriz escalar (los elementos de la diagonal principal son todos iguales). (581-582)

Saber lo que es una matriz unidad (matriz cuadrada en la que todos los elementos de la diagonal principal son unos). (609-610)

Saber distinguir entre una matriz escalar, diagonal y unidad. (612-613)

Saber trasponer una matriz de orden 2x3. (649-683)

CC-Es
Prever las dificultades y necesidades de los estudiantes. En este caso Emi anticipa que E9 por su deficiencia visual, podría tener problemas para entender o seguir lo que Emi va explicando (matriz cuadrada y diagonal principal), por ello se acerca con E9 y cuando Emi verifica que E9 va siguiendo lo que ella ha explicado hasta ese momento, entonces Emi continúa explicando en la pizarra. (434-439)

Prever las dificultades y necesidades de los estudiantes. En este caso Emi prevé que E9 por su deficiencia visual, podría tener problemas para entender y seguir la explicación de Emi, por eso ella se acerca a E9, para ayudarla a localizar este ejemplo en las notas que ella le prepara a E9 – algunas veces en Braille-, Emi apoya el dedo de E9 y le va señalando con su dedo, *está es la matriz unidad que vamos a ver ahora y si todos los números son distintos diagonal y si todos son iguales escalar*. Y cuando Emi verifica que E9 va siguiendo lo que ella ha explicado hasta ese momento, entonces Emi continúa explicando en la pizarra. (585-589)

CC-En
Transferir la respuesta de los estudiantes para orientarla, es decir, usar un lenguaje con conceptos matemáticos que le servirán posteriormente. En este caso, Emi acepta y completa la respuesta de E7 (Emi: *¿Qué será una matriz cuadrada*?, E7: *La que tiene forma de cuadrado*, Emi: *Muy bien, aquella matriz que tenga el mismo número de filas*

que de columnas eh). (391-394)

Hacerles notar, al empezar a presentar las matrices cuadradas que hasta ese momento habían trabajado con matrices rectangulares de orden mxn pero ahora en las matrices cuadradas como el número de filas coincide con el número de columnas, entonces no hablarán de orden mxn sino que sólo se dirá de orden n. (395-399)

Decidir poner un ejemplo genérico de matriz cuadrada de orden dos, después de comentarles cómo sería el orden de una matriz cuadrada (es decir, que si el número de filas coincide con el número de columnas es una matriz cuadrada). (400-413)

Abordar un ejemplo genérico de una matriz cuadrada de orden 2 y luego una de orden 3, esto último para hacer énfasis en la notación, en la forma genérica en la que están dispuestos los elementos y en lo que significan los subíndices. (400-428)

Usar una analogía entre el cuadrado y la diagonal del cuadrado y una matriz cuadrada y su diagonal principal, para que los estudiantes visualicen "mejor" la diagonal principal de una matriz, en este caso, Emi señala la diagonal principal en el ejemplo de matriz genérica cuadrada de orden 2 y de orden 3. (441-446)

Hacer preguntas a los estudiantes (que muchas veces se las contesta ella y otras pocas los estudiantes) para ir definiendo y representando la matriz fila (447-463) y la matriz columna (464-472).

Rescatar la idea de matriz fila y matriz columna y la expresan en términos cercanos a los estudiantes para tratar de que el estudiante fije la imagen de una matriz fila y una matriz columna, haciéndoles ver que se fijen en la orientación de los elementos, horizontal en la matriz fila y vertical en la matriz columna. (473-476)

Hacer mención de que puede haber matrices nulas de orden 2x2 y 3x3, después de decirles lo que es una matriz nula, para que el estudiante se haga una idea de las distintas dimensiones o tamaño que puede tener una matriz nula lo cual es relevante, pues hay que cambiar del $0 \in \mathbb{R}$ al $0 \in M$ (M es el conjunto de matrices), lo cual algunas veces no es tan trivial para los estudiantes, es decir, no es lo mismo 0 a $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. Luego, Emi escribe en la pizarra una matriz nula de orden nxn. (483-489)

Hacer preguntas e ir guiando (orientando) las respuestas para usar la analogía del $0 \in \mathbb{R}$ y la matriz nula ($0 \in M$) y hacerles notar la importancia, el papel que jugará la matriz nula en las operaciones con matrices, en particular, en la suma de matrices y para ello les recuerda el papel del 0 en la suma y producto en los números reales (que al sumarlo con otro número real lo deja invariante). (492-507)

Representar la definición de matriz triangular superior en forma genérica y usar como imagen la figura geométrica del triángulo, para hacer notar por qué se le llama triangular, en particular, triangular superior. Y posteriormente de forma análoga triangular inferior, Emi nuevamente usa la geometría para representar la matriz triangular inferior para visualizar la forma de dicha matriz (Emi dibuja un triángulo grande y dentro de él un cero grande por debajo de la diagonal principal). (511-548)

Decidir hacer un ejemplo de una matriz diagonal de orden 3x3 para que los estudiantes visualicen la forma que tiene una matriz diagonal. (562-569)

Decidir hacer un ejemplo de una matriz escalar de orden 3x3 y hacerles notar la forma que tiene para que los estudiantes visualicen la forma que tiene una matriz diagonal. (582-584)

Evocar conceptos equivalentes vistos anteriormente para presentar un nuevo concepto. Emi les recuerda el ejemplo que pusieron para una matriz escalar y aprovecha eso para presentarles la matriz unidad. (590-604)

Aprovechar una respuesta incorrecta para hacer ver las consecuencias que eso conllevaría en el contenido. Emi toma en cuenta la respuesta de E3 a pesar de que no es correcta a lo que ella pregunta, pero aprovecha para hacer ver qué pasaría en el caso que plantea E3, es decir, que si en la diagonal principal de una matriz escalar en lugar de unos fueran ceros entonces sería la matriz nula. (599-608)

Comentarles la dirección/orientación de ese contenido en temas siguientes. En este caso, justificarles que en esta clase están aprendiendo vocabulario de matrices (principales tipos de matrices) porque éstas están relacionadas con el tema de operaciones con matrices, que verán luego. (615-620)

Para presentar el concepto de matriz traspuesta, Emi inicialmente usa la analogía de una "matriz" con una caja y de "traspuesta" con darle vuelta a la caja y luego se apoya de una figura geométrica: el rectángulo. Emi para presentar la matriz traspuesta les hace la pregunta: ¿Qué pasa si a una caja le doy una vuelta? Para que los estudiantes entiendan "mejor" la idea de lo que diferencia una matriz de su traspuesta. En seguida se apoya de figuras geométricas para representar el concepto de matriz traspuesta. Representa a una matriz de mxn con un rectángulo y sobre la altura del rectángulo escribe m filas y al lado contiguo n columnas y les pregunta: ¿Qué pasa si yo le doy vuelta al rectángulo? Luego Emi dibuja la nueva forma que tendría el rectángulo al darle vuelta, Emi mira a los estudiantes esperando respuesta y E7 responde que se cambian las filas por las columnas (respuesta que Emi quería escuchar). (624-644)
Y después de darles la caracterización de una matriz traspuesta (que lo único que se cambia es la posición de los elementos, es decir, se cambia a las filas por las columnas), vuelve a remarcarles que trasponer una matriz es lo mismo que cambiar el rectángulo, tumbarlo y ponerlo de pie. (645-648)

Decidir hacer un ejemplo de matriz traspuesta, luego de explicarles cómo se obtiene la matriz traspuesta de una matriz. En este caso Emi se "inventa" un ejemplo con una matriz A de orden 2x3 con valores concretos (es decir, no con la matriz genérica de orden 2x3, para que con el ejemplo les quede claro a los estudiantes como trasponer una matriz y entonces el orden de A^t es 3x2. (649-683)

Luego Emi pretende mediante una pregunta (¿Cuándo va a coincidir una matriz con su traspuesta?) introducir el concepto de matriz simétrica, pero E5 le hace una pregunta: ¿Cómo asegurarse de que sea la traspuesta? A lo cual Emi da la respuesta (comparando que las filas de una sean las columnas de la otra) y trata de reforzarla con un nuevo ejemplo, una matriz de 3x3. Es decir, Emi ya no avanza con el siguiente concepto sino que nuevamente retoma lo de la matriz traspuesta y hace otro ejemplo (ahora para una matriz cuadrada de orden 3). (685-713)

Usar un esquema gráfico para indicar que la primera fila de A es ahora la primera columna de A^t y similarmente la segunda fila de A es ahora la segunda columna de A^t. En este caso Emi encierra en un rectángulo la primera fila y luego la segunda fila de A y después encierra la primera columna de A^t que sería la primera fila de A , para que noten como la primera fila de A ahora es la primera columna de A^t y similarmente encierra en un rectángulo la segunda columna de A^t que sería la segunda fila de A. (663-674)

Aceptar la respuesta de E5 (que la traspuesta también será una matriz cuadrada), la completa (les comenta que la traspuesta también será cuadrada y de orden 3) y les hace notar la estrategia para escribir la traspuesta (ir tomando cada fila de la matriz y anotarlas como columna de la traspuesta, respectivamente). (701-713)

CC
Saber que el tema de matriz traspuesta viene en el libro de texto. (622-624)

Evento de Término: Se terminó la clase y les comenta que ya sólo falta ver las matrices simétricas (en cuanto a la clasificación de matrices).

Análisis de la clase 3 de Emi

[3.1] Presentación de cómo se hace el producto de matrices a través de la "resolución" de dos ejemplos. (1-242)

Objetivo general: Presentarles cómo se hace el producto de matrices a través de la "resolución" de dos ejemplos.

Evento desencadenante: Iniciar la clase explicando cómo hacer el producto de dos matrices.

[A, 3.1] Emi explica en la pizarra cómo hacer el producto de: a) Dos matrices cuadradas de orden dos. b) Una matriz de orden 1x4 por una de orden 4x1.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber cómo se realiza el producto de dos matrices. (12-49)

Saber efectuar el producto de dos matrices cuadradas de orden dos, con números concretos. (55-96)

Saber cómo obtener el orden de una matriz (contando las filas y las columnas que tiene). (153-171); (186-188)

Saber efectuar el producto de dos matrices (una de orden 1x4 por otra de 4x1) con números concretos y por ello saber que la respuesta de E3 es correcta (E3 le dice cómo se efectuó el producto y el resultado de la matriz producto). (202-218)

CC-En
Saber cuándo destacar aspectos relevantes de un contenido matemático. En este caso, al empezar a explicarles cómo se hace el producto de dos matrices, Emi les remarca la condición que se debe cumplir para efectuar el producto de dos matrices (que debe coincidir el número de columnas de la primera con el número de filas de la segunda matriz). (5-11)

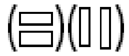
La forma de ir presentando/indicando cómo hacer el producto de dos matrices (12-49):

1. Separar la matriz A por filas y la matriz B por columnas.
2. Efectuar el producto de cada una de esas filas por cada una de esas columnas.
3. Decirles cómo efectuar ese producto (multiplicar una fila por una columna elemento a elemento y sumar esos productos).
4. Repetir el proceso para completar la primera fila de la matriz producto.
5. Repetir el proceso, la segunda fila por cada una de las columnas, dará la segunda fila de la matriz producto.
6. Repetir el proceso hasta llegar a la última fila por cada una de las columnas, da la última fila de la matriz producto.

Decidir hacer como primer ejemplo, el producto de dos matrices cuadradas de orden dos. (55-62)

Hacerles notar que una forma de garantizar que se puede hacer el producto es hacerlo con matrices cuadradas. (63-66)

Una vez que Emi divide en filas la primera matriz y en columnas la segunda matriz (=)(||), Emi calcula el primer elemento, luego se dirige a un estudiante en específico para que calcule el segundo elemento de la matriz producto, luego a otro estudiante el tercer elemento y a otro el último elemento. (67-96)

Usar un esquema gráfico  ;  para representar la división de la primera matriz en filas y de la segunda matriz en columnas, para efectuar el producto de esas dos matrices. Emi usa ese esquema gráfico porque considera que de esa forma los estudiantes visualizan "mejor" o se harán una buena imagen mental de que deben multiplicar una fila de la primera matriz por una columna de la segunda matriz al efectuar el producto de ellas. (68-69); (202-209)

Proponerles un ejercicio que ella misma se "inventa", les pide que escriban quien va a ser la matriz A, la matriz B, ver si se puede efectuar el producto AB y en ese caso qué significado tiene el producto. Luego Emi empieza a supervisar lo que van haciendo los estudiantes. Enseguida Emi regresa a la pizarra para explicar en la pizarra los resultados de los ejercicios, Emi le da un "empujoncito" a E8 para que le diga los elementos de la matriz A, posteriormente Emi les hace notar de qué orden es esa matriz. Después Emi pide a E4 le diga los elementos y el orden de la matriz B. Luego les hace notar que el orden de A es 1x4 y de B 4x1 y por tanto se puede hacer el producto AB, con ayuda de E3, Emi escribe el resultado de AB y les comenta el significado del resultado en este ejemplo (significa el número de combinaciones de vuelos desde Sevilla a Nueva York). (104-236)

Comentarles lo que quiere que hagan en este ejemplo (Emi: … *tenéis que calcular A por B y después de calcular A por B, […] quiero que me digan qué significado tiene el producto*). (129-132)

Involucrar a los estudiantes (que casi no participan) en la respuesta a este ejercicio (Emi: *A ver E8 me puedes decir cuáles son los elementos de la matriz A, vamos contando, ¿de Sevilla a Barcelona cuántos vuelos hay? Tres vuelos, entonces el primer elemento es 3, ¿de Sevilla a Dublín?*, E8: *Cero*, Emi: *Cero*). (139-148)

Comentarles una interpretación de la matriz A que acaba de escribir Emi en la pizarra con ayuda de E8. Emi les menciona que los elementos de esa matriz indican el número de vuelos que hay desde la ciudad de Sevilla a cada una de las ciudades que han llamado intermedias. (149-152)

Tras el hecho de que los estudiantes no le han podido decir correctamente cuál es el orden de la matriz A, Emi les hace notar que en este caso cada columna tiene un solo elemento pero se considera primera columna, segunda, tercera y cuarta, respectivamente; y que por lo tanto el orden de la matriz A es 1x4 porque tiene una fila y cuatro columnas. (153-171)

Hacerles notar el orden que tienen las dos matrices para que vean que en este caso sí se pueden multiplicar esas dos matrices (A tiene orden 1x4 y B tiene orden 4x1 entonces se puede hacer el producto y la matriz producto tendrá orden 1x1). (186-201)

Tratar de que los estudiantes vean que el resultado del producto tiene en algunos casos un significado concreto. A pesar de que en este ejemplo que ella se inventó para tal fin puede resolverse sin necesidad de usar matrices, pues es un ejemplo en el que se obtuvo el número de combinaciones de vuelos de Sevilla a Nueva York. (237-241)

Evento de Término: Emi terminó de explicar en la pizarra el segundo ejemplo de cómo hacer el producto de dos matrices (una matriz de orden 1x4 por una de orden 4x1).

[3.2] Consolidación de la forma de hacer el producto de dos matrices (Emi propone 3 ejercicios para que practiquen los estudiantes en clase). (243-467)

Objetivo general: Consolidar la forma de hacer el producto de dos matrices (Emi propone 3 ejercicios para que practiquen los estudiantes en clase).

Evento desencadenante: Empezar a proponer un nuevo ejercicio para que los estudiantes practiquen el producto de dos matrices cuadradas de orden tres.

[A, 3.2.] Emi propone a los estudiantes tres ejercicios que consisten en hacer productos de matrices (a) $A_{3x3}B_{3x3}$, b)$I_{3x3}A_{3x3}$, c)$A_{2x3}B_{3x4}$).

Conocimientos en acción:

CCC

Saber calcular el producto de dos matrices cuadradas de orden tres, a pesar de que Emi reconoce que se despistó cuando calcularon el primer elemento de la tercera fila de la matriz producto, pues el que habían calculado era el tercer elemento de la tercera fila y lo habían anotado como primer elemento de esa fila. (359-381)

CC-Es

Saber los errores comunes que pueden cometer los estudiantes al hacer el producto de dos matrices (multiplicar mal, sumar mal o confundirse de fila y columna). (400-406)

Saber que si usa esa analogía (la analogía del $1 \in \mathbb{R}$ y la matriz identidad, en cuanto a que al multiplicarlo por otro lo deja invariante) los estudiantes pueden entender "mejor" el papel de la matriz identidad en matrices. (425-426)

CC-En

Decidir qué ejercicios proponerles para que practiquen cómo se hace el producto de dos matrices. a) En el primer ejercicio propone dos matrices cuadradas pero de orden mayor, de orden 3. b) En el segundo ejercicio propone la matriz identidad de orden tres y otra matriz de orden 3x3 para que noten lo que le pasa a una matriz que es multiplicada por la matriz identidad. c) En el tercer ejercicio les propone dos matrices que no son cuadradas, una de orden 2x3 y la otra de orden 3x2 para que también practiquen hacer el producto de dos matrices que no son cuadradas. (243-267)

Acercarse a los estudiantes que le piden ayuda para poder empezar a hacer el ejercicio que les ha pedido que hagan. E1 no sabía cómo empezar a hacer el producto, pide ayuda a Emi, y Emi le comenta que tiene que multiplicar la primera fila por la primera columna y que luego tiene que ir multiplicando cada una de las filas por cada una de las otras columnas. (268-274)

Acercarse a los estudiantes que le piden ayuda para poder empezar a hacer el ejercicio que les ha pedido que hagan. E13 no sabía cómo empezar a hacer el producto, pide ayuda a Emi, entonces E13 con su ayuda calcula los valores de la primera y segunda fila de la matriz producto, pero al llegar al cálculo de los valores de la tercera fila de la matriz producto, E13 se siente perdida con "tantas filas, columnas y sumas de productos", entonces Emi vuelve a rescatarla y finalmente ayuda a E13 hasta terminar de hacer el producto completo de esas dos matrices. (275-281)

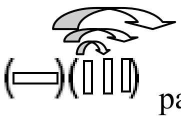
Hacerle notar a E13 que la primera fila de la matriz producto se completa multiplicando la primera fila de la primera matriz por cada una de las columnas de la segunda matriz, con la intensión de que E13 lo tenga presente cuando complete la segunda fila de la matriz producto. (295-297)

Tratar de situar a E13, de hacerle ver de manera general, lo que han hecho para efectuar el producto. Emi intenta que E13 se fije que obtuvieron ya la primera y segunda fila de la matriz producto y que por tanto, la tercera fila se obtendrá de manera similar, es decir, para que por analogía, E13 calcule los elementos de la tercera fila de la matriz producto. (330-345)

Emi, al ver que E13 se queda callada y no hace nada a pesar de que ella trató de situarla para hacerle ver de manera general, lo que han hecho para efectuar el producto, Emi le repite cómo se obtiene la primera fila y segunda fila de la matriz producto y por tanto le indica lo que tiene que hacer (explícitamente indicándole los productos con flechas que van de la tercera fila de la primera matriz a cada una de las columnas de la segunda matriz), para calcular los valores de la tercera fila de la matriz producto. (347-355)

Tras la segunda equivocación de E13 (de multiplicar sólo el 2 por cada elemento de la columna, y no multiplicar uno a uno, número-a-número de la fila por número-a-número de la columna) Emi finalmente le termina el ejercicio a E13 en su cuaderno. (368-381)

Enseñar a precisar el lenguaje, a que se acostumbren a localizar/ubicar un elemento: a) Indicando la posición exacta diciendo fila y columna y b) que sea en ese orden, primero la fila y luego la columna. (388-395)

Usar el esquema gráfico  para hacerles notar que deben seguir un orden establecido para hacer el producto de dos matrices para no confundir la fila y columna que deben multiplicar. (403-406)

Comentar la analogía del 1∈□ y la matriz identidad. Comentarles que en las matrices, la matriz identidad tiene un papel parecido al 1∈□ en cuanto a que al multiplicarlo por otro (en este caso por otra matriz cuadrada del orden de la matriz identidad) lo deja invariante. (425-426)

Repetir el procedimiento de cómo se hizo cierto cálculo para aclarar la(s) duda(s) de los estudiantes. En este caso Emi ve que E15 tiene duda sobre el 10 (valor obtenido de multiplicar la primera fila, segunda columna) y Emi repite las operaciones que se realizan para obtener ese valor y que E15 vea que efectivamente se obtiene ese valor. (432-439)

Aprovechar el último ejercicio en el cual las matrices no son cuadradas para hacer notar (441-458):

1. Cuándo se pueden multiplicar dos matrices (cuando el número de filas de la primera matriz coincide con el número de columnas de la segunda matriz).
2. De qué orden va a quedar la matriz producto (en este caso, como A es de orden 2x3 y B de orden 3x4 entonces la matriz producto queda de orden 2x4).
3. Que si las matrices que van a multiplicar no son cuadradas pero cumplen la condición para poder multiplicarlas, es decir, que es posible hacer el producto AB, si se cambia el orden del producto BA entonces ya no se puede hacer el producto. Es decir, intenta que vean que el producto de matrices no es conmutativo. En este caso como A es de orden 2x3 y B de 3x4, AB es posible pero BA no es posible porque no se cumple la condición de que el número de filas de la primera coincida con el número de columnas de la segunda.

Saber qué ejercicios dejarles de deberes (unos similares a los hechos en clase). (464-466)

Evento de Término: Emi terminó de explicar en la pizarra los resultados de los ejercicios sobre producto de matrices y con ello se termina la clase.

Análisis de la clase 4 de Emi

[4.1] Presentación de las principales propiedades de las operaciones con matrices. (2-564)

Objetivo general: Presentar las principales propiedades de las operaciones con matrices.

Evento desencadenante: Iniciar la clase presentando las principales propiedades de las operaciones con matrices.

[A, 4.1] Emi hace algunos comentarios como prefacio antes de empezar a presentar las propiedades de la suma y del producto de matrices.

Conocimientos en acción:

CC-En
Usar como estrategia para introducir las propiedades de las operaciones con matrices la familiaridad que pudieran tener los estudiantes con las propiedades de los números reales, para hacerles notar que algunas de las propiedades de matrices se derivan directamente de las propiedades de los números reales. (13-17)

Emi retoma el proceso de cómo se hace la suma de 2 matrices, antes de dar las propiedades en la suma de matrices. (18-42)

Emi usa la analogía de la suma en los números reales con la suma de matrices. (13-42)

CPG
Controlando la indisciplina. Al escuchar desorden en el grupo, Emi les dice que ese contenido lo tienen en el libro, así que no es necesario que lo copien y les pide que atiendan al explicación que ella hará y estén en silencio. (7-9)

Evento de Término: Emi terminó el prefacio y empezará a explicar las principales propiedades de la suma de matrices.

[4.2] Presentación de las principales propiedades de la suma de matrices. (18-118)

Objetivo general: Presentar las principales propiedades de la suma de matrices.

Evento desencadenante: Iniciar la presentación de las principales propiedades de la suma de matrices.

[A, 4.2] Emi explica en la pizarra las principales propiedades de la suma de matrices.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber en qué consiste la propiedad asociativa para la suma de las matrices. (46-59)

Saber en qué consiste la matriz nula en matrices (aquella en la que todos sus elementos son cero). (66-74)

Saber en qué consiste la matriz opuesta en matrices. (79-88)

Saber en qué consiste la propiedad conmutativa para la suma de las matrices. (100-109)

CC-En
Para presentarles la propiedad asociativa para la suma de matrices, Emi les comenta la analogía de la propiedad asociativa en la suma de los números reales y en las matrices. (46-59)

Explicar por qué se cumple la propiedad asociativa en las matrices (en términos de similitud con los números reales). (60-65)

Para presentarles la matriz nula en la suma de matrices, Emi les comenta la analogía del elemento neutro en la suma de los números reales y en las matrices. (66-74)

Para presentarles la matriz opuesta en la suma de matrices, Emi les comenta la analogía del elemento opuesto en la suma de los números reales y en las matrices. (79-88)

Para presentarles la propiedad conmutativa para la suma de matrices, Emi les comenta la analogía de la propiedad conmutativa en la suma de los números reales. (100-106)

Explicar por qué se cumple la propiedad conmutativa en las matrices (en términos de similitud con los números reales). (110-112)

A forma de resumen y para terminar de presentar las principales propiedades de la suma de matrices, Emi les remarca, en concreto, las implicaciones de esas propiedades que acaba de explicarles. (114-118)

Evento de Término: Emi terminó de presentar a los estudiantes las principales propiedades de la suma de matrices.

[4.3] Presentación de las principales propiedades del producto de un escalar por una matriz. (119-187)

Objetivo general: Presentar las principales propiedades del producto de un escalar por una matriz.

Evento desencadenante: Iniciar la presentación de las principales propiedades del producto de un escalar por una matriz.

[A, 4.3] Emi explica en la pizarra las principales propiedades del producto de un escalar por una matriz.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber la definición del producto de un escalar por una matriz. (122-133)

Saber por qué se cumple la propiedad $\lambda(A+B)= \lambda A+ \lambda B$ (por como están definidas la suma de matrices y el producto por un número real). (143-146)

Saber la definición del producto de un escalar por una matriz, la suma y sus propiedades en las matrices (164-165)

HM
Emi les anuncia que este tema está relacionado con el de “estructuras algebraicas”, que no se ve en esta especialidad de bachillerato (Ciencias Sociales) pero sí en el Científico Tecnológico. (169-187)

CC-Es
Prever que los estudiantes pueden comprender “mejor” la definición del producto de un número por una matriz si se la dice en lenguaje común. (132-133)

Prever que los estudiantes pueden comprender “mejor” la propiedad $\lambda(A+B)= \lambda A+ \lambda B$ si se la dice en lenguaje común. (138-140)

Prever que los estudiantes pueden comprender “mejor” la propiedad $(\lambda\mu)A= \lambda(\mu A)$ si se la dice en lenguaje común. (161-163)

CC-En
(Revoicing y traducción) Explicarles la definición del producto de un número real por una matriz en lenguaje común, haciendo preguntas a los estudiantes. (119-133)

Hacer notar que en el producto de un escalar por una matriz existe una multiplicación de 2 números reales para luego anunciarles las propiedades de escalares por matrices. (134-137)

Explicarles la propiedad $\lambda(A+B)= \lambda A+ \lambda B$ en lenguaje común. (138-140)

Determinar el momento oportuno para aprovechar y comentarles una nueva propiedad. (147-150)

Explicarles la propiedad $(\lambda\mu)A= \lambda(\mu A)$ en lenguaje común. (161-163)

Comentarles la utilidad de las propiedades (las aplicarán cuando vean ecuaciones matriciales). (184-187)

Evento de Término: Emi terminó de presentar a los estudiantes las principales propiedades del producto de un escalar por una matriz.

[4.4] Presentación de las principales propiedades del producto de dos matrices. (188-562)

Objetivo general: Presentar las principales propiedades del producto de dos matrices.

Evento desencadenante: Iniciar la presentación de las principales propiedades del producto de dos matrices.

[A, 4.4] Emi explica en la pizarra las principales propiedades del producto de dos matrices.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber cómo se hace el producto de dos matrices. (195-346)

Saber la fórmula del producto de matrices. (305-316)

Saber la fórmula abreviada del producto de matrices usando el símbolo de Σ (c_{ij}= Σ $a_{ik}b_{kj}$ desde k=1 hasta n) . (305-316)

Saber en qué consiste la propiedad distributiva en matrices, es decir, que A(B+C)=AB+AC ó (A+B)C=AC+AB. (389-396)

Saber que en el producto de matrices no se cumple en general la propiedad conmutativa. (435-439)

Saber en qué consiste la matriz identidad (en la diagonal principal unos y fuera ceros). (483-485)

Saber que AI=IA=A. (486-488)

Saber que para calcular la matriz inversa será necesario hacer varios cálculos y no sólo una división o fracción como en el caso del inverso multiplicativo en los números reales. (534-539)

CEC
Saber que por la propia forma de hacer las operaciones, es decir, por la propia forma en que están definidas las operaciones con matrices, habrá algunas propiedades de los números reales que se trasmitan al producto de matrices y otras no. (350-366)

Saber que la multiplicación de matrices es una operación binaria, y por tanto en caso de que haya que multiplicar tres matrices, se debe anotar paréntesis o simplemente tomar en cuenta que se debe hacer primero el producto de dos matrices y luego el resultado por la otra matriz, es decir, saber que no hay forma de multiplicar tres matrices simultáneamente. (411-419)

Saber que al calcular la matriz inversa de otra, el error de los estudiantes puede provenir de la extensión del inverso multiplicativo en los números reales a la matriz inversa, en cuanto a que pueden pensar que como todos los números reales excepto el cero tienen inverso multiplicativo, en las matrices sea sólo la matriz nula la que no tenga inversa, pero en las matrices, además de la matriz nula (que sería similar al cero en los reales), habrá otras matrices que no tengan inversa. (556-562)

CC-Es
Prever que los estudiantes al involucrarse más con la fórmula abreviada del producto de matrices y ver que es más compleja (no sólo multiplicar número a número y ya), se hagan una imagen de que algunas propiedades de la suma y producto en los números

reales se transmitirán al producto de matrices y otras no. (350-366)

Prever que los estudiantes pueden comprender “mejor” la propiedad distributiva en matrices si se la dice en lenguaje común. (397-399)

Prever que los estudiantes se pueden confundir si Emi anota el orden de cada una de las matrices, al anotar las propiedades del producto de matrices, por ello no lo anota y les aclara que se supone que las matrices tienen el orden necesario para efectuar el producto. (423-427)

Prever que algún estudiante no sepa o no recuerde en qué consiste la propiedad conmutativa en los números reales. (430-434)

Prever que a los estudiantes les puede quedar más clara la idea de que no se cumple la conmutatividad en el producto de matrices, simplemente usando un ejemplo concreto en el que a partir del orden se ve que no se cumple, más que ponerse a desarrollar una demostración formal. (442-454)

Prever que los estudiantes pueden comprender “mejor” la definición de una matriz identidad si se la dice en lenguaje común. (483-485)

CC-En
Al presentarles el producto de dos matrices, hacerles notar/remarcarles que para hacer el producto de dos matrices debe coincidir el número de columnas de la primera matriz con el número de filas de la segunda, es decir, hacer hincapié en la importancia del orden de las matrices para poder multiplicarlas. (195-208)

Esquema gráfico para hacer el producto de dos matrices, en la primera matriz dibuja sólo líneas horizontales para representar filas y en la segunda puras líneas verticales indicando columnas, Emi usa este esquema gráfico para que tengan una mayor visualización de que para hacer el producto de las dos matrices hay que multiplicar “filas por columnas”. (218)

Hacerles notar por qué han visto en clase la fórmula abreviada para multiplicar dos matrices (en términos de hacerles ver que la fórmula es compleja, es decir, que no es tan sencillo cómo simplemente multiplicar número a número, como por ejemplo en el caso del producto de un escalar por una matriz). (350-366)

Para presentarles la propiedad distributiva en matrices, Emi les comenta la analogía de la propiedad distributiva en matrices de los números reales. (375-387)

Explicarles en qué consiste la propiedad distributiva en lenguaje común. (397-399)

Comentarles cómo y cuándo usar la propiedad distributiva en matrices (en ecuaciones matriciales). (400-406)

Hacerles notar que es importante el orden de las matrices para poder multiplicarlas, pero que ella no lo anotará, dará por hecho que al escribir las matrices en las propiedades se supone que cumplen la condición del orden para multiplicarlas. (423-427)

Para presentarles la propiedad conmutativa en el producto de matrices, Emi les comenta la analogía de la propiedad conmutativa en la suma y producto en los números reales. (430-434)

Antes de ver la "no conmutatividad" en el producto de matrices, Emi les comenta la propiedad conmutativa en los números reales. (428-434)

Para mostrar fácilmente sin necesidad de hacer una demostración formal de que no se cumple la conmutatividad en el producto de matrices, Emi les da un ejemplo para hacerles notar que simplemente al cambiar el orden de las matrices, ya no es posible hacer el producto, si A tiene orden 2x3 y B tiene orden 3x4, entonces se puede hacer AB pero no BA. (442-454)

Al explicar las propiedades del producto de dos matrices, remarcarles que hay que tener cuidado en el orden de las matrices para poder multiplicarlas. (457-460)

Explicarles en qué consiste la matriz identidad en lenguaje común. (483-485)

Evocarles un ejercicio equivalente que hicieron anteriormente al multiplicar una matriz A por I y ver que AI=A. (489-491)

Para terminar de presentarles la matriz identidad, Emi les comenta la analogía entre la matriz identidad en matrices y el 1 de los números reales. (492-499)

Para presentarles la definición de matriz inversa, Emi les comenta la analogía entre la matriz inversa en matrices y la propiedad del inverso multiplicativo de los números reales. (500-502); (508-533)

Hacerles notar la diferencia entre el inverso multiplicativo de los números reales y la matriz inversa en matrices, para hacerles notar que para calcular la matriz inversa será necesario hacer varios cálculos y no sólo una división o fracción como en los números reales. (534-539)

Hacerles notar la analogía entre el inverso multiplicativo en los números reales y la matriz inversa en cuanto a que la matriz nula no tiene inversa por la misma razón que el cero no tiene inverso multiplicativo, pues a.0=0 en los números reales y en matrices A.0=0 (este 0 en matrices es la matriz nula). (541-555)

Remarcarles la diferencia del inverso multiplicativo en los números reales y la matriz inversa en cuanto a que todos los números reales excepto el cero tienen inverso multiplicativo pero en las matrices, además de la matriz nula (que sería similar al cero en los reales), habrá otras matrices que no tengan inversa. (556-562)

Evento de Término: Emi terminó de presentar a los estudiantes las principales propiedades del producto de dos matrices.

[4.5] Presentación del primer método para calcular la matriz inversa (método de Gauss-Jordán). (565-881)

Objetivo general: Presentar el primer método para calcular la matriz inversa (método de Gauss-Jordán).

Evento desencadenante: Iniciar la presentación del método de Gauss-Jordán para calcular la matriz inversa.

[A, 4.5] Emi explica en la pizarra el método de Gauss-Jordán.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber que al hacer la transformación elemental de cambiar una fila por otra, están cambiando la matriz, ya no es la misma matriz inicial. (576-577); (596-598)

Saber la notación matemática para denotar la transformación elemental de cambiar una fila por otra ($F_i \rightarrow F_j$). (579-583); (590-591)

Saber realizar la transformación elemental de intercambiar dos filas en una matriz. (585-594)

Saber que en una matriz, con un número de filas mayor que dos, las filas se pueden intercambiar entre ellas mediante transformaciones. (600-609)

Saber que al hacer la transformación elemental de multiplicar toda una fila por un mismo número, se realiza dicha transformación sólo a esa fila y no a toda la matriz. (613-615)

Saber aplicar la transformación elemental de multiplicar toda una fila por un mismo número en un ejemplo concreto (una matriz de orden 2x2). (616-626)

Saber la utilidad de las transformaciones elementales: 1) Hallar la matriz inversa, 2) Determinar el rango de una matriz y 3) Resolver sistemas de ecuaciones. (628-634)

Saber la notación matemática para denotar la transformación elemental de sumar a una fila otra multiplicada por un número (F_i+aF_j). (635-638)

Saber aplicar la transformación elemental de sumar a una fila otra multiplicada por un número en un ejemplo concreto (una matriz de orden 2x2). (641-661)

Saber hacer los cambios y las transformaciones elementales necesarias para obtener la inversa, en sí, saber aplicar el método de Gauss-Jordán. (735-784); (799-809); (834-843); (850-851)

CC-Es
Emi sabe que la teoría cansa y aburre a los estudiantes. (568-569)

Prever que los estudiantes se pueden equivocar al hacer la transformación elemental de sumar a una fila otra multiplicada por un número, es decir, que no se fijen bien en cuál es la fila que van a cambiar. (642-646)

Prever que los estudiantes se pueden equivocar al hacer las transformaciones elementales para calcular la matriz inversa y les remarca que tienen que realizar las transformaciones elementales a las dos matrices (A|I) simultáneamente, por ejemplo, si cambian la fila de A entonces hay que cambiar la fila completa, incluyendo la fila correspondiente de I. (730-732); (744-746)

CC-En
Utilidad. Emi les comenta para qué hay que saber las transformaciones elementales (para calcular la matriz inversa). (573-575)

Al explicar las transformaciones elementales, Emi les hace notar que al hacer la transformación elemental de cambiar una fila por otra, están cambiando la matriz, ya no es la misma matriz inicial. (576-577)

Hacerles notar que al hacer la transformación elemental de multiplicar toda una fila por un mismo número, se realiza dicha transformación sólo a esa fila y no a toda la matriz. (613-615)

Hacerles notar en un ejemplo concreto de una matriz de orden 2x2 que al hacer la transformación elemental de multiplicar toda una fila por un mismo número, afecta sólo a esa fila y a la otra fila no le pasa nada. (625-626)

Comentarles la utilidad de las transformaciones elementales: 1) Hallar la matriz inversa, 2) Determinar el rango de una matriz y 3) Resolver sistemas de ecuaciones. (628-634)

Antes de introducir el método de Gauss-Jordán para calcular la matriz inversa, Emi les remarca nuevamente la utilidad de las transformaciones elementales para calcular la matriz inversa. (683-686)

Emi les describe la estrategia para calcular la matriz inversa en un ejemplo que ella se ha inventado con una matriz de 2x2 con el método de Gauss-Jordán, empezando con una pregunta que ella misma contesta. (699-722)

Al hacer el ejemplo, remarcarles que tienen que realizar las transformaciones elementales a las dos matrices (A|I) simultáneamente, por ejemplo, si cambian la fila de A entonces hay que cambiar la fila completa, incluyendo la fila correspondiente de I. (730-732); (744-746)

Remarcarles nuevamente la estrategia/idea general para conseguir la matriz inversa y les hace notar lo que se ha logrado en el primer objetivo (obtener el primer 1 de la matriz identidad a la que quiere llegar para hallar la matriz inversa). (752-765)

Emi repite el proceso de una transformación elemental ante una situación en la que los estudiantes están en “estado de shock”, como deslumbrados e impresionados porque no entienden los cambios y transformaciones elementales que está haciendo Emi en la pizarra para conseguir la matriz inversa con el método de Gauss-Jordán. (778-789)

Emi repite lo que se ha hecho hasta ese momento para contestar la pregunta de E5. (790-797)

Cada vez que Emi va consiguiendo un cambio para obtener la matriz inversa, ella se detiene y repasa lo que se ha hecho hasta el momento y luego seguir en la solución del ejercicio. (812-817)

Tras una *situación de tensión* Emi decide terminar el ejercicio, se trata de una situación en la que por un lado los estudiantes no estaban entendiendo lo que Emi hacía en la pizarra y por otro lado la presión de Emi de que ya tenía que terminar pues el tiempo para esa clase había terminado hace varios minutos. (844-849)

Emi concluye el ejemplo remarcándoles lo que se tenía y a lo que se llegó $(A|I)\rightarrow(I|A^{-1})$. (855-859)

Remarcar o repasar de forma general lo que se hizo, a manera de cierre del ejemplo. (870-881).

Decidir qué dejarles de deberes. En este caso, dada la *situación de tensión* que se suscitó al hacer el ejemplo de hallar la inversa, Emi decide dejarles deberes sobre las propiedades de las operaciones con matrices pero no de cálculo de matriz inversa. (882-887)

CPG
Control de indisciplina y motivación. Emi controla la indisciplina en el grupo y luego trata de motivarlos para continuar y terminar la teoría de matrices. (567-572)

Tranquilizar y motivar. Conocimiento para tranquilizar a los estudiantes y motivarlos, en *situaciones de tensión*, tener frases como: "si practican entonces podrán hacer los ejercicios similares a estos con facilidad". (860-881)

Evento de Término: Terminó la clase y con ello terminó de presentar a los estudiantes un ejemplo en el que calculó la matriz inversa con el método de Gauss-Jordán para una matriz de orden 2x2.

Análisis de la clase 6 de Emi

[6.1] Consolidación del tema de matrices apoyándose de fotocopias con ejercicios propuestos y soluciones a ejercicios anteriores para que practiquen y se preparen para el examen de este tema. (1-91)

Objetivo general: Consolidar el tema de matrices, proporcionándoles materiales (fotocopias) con ejercicios propuestos y soluciones a ejercicios anteriores para que practiquen y se preparen para el examen de este tema.

Evento desencadenante: Iniciar la clase proporcionándoles materiales (fotocopias) para que se preparen para el examen del tema de matrices.

[A, 6.1] Emi suministra fotocopias con ejercicios propuesto y soluciones a ejercicios anteriores para que practiquen y se preparen para el examen del tema de matrices.

Luego Emi les comenta aspectos relevantes sobre el contenido que aparece en las fotocopias.

Conocimientos en acción:

CC-En
Recursos: Proporcionarles en fotocopias las soluciones a ejercicios propuestos anteriormente en las que aparecen detalladas las soluciones paso a paso con la intención de que aquél que los haya resuelto, revise sus soluciones. O también para que sirva de motivación para el que aún no empieza a hacerlos, que sepa que ahí puede mirar cómo se resuelve. Es decir, darles un apoyo/recurso a los estudiantes para que comprueben su aprendizaje sobre ese contenido matemático. (1-12)

Saber qué ejercicios proponerles en la nueva fotocopia. Emi, después de proporcionarles una fotocopia en la que detalla paso a paso las soluciones a ejercicios anteriores, les da una nueva fotocopia con ejercicios propuestos donde ha incluido un poco más de laboriosidad y complejidad (matrices de orden 3). (13-17)

Explicarles la estrategia de solución del ejercicio (aplicar: una matriz y su inversa para proteger una palabra). (38-69)

CPG
Controlando la indisciplina. Es una clase en viernes después del recreo, motivo por el cual los estudiantes están más inquietos y les cuesta trabajo estar en silencio, Emi intenta callarlos para poder trabajar. (18-20)

Emi sabe que comentarles que ya se aproxima el examen puede motivar a los estudiantes a hacer los ejercicios de ese contenido matemático (matrices). (70-79)

Evento de Término: Emi terminó de hacer los comentarios sobre los apoyos (fotocopias) que les proporcionó para que se preparen para el examen del tema de matrices.

[6.2] Presentación del tema de Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL), en particular, el planteamiento del problema. (92-529)

Objetivo general: Presentar el tema de Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL), en particular, el planteamiento del problema. (92-529)

Evento desencadenante: Iniciar el primer ejemplo de SEL para practicar cómo se hace el planteamiento del problema.

[A, 6.2] Emi les explica cómo ir obteniendo cada una de las ecuaciones, a través de ayudas que ella les va proporcionando, es decir, los conduce/orienta poco a poco hasta llegar al planteamiento del problema.

[6.2.1] Presentación del primer ejemplo de SEL para practicar cómo se hace el planteamiento del problema. (92-322)

Objetivo particular: Presentar un primer ejemplo de SEL para practicar cómo se hace el planteamiento del problema.

[A, 6.2.1] Emi les explica en la pizarra cómo ir obteniendo cada una de las ecuaciones.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber que no es necesario convertir las áreas en otra unidad de medida, siempre y cuando usen las mismas unidades de medida en todas las ecuaciones. (252-254)

CC-Es
Prever que los estudiantes no saben o no recuerdan a cuánto o a qué equivale un área (un decámetro cuadrado = cien metros cuadrados). (156-157)

Prever que los estudiantes pueden entender “mejor” el enunciado del problema si se los explica en lenguaje común, en lenguaje que sea más familiar a los estudiantes. (153-162)

Prever que los estudiantes pudieran hacerse la imagen inadecuada de que los problemas que resolverán en clase serían del tipo del primer ejemplo (“antiguos y difíciles”) y por ello Emi les aclara eso. (225-229)

CC-En
Usar una mini-reseña histórica/anécdota histórica para empezar el tema y luego los sitúa y orienta el tema/contenido (les comenta, que desde siempre el hombre ha intentado resolver problemas por métodos distintos pero que ya cuando empezaron a funcionar las matemáticas lo hicieron planteando ecuaciones). (98-108)

Iniciar con un ejemplo de un problema histórico (“El problema de los bueyes”) y dar una breve reseña histórica del problema. (116-151)

“Traducir” una parte del enunciado del problema a lenguaje común, a lenguaje más familiar para los estudiantes, intentando que los estudiantes comprendan “lo que dice” el problema. (153-162)

Señalar a los estudiantes datos implícitos de un problema (de SEL) porque son relevantes para resolver el problema/ejercicio, y que luego ocupará para hacer el planteamiento del problema. (159-162); (216-217)

Comentarles la estrategia para empezar a resolver un problema (comprender el enunciado del problema y pensar cuáles son las incógnitas para plantear las ecuaciones. (191-194)

Darles un “empujoncito” o ayudas puntuales. Emi les da un empujoncito diciéndoles cuáles son las incógnitas necesarias para el planteamiento del problema. (201-209)

Explicarles el por qué usará esas incógnitas que acaba de mencionar en este problema de SEL. (210-220)

Darles la idea de por donde empezar a plantear las ecuaciones, es decir, les da otro “empujoncito”. (233-234)

Gestión de la participación. Emi lanza una pregunta al grupo: ¿conformes? Como una forma de tomar en cuenta a los demás estudiantes y hacerles una “llamada” a los estudiantes para atraer su atención y que la vayan siguiendo, es decir, para evitar que la explicación se convierta en un diálogo entre Emi y E2 y los estudiantes no sigan lo que va haciendo (es decir, intenta gestionar por lo menos una participación pasiva de los estudiantes). (265)

Hacerles ver/notar que con las dos primeras ecuaciones se forma un sistema de 2x2 y hacerles recordar los distintos métodos que ya conocen para resolver un sistema de 2x2 (reducción y sustitución). (306-319)

Remarcarles que lo que se va a usar para resolver SEL será la técnica matricial, porque es una técnica más avanzada y más eficiente para resolver SEL, en comparación con el método de sustitución y reducción. (320-322)

CPG
Anunciarles que el nuevo tema que iniciarán en esta clase (SEL) vendrá en el siguiente examen (aproximadamente 3 ó 4 semanas después), para que no se presionen tanto pero para que lo tomen en cuenta luego. Esto tras equiparlos de fotocopias que les preparó con ejercicios propuestos y soluciones a ejercicios anteriores, para que practiquen el fin de semana y estudien para el examen que tendrán la siguiente semana. (93-96)

Mientras Emi busca las fotocopias que les preparó, en la que aparece el planteamiento de este problema paso a paso, intenta mantener la atención de los estudiantes. (168-173)

Controlando la indisciplina. Es una clase en viernes después del recreo, motivo por el cual los estudiantes están más inquietos y les cuesta trabajo estar en silencio, Emi intenta callarlos para poder trabajar. (236-239)

Evento de Término: Emi terminó el planteamiento del problema del primer ejemplo y ahora presentará un nuevo problema, es decir, un nuevo ejemplo.

[6.2.2] Presentación del segundo ejemplo de SEL para practicar cómo se hace el planteamiento del problema. (32-529)

Objetivo particular 6.2.2: Presentar un segundo ejemplo de SEL para practicar cómo se hace el planteamiento del problema.

Evento desencadenante: Iniciar el segundo ejemplo de SEL.

[A, 6.2.2] Emi les suministra una fotocopia para apoyarse de ésta al explicarles el planteamiento de este problema (matriz input/output), con este recurso los conduce/orienta poco a poco hasta llegar al planteamiento del problema.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber lo que son las matrices input/output (insumo-producto). (340-352); (434-438)

Saber lo que sería una situación de equilibrio en un modelo cerrado de Leontief (gastos=ingresos). (441-462); (508-516)

CC-Es
Prever que los estudiantes pueden comprender "mejor" el problema si les explica en lenguaje común, lenguaje más familiar a los estudiantes, lo que son las matrices input/output (insumo-producto). (340-352)

CC-En
En el segundo problema Emi trata de dar una pequeña introducción del problema, tratando de explicarles que dicho problema viene de un modelo (input/output) con una sociedad concreta (1 agricultor, 1 carpintero y 1 sastre), donde se pretende que haya un estado de equilibrio (gastos=ingresos). Para llegar al planteamiento del problema, Emi se apoya de una fotocopia que les preparó, pero además va desarrollando el planteamiento en la pizarra a través de preguntas, Emi se va por partes, primero trata de plantear un lado de la igualdad de las ecuaciones (los gastos) y luego la otra parte (los ingresos) hasta llegar al planteamiento de las tres ecuaciones, luego aprovecha para tratar de representar las tres ecuaciones en forma matricial. (325-529)

Recursos: Suministrarles una fotocopia en la que viene explicado este ejemplo paso a paso. (334)

Presentarles una pequeña introducción al ejemplo, les habla de Leontief y su premio novel por la teoría económica sobre matrices input/output (sobre esta matriz hará el ejemplo). (335-338)

Explicarles en lenguaje común lo que son las matrices input/output (insumo-producto). (340-352)

Recapitular y orientar el ejemplo a realizar, una vez que les explica lo que son las matrices input/output. (353-358)

Señalarles un dato del problema que no aparece explícito y que luego ocupará para plantear el problema. Emi explica que para simplificar el problema, la cantidad total que produce cada una de esas personas en un año se considerará como una unidad respectivamente. (361-370)

Recursos: Apoyarse de la fotocopia para explicar un poco la tabla donde vienen dados los datos del problema del ejemplo que está haciendo. (371-378)

Hacerles notar aspectos relevantes de la tabla de datos del problema:
1. Leer en filas: "consumidos".
2. Leer en columnas: "producidos".
3. Lo que produce cada persona al sumarlo da 1.
4. Que cada uno es el que consume más de lo que cada uno hace, excepto el carpintero, es decir, el agricultor es el que más alimentos consume y el sastre el que más ropa consume. (404-433)

Explicarles de lo que se trata este problema de SEL, y en particular les habla de lo que sería una situación de equilibrio en un modelo cerrado de Leontief (gastos=ingresos). (441-462); (508-516)

Hacerles hincapié en lo que quiere que hagan en este problema (plantear las ecuaciones). (463-464)

Recursos: Usar como recurso de apoyo la fotocopia que ella les preparó para que vean las ayudas, los pasos a seguir para llegar a cada una de las ecuaciones del sistema. (465-529)

Gestión de la participación. Emi lanza una pregunta al grupo: ¿Estáis los demás conformes con lo que dice E2? Como una forma de tomar en cuenta a los demás estudiantes y hacerles una "llamada" a los estudiantes para atraer su atención y que la vayan siguiendo, es decir, para evitar que la explicación se convierta en un diálogo entre Emi y E2 y los estudiantes no sigan lo que va haciendo (es decir, intenta gestionar por lo menos una participación pasiva de los estudiantes). (478)

Aprovechar el poco tiempo que queda para que termine la clase para representar las ecuaciones en forma matricial y que los estudiantes ya se vayan haciendo una imagen de esa representación, aunque eso ya no sea parte del objetivo inicial propiamente, que era llegar al planteamiento de las ecuaciones del problema. (530-566)

A manera de cierre de los dos ejemplos, remarcarles que lo que tienen en común los dos ejemplos vistos hoy en clase, es que los plantearon con el mismo tipo de ecuaciones (lineales), y aprovecha para comentarles que en este tema harán el planteamiento y luego la resolución del problema viendo qué método aplicar en cada caso. (530-538)

Remarcarles la estrategia para resolver SEL (hacer el planteamiento del problema, luego representarlo en forma matricial y resolverlo), a través de un sistema matricial de las ecuaciones. (567-571)

Saber qué dejarles de deberes a los estudiantes (estudiar el fin de semana y haced los ejercicios que les propuso en fotocopias para que practiquen y se preparen para el examen que harán los estudiantes la siguiente semana). (574-575)

CC
Saber los contenidos que vienen en el libro de texto. Saber que este es un ejemplo del libro. (339)

Evento de Término: Se terminó la clase.

Análisis de la clase 7 de Emi

[7.1] Presentación del método de reducción de Gauss para resolver sistemas de

ecuaciones lineales a través de un ejemplo. (1-246)

Objetivo general: Presentar el método de reducción de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales a través de un ejemplo.

Evento desencadenante: Iniciar la clase presentando a los estudiantes una introducción para abordar luego el método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales a través de un ejemplo.

[A, 7.1] Emi explica en la pizarra cuándo dos ecuaciones son equivalentes, luego les hace notar el tipo de trasformaciones que pueden realizar en las ecuaciones sin modificar la solución al sistema, después ella propone un sistema de ecuaciones para explicarles la solución por el método de reducción de Gauss en la pizarra.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber qué transformaciones elementales se pueden realizar en un sistema sin modificar la solución del sistema de ecuaciones:

1) Saber que si cambia el orden de las ecuaciones en un sistema no altera la solución del sistema. (10-12)
2) Saber que multiplicar o dividir una ecuación por un número distinto de cero, no cambia las soluciones de la ecuación porque con esas transformaciones el sistema es equivalente. (28-31)
3) Saber que se pueden sumar las ecuaciones unas con otras porque también las ecuaciones que resultan son equivalentes, es decir, tienen la misma solución. (33-37)

Saber la utilidad de las transformaciones elementales en matrices (*porque para encontrar el valor de x, y, z debo despejar, y una forma muy fácil de despejar es haciendo un sistema escalonado*). (51-54)

Saber la estrategia para encontrar la solución en un sistema escalonado (si el sistema ya está escalonado entonces si ya se tiene el valor de z, se sustituye en la segunda ecuación y se obtiene y, finalmente se sustituye el valor de y, z en la primera ecuación y se obtiene el valor de la x). (55-68)

Saber la estrategia para resolver un sistema de ecuaciones lineales con el método de Gauss (trabajar con la matriz ampliada y conseguir hacer ceros por debajo de la diagonal principal). (109-110); (123-125)

Saber que pueden dividir todo por 10 y así manejar cantidades más pequeñas al hacer las operaciones. (126-129)
Saber hacer las transformaciones elementales para llegar al sistema escalonado. En este caso las transformaciones elementales son a) F_2-F_1 y b) F_3-F_1. (133-159)

Saber obtener los valores de x, y, z a partir del sistema escalonado, es decir, saber "despejar". (187-216)

CC-Es

Prever que los estudiantes se pueden equivocar al escribir el sistema en forma matricial, es decir, que no pongan las equis debajo de las equis (x´s), las y´s debajo de las y´s y las z´s debajo de las z´s. (184-186)

Prever que algún estudiante pudiera escribir la solución del sistema sin seguir la convención matemática de que siempre se anota el valor de las incógnitas en el orden en que aparecen dadas, en este caso (x, y, z). (221-225)

CC-En
Remarcarles lo que significa hallar la solución de un sistema (hallar la solución común para todas las ecuaciones que aparecen en el sistema. (1-7)

Saber cuándo hacerles una aclaración sobre el contenido, es decir, cuando aclararles/recalcarles que cuando se habla de ecuaciones equivalentes se refiere a ver si tienen la misma solución, en este caso les hace esa aclaración después de preguntarles si dos ecuaciones particulares (12x+4=28 y 6x+2=14) son equivalentes. (17-22)

Relacionar matrices con las matrices del sistema, es decir, relaciona matrices con sistemas de ecuaciones **[**relacionando las transformaciones elementales con matrices (1. Intercambiar una fila por otra, 2. Multiplicar una fila o dividir por un número distinto de cero y 3. A una fila sumarle otra por un número) con las transformaciones de las ecuaciones (1. Al cambiar las ecuaciones no se altera la solución del sistema, 2. Multiplicar o dividir una ecuación por un número distinto de cero, no cambia las soluciones de la ecuación, pues con esas transformaciones el sistema es equivalente. 3. Se pueden sumar las ecuaciones unas con otras y las ecuaciones que resultan son equivalentes, es decir, tienen la misma solución)**]**. (8-50)

Justificarles para qué van a aplicar esas transformaciones elementales. Les hace notar la utilidad de las transformaciones elementales en matrices (*porque para encontrar el valor de x, y, z debo despejar, y una forma muy fácil de despejar es haciendo un sistema escalonado*). (51-54)

Trabajar junto con los estudiantes a través de preguntas, la estrategia para encontrar la solución en un sistema escalonado (si el sistema ya está escalonado entonces si ya se tiene el valor de z, se sustituye en la segunda ecuación y se obtiene y, finalmente se sustituye el valor de y, z en la primera ecuación y se obtiene el valor de la x). (55-68)

Confirmarles/reafirmarles la estrategia para encontrar la solución en un sistema escalonado, lo cual le servirá para cuando resuelvan el sistema con el método de Gauss (*Entonces este método que consiste en escalonar el sistema, si lo aplicamos a las matrices, ¿qué es lo que debemos hacer?, ¿qué queremos conseguir? Que desaparezca la x de la segunda ecuación, y de la tercera ecuación desaparecer la x y la y, es decir, hacer cero la x y la y en la tercera ecuación*). (69-74)

1. Hacerles notar que las transformaciones que pueden hacer en las ecuaciones de un sistema son transformaciones elementales que pueden hacer en las matrices (matrices del sistema).
2. Darles un ejemplo de un sistema de ecuaciones para escribirlo luego en forma matricial.
3. Utilizar el problema de ese ejemplo para resolverlo usando el método de

reducción de Gauss. (1-220)

Usar el esquema ()()=() para mostrar a los estudiantes la forma matricial en la que se puede escribir el sistema de ecuaciones (Emi escribe un paréntesis grande indicando una matriz al lado de la matriz de coeficientes que acaba de escribir, luego el igual y enseguida otros paréntesis grandes indicando que ahí irá otra matriz). (87-89)

Tratar de comprobarles que al multiplicar la matriz de coeficientes y la de las incógnitas e igualar los elementos de esa matriz resultado con la de términos independientes, dan las tres ecuaciones y luego les remarca lo que se hace para pasar un sistema de ecuaciones a forma matricial, escribirlo como en el ejemplo, una matriz de coeficientes, la matriz de las incógnitas y la matriz de términos independientes). (96-104)

Comentarles *grosso modo* en qué consiste el método de reducción de Gauss. Comentarles la estrategia de trabajo en el método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales (trabajar con la matriz ampliada y conseguir hacer ceros por debajo de la diagonal principal). (109-110); (123-125)

Remarcarles cuántas y cuáles matrices tienen en un sistema de ecuaciones (*en un sistema de ecuaciones lineales tenemos en realidad cuatro matrices de las que podemos hablar, la matriz de coeficientes, la matriz de las incógnitas, la matriz de los términos independientes y la matriz ampliada*). (116-121)

Hacerles notar que la fila uno (F_1) ha quedado como estaba y cómo ha quedado la fila dos (F_2), después de aplicarle la transformación F_2-F_1. Luego Emi aprovecha esto que les ha hecho notar para que se fijen como quedará la tercera fila después de aplicarle la transformación F_3-F_1. (155-159)

Hacerles notar que el objetivo (conseguir hacer ceros por debajo de la diagonal principal) se ha alcanzado con un solo cambio (que consiste en este caso de dos transformaciones: a) F_2-F_1 y b) F_3-F_1). (161-165)

Comentarles otra parte del método para continuar hallando la solución del sistema de ecuaciones (*si antes pasábamos de las ecuaciones a la forma matricial, pues ahora de la forma matricial pasaremos al sistema*). (166-168)

Remarcarles que a pesar de las transformaciones, la solución del sistema es la misma, es decir, no cambian la solución. (170-173)

Pedirles que escriban las ecuaciones del sistema escalonado que ha quedado, al mismo tiempo ella va escribiendo las ecuaciones en la pizarra, escribe la primera ecuación que corresponde a la primera fila, luego les pregunta a los estudiantes *¿cómo quedaría la segunda ecuación del sistema?* A lo cual E2 le responde cómo iría quedando y escribe la segunda ecuación, Emi la completa y luego ella misma se pregunta y se contesta como queda la tercera ecuación, escribiéndola en la pizarra. (174-183)

Saber cuándo y qué hacerles notar a los estudiantes: la forma de escribir el sistema escalonado (que escriban las equis debajo de las equis (x´s), las y´s debajo de las y´s y las z´s debajo de las z´s) justo después de haber escalonado el sistema. (184-186)

Hacerles notar lo que queda en el sistema escalonado, en particular, el hecho de que en este caso, en la segunda ecuación, queda un sistema más cómodo porque no sólo ha desaparecido la x de la segunda ecuación, sino también la z (pues normalmente al escalonar el sistema quedan en la segunda ecuación la y y la z), como sólo tienen la y entonces pueden despejar directamente la y. (194-199)

Comparar la solución que obtuvieron en este ejemplo con la del libro porque eso pudiera dar más confianza a los estudiantes en el resultado que han obtenido. (218-220)

Hacerles notar que al escribir la solución del sistema, atiendan a la convención matemática a cerca de escribir el valor de las incógnitas en la solución del sistema en el orden en que aparecen dadas en el sistema. (221-225)

Volver a repetir el procedimiento para aclararle la duda a E5, sobre cómo salió la x, es decir, de dónde se obtuvo que x=1,600. (231-240)

Comentarles su punto de vista sobre las ventajas del método, es decir, hablarles sobre la utilidad del método de Gauss (*El método de reducción de Gauss, es muy simple y cómodo que facilita encontrar los valores de las incógnitas de una forma muy rápida*). (243-246)

CC
Saber que el ejemplo con el que les presenta el método de Gauss, viene resuelto en el libro de texto. (218-220)

CPG
Motivarlos a que hagan los ejercicios. Invitarlos a que ellos intenten escribir el sistema en forma matricial (*Bueno, vamos a escribir el sistema matricial con estas ecuaciones, ¿cómo podemos ponerlo en forma matricial?*, *¿qué quedaría?, ¿podéis intentadlo vosotros, la forma matricial?* -Emi pasa a supervisar el trabajo de los estudiantes). (75-78)

Una forma de preguntarles si les ha quedado claro lo que acaban de hacer (encontrar los valores de las variables a partir del sistema escalonado): *¿Se fijaron cómo salen las cuentas?* (217)

Una forma de preguntarles si les quedó claro el método, en particular el ejemplo que acaban de hacer: *¿Entonces qué os parece este método?* (226)

Una forma de preguntarles si tienen más dudas: *¿Alguna duda más?* (241)

Evento de Término: Emi terminó de hacer el ejemplo a través del cual les presenta el método de Gauss.

[7.2] Presentación de otro ejemplo para resolver sistemas de ecuaciones lineales usando el método de Gauss. (249-351)

Objetivo general: Presentar otro ejemplo para resolver sistemas de ecuaciones lineales usando el método de Gauss.

Evento desencadenante: Iniciar otro ejemplo para aplicar el método de Gauss para resolver el sistema de ecuaciones lineales.

[A, 7.2.] Emi pide a los estudiantes que ellos intenten plantear el problema, pero ella se desespera al ver que los estudiantes van demasiado lentos, que están batallando mucho para plantear el problema y entonces ella lo va resolviendo en la pizarra, en algunos momentos con la participación de algunos estudiantes.

Conocimientos en acción:

CC-Es
Prever las necesidades de E9, en particular, la ayuda a localizar en su libro de Braille el problema que están resolviendo. (291-292)

Saber que los estudiantes suelen irse con la pinta y representar a las variables con algo que no tiene sentido, es decir, hacer cálculos mecánicamente sin saber realmente el sentido de las variables en el problema. (311-318)

CC-En
Proponerles que ellos planteen el problema, pero al final la que lo plantea es ella mediante algunas preguntas a los estudiantes. (249-339)

Hacerles notar lo que tienen hasta el momento (la tabla con la información del problema, es decir, los datos) y lo que piden hacer en el problema (calcular el precio de cada uno de los tres dispositivos solares) para hacerles ver hacia donde irán ahora (a definir las variables). (307-310)

Aclararles (a raíz de la respuesta incorrecta de E2, al definir las incógnitas como el número de dispositivos, dato que ya les dan y por tanto no es una incógnita –E2 tal vez quiso definir así las incógnitas por analogía con otros problemas) (Emi: *no siempre las incógnitas van a ser el mismo valor, entonces cuando ponemos las incógnitas x, y, z que ponemos en todos los problemas, no tenéis que poner siempre x para los paneles fotovoltaicos, y termosifones y z colectores, eso no tiene sentido* -en este problema). (311-318)

Comentarles una forma de identificar las incógnitas del problema. Emi: *regularmente las incógnitas se suelen corresponder con lo que nos preguntan*. (325-328)

Decidir qué dejarles de deberes (lo que ya no dio tiempo a terminar en clase: escribir el sistema en forma matricial y resolverlo con el método de reducción de Gauss). (347-351)

Evento de Término: Se terminó la clase y sólo se alcanzó a hacer el planteamiento del problema, es decir, no se alcanzó a resolverlo completo en clase.

Análisis de la clase 8 de Emi

[8.1] Revisión de ejercicios que quedaron de deberes para consolidar en qué consiste el método de Gauss. (1-45)

Objetivo general: Revisar los ejercicios que quedaron de deberes para consolidar en qué consiste el método de Gauss.

Evento desencadenante: Empezar a hacer el ejercicio que había dejado de deberes la clase anterior.

[A, 8.1] E10 escribe en la pizarra el sistema escalonado que obtuvo y Emi sin despejar de ese sistema escalonado las variables, les dice directamente la solución, es decir, el valor de x, y, z.

Conocimientos en acción:

CC-En
Remarcarles lo que se ha conseguido (hacer ceros por debajo de la diagonal principal) y a lo que se ha llegado (al sistema escalonado) y que de ahí ya sólo falta despejar y sustituir para encontrar los valores de la incógnitas. (29-45)

Decirles que las soluciones las tienen en el libro de texto, para que ellos tengan más seguridad, Emi prevé que eso les puede dar seguridad. (44-45)

Evento de Término: Terminan el ejercicio al decir los valores de las variables x, y, z.

[8.2] Consolidación del método de reducción de Gauss para escalonar un sistema a partir de la matriz ampliada, es decir, dejar claro en qué consiste el método de reducción de Gauss y escalonar un sistema. (46-170)

Objetivo general: Consolidar en qué consiste el método de reducción de Gauss para escalonar un sistema a partir de la matriz ampliada, es decir, dejar claro en qué consiste el método de reducción de Gauss y escalonar un sistema.

Evento desencadenante: Empezar a dar un repaso general respecto a: en qué consiste el método de reducción de Gauss.

[A, 8.2] Emi explica algunos aspectos importantes (generales) sobre los sistemas de ecuaciones y escalonar un sistema a través del método de reducción de Gauss.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber *grosso modo* en qué consiste el método de reducción de Gauss, es decir, saber escribir la matriz ampliada, hacer ceros por debajo de la diagonal mediante transformaciones elementales, escribir el sistema equivalente escalonado, resolverlo y encontrar la solución. (85-134)

CC-Es
Prever que un error común en los estudiantes es pensar y escribir que al obtener el valor

de x, y, z están obteniendo 3 soluciones al sistema, sin hacer consciencia de que el valor de esas tres variables constituye una solución. (137-148)

CC-En
Empezar a dar un repaso mediante preguntas. (46-170)

Hacerles notar tres aspectos importantes acerca de los sistemas antes de remarcarles nuevamente en qué consiste el método de Gauss. 1. Que no todos los sistemas de ecuaciones lineales tienen solución. 2. Ni todos los problemas se pueden resolver a través de sistemas de ecuaciones lineales. 3. Y que una vez que se tiene un sistema de ecuaciones, lo que se pretende es hallar la solución. (46-84)

Remarcarles en qué consiste el método de reducción de Gauss, es decir, hacerles notar los pasos que hay que seguir: escribir la matriz ampliada, hacer ceros por debajo de la diagonal mediante transformaciones elementales, escribir el sistema equivalente escalonado, resolverlo y encontrar la solución. (85-134)

Decidir aclararles por qué a un sistema se le llama sistema equivalente (porque tienen la misma solución) cuando pronuncia “sistema equivalente”, al estar explicando en qué consiste el método de Gauss. (109-114)

Usar la analogía entre un sistema de ecuaciones y fracciones para explicar el significado de *equivalentes*: Los sistemas son equivalentes porque tienen la misma solución y las fracciones por que al hacer la división de cada fracción da el mismo resultado. (115-131)

Tratar de hacerles ver que el valor de las tres incógnitas forman una sola solución. (137-148)

Retomar la pregunta que les había hecho antes (¿Existe siempre solución? -para un sistema de ecuaciones lineales), al principio del repaso, para continuar con la introducción para presentar luego la clasificación, es decir, empieza haciéndoles notar que no siempre existe solución al sistema. (149-150)

Escuchar y contestar la respuesta de E7, pero luego orientar el contenido a su objetivo. (159-166)
Habilidad para no desviarse y continuar con la orientación que tenía pensada para alcanzar su objetivo (dar una introducción para luego clasificar los sistemas). (159-166)
En este caso, Emi pregunta: *¿Puede salir más de una solución en un sistema?* Y E7 contesta que eso puede darse *en las ecuaciones de segundo grado*, cosa que es correcta pero que no es lo que interesa ahora para el objetivo de Emi, pues ella lo que deseaba escuchar es que un sistema de ecuaciones lineales puede tener infinitas soluciones, por tanto, les comenta que la respuesta de E7 es correcta y orienta el discurso a su objetivo, es decir, les comenta que *cuando hablamos de ecuaciones lineales, puede darse el caso y que hasta ahora no os ha salido, de que haya más de una solución, en realidad puede ser que haya infinitas soluciones*. (159-166)

Evento de Término: Emi termina el repaso y comenzará la clasificación de sistemas.

[8.3] Presentación (representación) de la caracterización de un Sistema

Compatible Determinado (SCD), Sistema Compatible Indeterminado (SCI) y Sistema Incompatible (SI) en un esquema. (171-381)

Objetivo general: Presentar (representar) en un esquema la caracterización de un Sistema Compatible Determinado (SCD), Sistema Compatible Indeterminado (SCI) y Sistema Incompatible (SI).

Evento desencadenante: Empezar a escribir la clasificación de sistemas de ecuaciones lineales.

[A, 8.3] Emi explica en la pizarra la clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber cómo se representaría un sistema escalonado en matrices para identificar qué tipo de sistema es. (306-356)

CC-En
Proponer (inventarse) un ejemplo de SCD escalonado y mediante preguntas a los estudiantes obtiene con ayuda de E2, el valor de las incógnitas x, y, z. (198-221)

Proponer (inventarse) un ejemplo de SCI escalonado y mediante preguntas a los estudiantes trata de hacerles notar que la z va tomando varios valores y por lo tanto también la y y la x, para que vean que el sistema tiene infinitas soluciones. (222-245)

Emi al no contestarle los estudiantes cuánto vale y de la segunda ecuación y+z=2 si z=λ, Emi "Transfiere y traduce" a lenguaje común, en una forma más detallada (Emi: *A ver hemos dicho que z puede tener cualquier valor ¿no?, le podemos dar cualquier valor que queramos a z, ya que en la última ecuación no me sale un valor determinado para z, entonces si despejamos y de la segunda ecuación y z vale λ, ¿qué nos queda?* E3: *2-λ*), para explicarles lo que les acaba de preguntar, y de esa forma si obtiene la respuesta correcta por parte de E3. (246-257)

Explicar para todos de una manera más explícita cómo se obtuvo el valor de la y (Emi: *¿Cómo despejar de aquí la y?* –Emi señala la segunda ecuación- *Si tienes que y+z=2, entonces y=2-z y si z vale λ, pues entonces y vale 2-λ*). (258-260)

Explicarles cómo obtener el valor de la x y después Emi explica nuevamente, pero de manera más detallada, cómo se obtiene el valor de la x y posteriormente hace los cálculos para hacerles ver que x=1. (261-271)

Hacerles notar la forma de la solución del SCI [(x=1, y=2-λ, z=λ)]. (271-272)

Cerrar el ejemplo retomando la solución del sistema y remarcando el papel del parámetro λ en un SCI (Emi: *Como λ no tiene un valor determinado, y puede ser cualquiera* –pues y=2-λ, *este sistema tiene infinitas soluciones y es por lo tanto un SCI*). (271-275)

Tratar de enfatizar lo que pasa en la tercera ecuación del ejemplo de sistema escalonado que ella les propuesto (El sistema que Emi les propone es x+y+z=3, y+z=1, 0=1). Mediante preguntas a los estudiantes los guía para que observen, en particular, lo que pasa en la tercera ecuación del sistema escalonado en un SI, para que noten que el sistema no tiene solución. (279-296)

Después de ver un ejemplo de sistema escalonado para cada tipo de sistemas, Emi les remarca que en un sistema escalonado la tercera ecuación indica de qué tipo es el sistema (si es SCD, SCI ó SI). (297-306)

Escribir la matriz de un SCD ya escalonado usando un esquema gráfico y representarlo. Diferencia la parte de los coeficientes de la parte de los términos independientes, los coeficientes los representa con circulito y a los términos independientes con un cuadro, quedando de la siguiente manera $\left(\begin{array}{ccc|c} \otimes & \otimes & \otimes & \square \\ 0 & \otimes & \otimes & \square \\ 0 & 0 & \otimes & \square \end{array}\right)$

Emi escribe eso a través de preguntas a los estudiantes que muchas de las veces ella misma se contesta. (310-332)

Escribir la matriz de un SCI ya escalonado, usando el siguiente esquema gráfico para representarlo $\left(\begin{array}{ccc|c} \otimes & \otimes & \otimes & \square \\ 0 & \otimes & \otimes & \square \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Emi va haciendo preguntas para que los estudiantes se fijen en los elementos que quedan en la última fila al escalonar un sistema que es SCI. (333-345)

"Revoicing" la respuesta de E2 respecto a cómo quedó la última fila de la matriz en el sistema escalonado (Emi: *Para que nos quede la última ecuación 0=0, significa que los elementos de la última fila son todos 0, tanto para los coeficientes como para el término independiente*) de un SCI. (341-345)

Escribir la matriz de un SI ya escalonado, usando el siguiente esquema geométrico para representarlo $\left(\begin{array}{ccc|c} \otimes & \otimes & \otimes & \square \\ 0 & \otimes & \otimes & \square \\ 0 & 0 & 0 & \square \end{array}\right)$

Emi va escribiendo la matriz con ayuda de los estudiantes a través de preguntas a los estudiantes. (346-356)

Aceptar la respuesta de E2 y la completarla, con ello termina de representar el esquema gráfico (todos los elementos de la tercera fila son cero excepto el término independiente que es un número distinto de cero). (352-356)

Emi a través de una comparación entre las distintas matrices que denotó con la representación gráfica para cada sistema anteriormente, trata de hacerles notar/remarcar en qué se tienen que fijar cuando obtengan el sistema escalonado en una matriz ampliada para distinguir un SCD, un SCI y un SI, es decir, que en particular, deben fijarse en la tercera fila del sistema escalonado. (357-381)

Evento de Término: Emi terminó de representar a través de un esquema geométrico la matriz escalonada para cada tipo de sistema.

[8.4] Clasificación de un sistema a partir del rango del sistema escalonado con el método de reducción de Gauss. (382-533)

Objetivo general: Clasificar un sistema a partir del rango del sistema escalonado con el método de reducción de Gauss.

Evento desencadenante: Empezar a estudiar el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada del sistema escalonado con el método de reducción de Gauss.

[A, 8.4] Emi explica en la pizarra la clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales a partir del rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada, luego empieza a hacer un ejemplo que aparece en el libro de texto, que consiste en clasificar el sistema y en su caso resolverlo, la clase se termina y sólo se queda indicada la matriz ampliada.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber lo que es el rango de una matriz (Emi: *El rango es el número de filas linealmente independientes*). (384-386)

Saber cómo se obtiene el rango de una matriz y el valor del rango de la matriz de coeficientes ya escalonada, para cada tipo de sistema. (387-397)

Saber "las propiedades de sistemas", es decir, saber el teorema de Rouché-Frobenius. (434-466)

Escribir correctamente el sistema en forma matricial y la matriz ampliada. (496-511)

CC-En
Hacerles notar el valor del rango de la matriz ampliada ya escalonada, para cada tipo de sistema. (398-414)

Hacerles notar cuánto vale el rango de la matriz de coeficientes ya escalonada para cada tipo de sistema. (382-397)

Hacerles notar cuánto vale el rango de la matriz ampliada ya escalonada para cada tipo de sistema. (398-414)

Con lo anterior, hace una comparación entre el rango de la matriz de coeficientes y el de la ampliada para deducir el teorema de Rouché-Frobenius que Emi le llama "propiedades de sistemas". (415-466)

Comentarles la utilidad de "las propiedades de sistemas", es decir, del teorema de Rouché-Frobenius (al escalonar la matriz podrán decir qué tipo de sistema es y por tanto saber cuántas soluciones tiene el sistema). (467-475)

Remarcarles la estrategia para poder clasificar un sistema (Emi: *...planteamos las ecuaciones del problema, pondremos el sistema en forma matricial, aplicaremos las* *transformaciones elementales sobre la matriz ampliada, para conseguir un sistema escalonado y sobre el sistema escalonado hallamos las soluciones y ya vemos de qué tipo es, ¿de acuerdo?*). (476-480)

Decidir empezar con este ejemplo en el tema de clasificar el sistema y en su caso resolverlo, Emi usa un ejemplo para clasificar qué tipo de sistema es pero suena el timbre y ya no lo terminan, sólo deja indicada la matriz ampliada y les comenta la estrategia a seguir, les deja de tarea terminarlo, hacer transformaciones elementales para escalonarlo y decir qué tipo de sistema es y si es posible hallar la solución. (481-533)

Comentarles parte de la estrategia a seguir en el ejemplo: localizar la diagonal principal y luego hacer ceros por debajo de la diagonal. Ese ejemplo ya no lo terminaron de hacer porque se terminó la clase pero Emi quiere que los estudiantes intenten terminarlo en casa. (522-525)

Saber qué dejarles de deberes: terminar el ejemplo que estaba haciendo ella en la pizarra. (529-533)

Evento de Término: Se terminó la clase y no se terminó de hacer el ejemplo, sólo quedó indicada la matriz ampliada, es decir, faltó escalonar el sistema, estudiar el rango, clasificar el sistema y en su caso resolverlo.

Análisis de la clase 11 de Emi

[11.1] Presentación de la estructura de solución de un problema de programación lineal (PL) mediante un ejemplo. (2-428)

Objetivo general: Presentar la estructura de solución de un problema de PL mediante un ejemplo resuelto del libro de texto.

Evento desencadenante: Iniciar la clase presentando el tema de PL.

[A, 11.1] Emi explica en la pizarra un ejemplo resuelto de PL del libro de texto.

[11.1.1] Presentación de la introducción al tema de PL. (2-51)

Objetivo particular: Presentar la introducción al tema de PL y leer el enunciado del ejemplo (problema de transporte de PL).

[A, 11.1.1] Emi justifica a los estudiantes que usará el libro de texto para los problemas que harán en este tema de PL (pues en temas anteriores Emi abordaba problemas/ejercicios/ejemplos de varias fuentes, no sólo del libro de texto). Les comenta que tomó esa medida considerando las necesidades de E9 (estudiante con deficiencia visual), dado que en estos problemas de PL habrá dibujos y gráficas y E9 tiene ese libro en Braille, es decir, que de esa forma E9 contaría con ese apoyo.

Conocimientos en acción:

CC-Es
Prever que los estudiantes pueden tener la imagen de que los problemas de PL son muy difíciles. (2-11)

Saber las necesidades de los estudiantes sobre ese contenido matemático. En este caso Emi prevé que a E9 por su deficiencia visual le costará mucho trabajo visualizar y entender los problemas de PL, debido a que habrá dibujos y gráficas y que por tanto, E9 necesita un apoyo para entender la explicación, por lo cual Emi tomará como recurso el libro de texto pues E9 tiene ese apoyo en Braille. (12-28)

Prever que los estudiantes entenderán "mejor" en qué consiste el problema de transporte si se los dice en lenguaje común, lenguaje más familiar a los estudiantes. (30-40)

CC-En
Hacerles notar que aunque verán una variedad de problemas en cada uno se tratarán varios aspectos, pero en cuanto al planteamiento y la solución hay similitudes entre ellos. (2-11)

Comentarles a los estudiantes en qué consiste el problema en lenguaje común, más familiar a los estudiantes. (30-40)

[11.1.2] Presentación de la primera parte (datos, variables, tabla de distribución y función objetivo) de la estructura de solución de un problema de programación lineal (PL) mediante un ejemplo. (52-275)

Objetivo particular: Presentar la primera parte (datos, variables, tabla de distribución y función objetivo) de la estructura de solución de un problema de programación lineal (PL) mediante un ejemplo del libro de texto.

Evento desencadenante: Iniciar primera parte (datos, variables, tabla de distribución y función objetivo) de la estructura de solución de un problema de programación lineal.

[A, 11.1.2] Emi explica en la pizarra la primera parte (datos, variables, tabla de distribución y función objetivo) del ejemplo resuelto de PL del libro de texto.

Conocimientos en acción:

CCC

Simplificar las sumas y restas de términos semejantes (Emi sólo anota los resultados). (264-267)

CEC
Saber que al definir las variables en un problema, el error de los estudiantes puede provenir del hecho de definir más de dos variables. En este caso, aunque en el problema se pudieran definir seis variables, el hecho de haber unas condiciones de demanda y de producción hace que el problema se pueda resolver con dos variables. Es al profesor al que interesa que los estudiantes se centren en resolver este tipo de problemas de PL centrados en dos variables, más que los estudiantes divaguen en definir 6 variables y no logren resolver el problema. (146-153)

CC-Es
Prever que se les pudiera ocurrir a los estudiantes esa respuesta intuitiva (que todos los refrescos salgan del supermercado más cercano para que sea más barato) para resolver el problema. (112-132)

Prever que a algún estudiante se le puede ocurrir utilizar seis variables para resolver el problema, lo cual no es factible en este problema que se resuelve con dos variables. (135-153)

Prever que si agrega en la tabla de distribución otra fila y otra columna los estudiantes visualizarán "mejor" la información y podrán completar la tabla de distribución. (175-187)

CC-En
Remarcarles la importancia (para tener claros los datos del problema) de escribir los datos en una tabla como parte fundamental al comienzo del planteamiento. (52-63)

Comentarles que los puntos de distribución normalmente son los supermercados, para que se familiaricen con el lenguaje de los problemas para escribir la tabla. (66)

Remarcarles que es importante leer el enunciado del problema un par de veces y entender los datos del problema, antes de hacer otra cosa. Saber que un primer paso para resolver el problema es tener bien claros los datos, es decir, entender de lo que trata el problema y una vez que tengan ese entendimiento, luego intenten avanzar en las siguientes etapas de solución, es decir, resolver el problema. (86-89)

Hacerles notar que se puede leer “entre líneas” en los datos del problema, es decir, que aunque no se diga en el problema que tan lejos estén las fábricas de refresco de los supermercados, se puede saber cuál supermercado está más cerca de cada fábrica si se fijan en el coste, pues depende de la distancia es el coste de transporte. (101-111)

Presentarles una respuesta intuitiva que pudieran dar los estudiantes al problema (que todos los refrescos salgan del supermercado más cercano para que sea más barato) y comentarles que al dar esa respuesta puede haber varios riesgos: 1. Que la producción no fuese suficiente. 2. Que no se satisficiese la demanda. (112-132)

Remarcarles nuevamente que al solucionar un problema de PL es muy importante entender y mostrar los datos del problema. (133-134)

Hacerles notar lo que representa la tabla de distribución (el número de cajas que salen de cada fábrica a cada supermercado). (156-157)

Agregar en la tabla de distribución otra fila y otra columna para que esa presentación de la información ayude a los estudiantes a visualizar la información y completar la tabla de distribución en términos de las variables x, y. (175-187)

Complementar la información de la tabla de distribución, a través de preguntas a los estudiantes (que se responden comparando la producción y la demanda con las variables definidas x, y). (198-221)

Hacerles notar que sólo con dos variables han conseguido obtener la tabla de distribución y no con seis (lo cual complicaría la resolución). (222-226)

Completar la respuesta de E2 y orientarla a la presentación del contenido (E2 responde que el objetivo en este problema es encontrar el número de cajas que deben enviarse, Emi completa esa respuesta comentando que el número de cajas que deben enviarse pero al menor coste posible). (232-233)

Remarcarles lo que han hecho hasta el momento, es decir, los sitúa para luego avanzar en la presentación del contenido (les hace notar que en la expresión de la función objetivo tienen lo correspondiente a la fábrica A y que falta considerar lo de la fábrica B). (252-255)

Aclararles (sin que los estudiantes se lo pregunten) porque z se llama función objetivo (porque z es la función coste del transporte, función que depende de las variables x, y; objetivo porque lo que se quiere en el problema es conseguir que ese valor de la z sea mínimo). (269-274)

Evento de Término: Emi terminó de presentar la primera parte (datos, variables, tabla de distribución y función objetivo) de la estructura general de la “solución” del ejemplo del libro de texto (un problema de transporte de PL).

[11.1.3] Presentación de la segunda parte (restricciones y región factible) de la estructura de solución de un problema de programación lineal (PL) mediante un ejemplo. (276-400)

Objetivo particular: Presentar la segunda parte (restricciones y región factible) de la estructura de solución de un problema de programación lineal (PL) mediante un ejemplo del libro de texto.

Evento desencadenante: Iniciar segunda parte (restricciones y región factible) de la estructura de solución de un problema de programación lineal.

[A, 11.1.3] Emi explica en la pizarra la segunda parte (restricciones y región factible) del ejemplo resuelto de PL del libro de texto.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber transformar las desigualdades para dejar las incógnitas de lado izquierdo. (316-360)

CEC
Saber que al hacer operaciones con desigualdades el error de los estudiantes puede provenir de la extensión de las propiedades para las igualdades a las propiedades de las desigualdades y no tener en cuenta que en una desigualdad cuando se multiplica o se divide por un número negativo, cambia de signo la desigualdad. (325-330)

CC-Es
Prever que si les comenta a los estudiantes esa analogía en el proceso de despeje de variables en igualdades y desigualdades, los estudiantes pueden entender "mejor" o hacerse una mejor idea de lo que quiere que hagan en las desigualdades (las variables a la izquierda y los términos independientes a la derecha. (304-314)

Prever que los estudiantes no distingan la diferencia entre las desigualdades y las igualdades (que en las desigualdades hay ciertas operaciones que transforman la desigualdad y cambian el sentido de la desigualdad). (319-323)

CC-En
Aclararles (sin que ellos se lo pregunten) a que se le llama restricciones (a las condiciones que se dan en el problema). (280-282)

Aclararles que en los problemas de transporte, a diferencia de otros problemas de PL hay que definir las condiciones (restricciones) pues en otros problemas las restricciones las indica el mismo enunciado. (300-302)

Comentarles la analogía en el proceso de despeje de variables en igualdades y desigualdades (las variables a la izquierda y los términos independientes a la derecha). (304-314)

Hacer notar a los estudiantes lo que pasa en una desigualdad cuando se multiplica o se divide por un número negativo (cambia de signo la desigualdad). (325-330)

Decidir hacer este problema de transporte como primer ejemplo del tema de PL (un ejemplo resuelto del libro de texto). (29-428)

Decidir ir transformando las desigualdades en el primer ejemplo visto del nuevo tema (PL). (316-360)

Cerrar lo de las desigualdades, remarcándoles el conjunto de desigualdades que han obtenido. (361-362)

Cerrar lo que han hecho hasta el momento, es decir, recapitula lo que se ha hecho (datos, variables, tabla de distribución, función objetivo y restricciones) para luego comentarles lo que falta por hacer (región factible y encontrar el mínimo analíticamente). (370-428)

Decidir no resolver el sistema en ese momento, porque lo que quiere es mostrarles el aspecto de un problema de PL, es decir, la estructura de solución del problema y que los estudiantes se hagan una imagen concreta de dicha estructura. Por ello va a suponer que han resuelto las desigualdades para alcanzar a explicarles *grosso modo* lo que falta (región factible y encontrar el mínimo analíticamente). (377-385)

Resaltarles algunas características de la región factible que usará luego: región cerrada, vértices y frontera. (390-395)

Evento de Término: Emi terminó de presentar la segunda parte (restricciones y región factible) de la estructura general de la "solución" del ejemplo del libro de texto (un problema de transporte de PL).

[11.1.4] Presentación de la tercera parte (encontrar analíticamente el mínimo de la función

objetivo) de la estructura de solución de un problema de programación lineal (PL) mediante un ejemplo. (401-428)

Objetivo particular: Presentar la tercera parte (encontrar analíticamente el mínimo de la función objetivo) de la estructura de solución de un problema de programación lineal (PL) mediante un ejemplo del libro de texto.

Evento desencadenante: Iniciar a explicar la tercera parte (encontrar analíticamente el mínimo de la función objetivo) de la estructura de solución de un problema de programación lineal.

[A, 11.1.4] Emi explica en la pizarra la tercera parte (encontrar analíticamente el mínimo de la función objetivo) del ejemplo resuelto de PL del libro de texto.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber lo que es la región factible (región formada por vértices, si es acotada entonces el problema tiene solución y si es abierta entonces el problema no tiene solución). (413-417)

CC-En
Hacer notar a los estudiantes la estrategia final para encontrar analíticamente el mínimo, calculando el valor de z en cada uno de los vértices y comparar sus valores, después de escuchar el timbre que indica que la clase ha terminado y tratando de cumplir su objetivo. (425-428)

Saber qué y hasta dónde dejarles de deberes (sólo reproducir lo que han hecho en esta clase, con otro problema del libro de texto). (429-439)

Evento de Término: Emi terminó de presentar la tercera parte (encontrar analíticamente el mínimo de la función objetivo) de la estructura general de la “solución” del ejemplo del libro de texto (un problema de transporte de PL).

Evento de Término: Se terminó la clase, Emi terminó de ver la estructura general de la “solución” del ejemplo del libro de texto, un problema de transporte de PL.

Análisis de la clase 13 de Emi

[13.1] Revisión de ejercicios para lograr que los estudiantes sepan plantear problemas de programación lineal siguiendo las diferentes etapas (en el orden que Emi les indicó en clases anteriores) para ello. (1-186)

Objetivo general: Revisar los ejercicios que dejó de deberes en los que pretende que los estudiantes sepan plantear problemas de programación lineal siguiendo las diferentes etapas (en el orden que Emi les indicó en clases anteriores) para ello.

Evento desencadenante: Inicia la revisión del primer ejercicio que quedó de tarea (el planteamiento de un problema de PL).

[A, 13.1] Emi pasa a la pizarra a E1 (que fue la que hizo sus deberes) para que explique cómo planteó el problema, luego Emi termina de hacer el planteamiento al ver que E1 no lo hizo correctamente.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber que entre las restricciones se pueden juntar algunas inecuaciones, lo cual es

válido matemáticamente pero que ahora es mejor dejarlas por separado, tal y como las han escrito, para resolver el problema (por ejemplo, saber que $x \geq 0$, $x \leq 100$ se puede escribir como $0 \leq x \leq 100$ pero que es mejor dejarlas como $x \geq 0$, $x \leq 100$ para solucionar el problema). (154-162)

CEC
Saber que al escribir matemáticamente, el error de los estudiantes puede provenir de que no saben escribir correctamente lo que están pensando, es decir, que para resolver los problemas propuestos, no basta con pensar sino que además hay que saber escribir correctamente ese pensamiento matemático. (45-46)

CC-Es
Prever que los estudiantes entenderán "mejor" el problema al "traducirles" en lenguaje común, "lo que dice" el problema, es decir, desmenuzarles los datos del problema en lenguaje más familiar a los estudiantes. (23-31)

Prever que los estudiantes divaguen en definir más de dos variables. (37-40)

Prever que los estudiantes se pueden quedar con la imagen de que siempre las tablas de distribución deben ser grandes y por eso les aclara que no siempre tiene porque ser así. (112-113)

CC-En
Remarcarles lo que han hecho hasta el momento y qué es lo que sigue (que sólo han escrito los datos del problema y lo que sigue es definir las variables). (33-36)

Remarcarles nuevamente que el problema se resuelve definiendo sólo dos variables (para evitar que los estudiantes divaguen en definir más de dos variables). (37-40)

Hacerles notar la importancia de escribir adecuadamente el pensamiento matemático, es decir, no sólo pensarlo sino también escribirlo (ese es un aspecto importante en matemáticas), en este caso, saber definir adecuadamente las 2 variables para resolver el problema propuesto. (45-46)

Emi aprovecha que no están bien definidas las variables que ha escrito E1 en la pizarra, para hacerles notar que deben definirlas correctamente, dar el significado exacto de cada una de las variables. (45-52)

Emi trata de remarcarles que (54-65):
1. Se trata de un problema cuyo objetivo es diferente a los anteriores (antes se buscaba el mínimo y ahora el máximo).
2. Independientemente de que la función objetivo consista en buscar el máximo o el mínimo, el procedimiento para resolver el problema es el mismo.
3. La facilidad de identificar la función objetivo (donde diga máximo o donde diga el mínimo en el problema).

Remarcarles cada una de las etapas para resolver problemas, hasta las restricciones, pero sobre todo hacerles hincapié en que deben seguir el orden que ella les dio. (76-80)

Aclararles lo que E1 ha anotado en la tabla de distribución y aprovechar eso para decirles lo que es correcto, lo que no es necesario y/o que está incorrecto de la tabla de distribución propuesta por E1. (81-110)

Comentarles sobre una columna que E1 había escrito y que no es necesaria en la tabla de distribución, es decir, corrige lo que hizo E1 en la pizarra. (115-118)

Aprovechar la respuesta de E3 para corregir a E1, para hacerle notar que en la primera restricción es $x \geq 0$ y no $x \geq 1$, además de que $y \geq 0$. (131-140)

Tratar de explicarle a E1 porque $x \geq 0$ y no $x \geq 1$. (141-144)

Tratar de explicarle a E1 su fallo en el planteamiento y aprovecha para destacarles el hecho de que deben saber distinguir los datos que van en cada una de las etapas y no forzar los datos para ponerlos todos en una etapa, por ejemplo no anotar datos en la tabla de distribución que no sean necesarios. (172-183)

Cerrar el ejemplo diciéndoles las etapas que conforman el planteamiento del problema y comentándoles que ya sólo les faltaría hacer la resolución del problema para terminarlo completamente. (184-186)

CC
Saber los contenidos que vienen en el libro de texto. (15-22)

CPG
Tomar en cuenta a E1 porque ella hizo este ejercicio (fue la única que hizo sus deberes). (152-153)

Evento de Término: Emi terminó de revisar el primer problema de los deberes (sólo el planteamiento).

[13.2] Revisión de otro ejercicio para lograr que los estudiantes sepan plantear problemas de programación lineal siguiendo las diferentes etapas (en el orden que Emi les indicó en clases anteriores) para ello. (187-428)

Objetivo general: Revisar otro de los ejercicio que dejó de deberes en los que pretende que los estudiantes sepan plantear problemas de programación lineal siguiendo las diferentes etapas (en el orden que Emi les indicó en clases anteriores) para ello.

Evento desencadenante: Inicia la revisión del segundo ejercicio que quedó de tarea (sólo hasta el planteamiento de un problema de programación lineal).

[A, 13.2] Emi invita a los estudiantes a pasar a la pizarra, nadie pasa y entonces Emi les da unos minutos (cerca de 5 minutos) para que cada estudiante intente hacer el planteamiento del problema, pero Emi se desespera y ella lo hace en la pizarra.

Conocimientos en acción:

CCC

Saber la analogía entre el problema equivalente anterior y el que está presentando, por ser los dos problemas de transporte en PL y que de esa forma se guíen los estudiantes en el procedimiento y solución que tienen del anterior para resolver este. (249-270)

Saber que no es lo mismo 8000-(x+y) que (x+y)-8000 y que de acuerdo al problema debe ser 8000-(x+y). (379-381)

Saber que hay que simplificar la expresión matemática extensa que han obtenido de la función objetivo. (415-417)

CEC
Saber que el rol de "definir bien las variables" es muy importante para resolver problemas de programación lineal porque parte del éxito o fracaso en la solución el problema depende en cómo son definidas las variables. Esto es, el conocimiento matemático que viene de la reflexión que tiene el profesor a cerca de la importancia de definir bien las variables. (387-391)

CC-Es
Prever que los estudiantes no vean que este problema es equivalente a otro problema de transporte que habían hecho anteriormente. (249-252)

Prever que E9 puede necesitar ayuda y acude a ella para ayudarle a identificar los datos del problema en su libro de Braille. (318-319)

Interpretar el pensamiento matemático de E7, al aclararle que no están anotando en la tabla de distribución el coste del transporte sino sólo el transporte, el movimiento que hay de unos sitios a otros. (321-324)

CC-En
Hacerles preguntas para que identifiquen el tipo de problema del que se trata, pues si identifican de qué tipo es, entonces tienen una idea de cómo se resuelve por ser un problema equivalente. (202)

Pregunta-respuesta de ella misma para ir escribiendo los datos del problema en la pizarra. (214-219). Preguntas a los estudiantes para ir anotando ella la tabla de distribución en la pizarra. (221-237)

Hacerles notar lo que tienen (los datos y la tabla de distribución) y qué es lo que tienen que determinar en el problema (las variables), es decir, que los estudiantes vayan pensando cómo definir las variables en este problema. (239-246)

Hacerles notar que este problema es equivalente a otro que ya habían resuelto, aunque los estudiantes aparentemente no lo vean tan equivalente al otro, es decir, hacerles una analogía entre este problema y uno que ya habían hecho antes y comparar los datos de ambos problemas, de tal forma que esa comparación les sirva para ir resolviendo este problema de PL. (249-270)

Hacerles notar una pequeña diferencia entre los dos problemas equivalentes, para que los estudiantes se fijen que de Brujas sólo salen lotes de mantenimiento y de Munich lotes de choque. (271-282)

Hacerles notar que sólo ocupan de dos variables para resolver el problema, es decir, que en este caso, daría igual que escojan una ciudad a que escojan otra dado que las otras ciudades quedarían en relación a esas. (296-297)

Hacerles preguntas a los estudiantes para ir anotando ella la tabla de distribución en la pizarra. (303-386)

Aclararle a E7 que no están anotando en la tabla de distribución el coste del transporte sino sólo el transporte, el movimiento que hay de unos sitios a otros. (321-324)

Aprovechar la discusión que se presenta con la intervención de los **estudiantes** para hacerles notar que no están bien definidas las variables. (339-341)

Intentar hacer pensar a E15 sobre las consecuencias que pudieran existir si se definen las variables (incorrectas) como él propone. (347-352)

Evocar un ejemplo equivalente anterior. Emi vuelve a remarcarles que se fijen en el problema que han estado comparando con este y vean como está escrita la tabla de distribución. Emi ve que en ese momento los estudiantes se sienten desubicados/desorientados para saber definir las variables y por ello les recomienda fijarse en la tabla de distribución del problema que han estado comparando, de esa forma E2 logra definir adecuadamente las variables. Finalmente Emi les remarca que están bien definidas las variables que ha propuesto E2. (353-359)

Remarcarles la importancia de definir bien las variables, hacerles notar que normalmente todos los problemas de transporte se resuelven de forma similar y eso les puede servir para que se fijen como se definen las variables en este tipo de problemas de PL. (387-391)

Saber qué ejercicios dejarles de deberes. (426-428)

Evento de Término: Se terminó la clase.

IV.1.3.2. Modelación del proceso de enseñanza de la profesora Aly

Análisis de la clase 4 de Aly

[4.1] Revisión de dos ejercicios que dejo de deberes la clase anterior. (6-138)

Objetivo general: Corregir los ejercicios 3 y 5 de la página 60 del libro de texto referentes a ecuaciones con matrices.

Evento desencadenante: Iniciar la clase revisando dos ejercicios sobre ecuaciones matriciales que habían quedado de deberes.

[A, 4.1] Aly pasa a la pizarra a dos estudiantes para que hagan cada uno de los dos ejercicios que les había dejado de deberes la clase anterior.

Conocimientos en acción:

CCC

Saber aplicar las propiedades de campo al despejar la X, es decir, saber que 3X-2A+2A=5B+2A luego 3X=5B+2A y que se pueden multiplicar por el escalar 1/3 y entonces X=(5B+2A)/3. (61-67); (77-79)

Saber hacer operaciones básicas con matrices (suma, división/multiplicación por un escalar). (80-87)

CEC
Saber que al aplicar la propiedad conmutativa en el producto de matrices, el error de los estudiantes puede provenir de la extensión de la propiedad conmutativa del producto en los números reales al producto en matrices. Aly usa este saber para alertar a los estudiantes de la no conmutatividad en el producto de matrices. (118-123)

CC-Es
Prever que los estudiantes pueden pensar que la forma en que ella resuelve el ejercicio es más fácil que la que usó E2 ó viceversa. El ejercicio consiste en hallar los valores de la matriz X, sabiendo que 3X-2A=5B y dando los valores de la matriz A y B. (70)

CC-En
"Traducir" a los estudiantes lo que está haciendo E2, es decir, como lo está resolviendo E2. (35-39)

Remarcarles que la dificultad es la misma en la forma que lo hace E2 y en la forma que lo ha hecho ella. (70)

Hacerles notar que el resultado es el mismo haciendo el ejercicio de la forma que lo hizo E2 y de la forma que lo hizo ella y remarcarles que lo importante es saber hacer el ejercicio. (88-90)

Evento de Término: Terminaron de revisar los 2 ejercicios que había dejado de deberes la clase anterior.

[4.2] Presentación del primer método para calcular la matriz inversa. (139-362)

Objetivo general: Presentar a los estudiantes el primer método para calcular la matriz inversa ($AA^{-1}=I$), a través de un ejemplo que viene resuelto (desarrollado) en el libro de texto.

Evento desencadenante: La presentación de dos métodos para calcular la matriz inversa de una matriz.

[A, 4.2] Aly explica el primer método para calcular la inversa de una matriz apoyándose de un ejemplo resuelto que viene en el libro de texto.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber las propiedades del producto de matrices (asociativa y matriz identidad). (176-191)

Saber que no siempre existe la matriz inversa, es decir, que no todas las matrices, a pesar de ser cuadradas, tienen inversa. (201-202); (218-219)

Saber que A por A inversa es igual a la matriz identidad ($AA^{-1}=I$) y usar esa caracterización como primer método para encontrar A inversa. (222-362)

Saber hacer la comprobación, una vez que se obtiene la matriz inversa de A, comprobar ese resultado. (319-342)

CEC
Saber que al aplicar la propiedad conmutativa y el elemento identidad en el producto de matrices, el error de los estudiantes puede provenir de la extensión de la propiedad conmutativa y elemento identidad del producto en los números reales al producto en matrices. Aly sabe que el producto de matrices no es conmutativo y que el elemento identidad en el producto de matrices no existe para matrices de cualquier orden sino sólo para matrices cuadradas. (178-181); (187-191)

CC-Es
Prever que los estudiantes pueden pensar que el elemento identidad en el producto de matrices existe para una matriz de cualquier orden (pero sólo existe para matrices cuadradas). (187-191)

Prever que los estudiantes pueden resolver fácilmente 2 sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas y sin escribir el procedimiento, Aly sólo anota los valores resultantes de las incógnitas, cuyos valores representan la matriz inversa en el ejemplo. (299-305)

Prever que los estudiantes pueden equivocarse al colocar los valores resultantes de las incógnitas, es decir, que tal vez no tengan cuidado al acomodarlos adecuadamente en la posición inicial, en su posición propuesta al plantear con esas incógnitas los elementos de la matriz inversa. (306-308)

CC-En
Antes de empezar a explicar el primer método para calcular la matriz inversa, Aly les enuncia lo que han visto (propiedades de la suma, de un producto por un número, propiedades del producto) para aterrizar en que la que les faltaba ver es la matriz inversa. Primero da un repaso de lo visto en días anteriores (las propiedades de las matrices que habían visto) para aterrizar en que, lo que les falta ver es la matriz inversa. (139-152)

(Utilidad) Anunciarles que verán dos métodos para calcular la inversa pero luego dará otro que será el que usarán más. (164-173)

Aly nuevamente repasa las propiedades pero en particular las del producto de matrices hasta aterrizar en el tema que le interesa dar hoy, la matriz inversa. (174-191)

Al abordar las propiedades del producto de matrices, Aly va resaltando los aspectos más importantes de 2 propiedades:

1. Que en el producto de matrices AB es distinto de BA (178-181)
2. Que el elemento neutro en el producto de matrices, es sólo para matrices cuadradas. (187-191)

Remarcarles que no siempre existe la matriz inversa, es decir, que no todas las matrices, a pesar de ser cuadradas, tienen inversa. (201-203); (218-219)

Aly les plantea la cuestión de existencia de la matriz inversa para introducir el tema (primer método para calcular la inversa). (194-209)

Aly decide presentarles el primer método para calcular la matriz inversa usando un ejemplo que viene resuelto en el libro de texto. (206-209)

Hacerles notar que en matrices, en el caso concreto de $AA^{-1}=A^{-1}A$ sí se da la conmutatividad. (221-228)

Comentarles la analogía del ejercicio a hacer con el ejercicio hecho anteriormente, es decir, les comenta que este ejercicio es parecido a un ejercicio equivalente que hicieron anteriormente. (231-232)

Enseñando a hacer (1er. método) (240-291):

1. Anotar la condición $AA^{-1}=I$
2. Denotar como incógnitas a los elementos de la matriz A^{-1}
3. Verificar el orden de cada una de las matrices
4. Calcular $AA^{-1}=I$
5. Plantear la estrategia para encontrar los valores de las incógnitas de la matriz inversa, es decir, resolver el sistema de ecuaciones que se obtienen y de ahí encontrar los valores de A^{-1}.

Hacerles notar que se trata de 2 sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas, luego sólo anota los resultados porque quiere optimizar el tiempo y considera que lo pueden resolver fácilmente. (299-305)
Enseñando a hacer: Aly les comenta lo que hay que hacer (AA^{-1}=¿?=I) para comprobar el valor de la matriz inversa que acaban de encontrar usando el primer método y les recomienda hacer dicha comprobación si les queda tiempo en un examen. (317-318)

Remarcarles nuevamente la condición que se debe cumplir para que A^{-1} sea la inversa de A (que $AA^{-1}=I$). (345-346)

CC
Saber que el método de Gauss-Jordán no es el más rápido pero hay que verlo porque es parte del currículo. (216)

Evento de Término: Aly terminó de presentar el primer método para calcular la inversa.

[4.3] Presentación del segundo método para calcular la matriz inversa (Gauss-Jordán). (363-572)

Objetivo general: Presentar a los estudiantes el segundo método para calcular la inversa de una matriz (Gauss-Jordán).

Evento desencadenante: La presentación del segundo método para calcular la matriz inversa de una matriz (Gauss-Jordán).

[A, 4.3] Aly les suministra una fotocopia que ella les preparó para explicar el método de Gauss-Jordán, en dicha fotocopia aparece una breve explicación del método y tres ejemplos resueltos considerando matrices de orden 3x3. Aly utiliza esa fotocopia para ir explicando el método a través de un ejemplo. Para finalizar la presentación de este segundo método, concluye con un texto corto que aparece en el libro de texto, referente al tema de matriz inversa.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber los cambios (un cambio puede tener una o más transformaciones elementales) que necesita realizar y sus respectivas transformaciones elementales para hallar la matriz inversa, en sí, saber el método de Gauss-Jordán. (422-512)

Saber que en la notación de una transformación elemental la primera fila que se denote es la que sufre los cambios, por ejemplo en la transformación F_1-F_2, la F_1 es la que se modifica. (433)

Saber que dividir una fila de la matriz por 3 es lo mismo que multiplicarla por 1/3 (propiedad del producto de un escalar por una matriz). (527-528)

CC-Es
Prever que muchas de las veces al hacer la operación 0-1, los estudiantes pueden despistarse con ese cero y fallar en el resultado de la operación, pues ven en una fila el cero y en otra fila el 1 y saben que hay que restar 0 menos 1, pero al ver el cero pueden despistarse y equivocarse en el resultado, escribir 1 en lugar de -1. (467-470)

Prever el error que pueden cometer los estudiantes, anticipa que al hacer ceros por debajo y por encima de la diagonal, los estudiantes pueden retroceder en lo que ya se tiene hecho, en lugar de avanzar. (492-498)

CC-En
Comentarles la utilidad de un contenido matemático abordado anteriormente, es decir, evocarles ese contenido anterior para que se ubiquen y se hagan una idea de lo que se va a hacer ahora. (348-351)

Enseñando a hacer:
Descripción del método (Gauss-Jordán). (374-512)
Para ello Aly se basa en lo que aparece en la fotocopia que ella les preparó.

1. Colocar la matriz A y al lado la matriz identidad.
2. Comentarles la estrategia a seguir para encontrar la inversa, es decir, hacer

transformaciones elementales para hacer ceros en los elementos por debajo y por encima de la diagonal de la matriz A y lograr hacer unos en la diagonal principal.

3. Realizar los cambios y transformaciones elementales necesarias.

Remarcarles constantemente la estrategia para hallar la matriz inversa con el método de Gauss-Jordán mientras va desarrollando el ejemplo, para que los estudiantes no se pierdan cuando ella va haciendo las transformaciones elementales para conseguir la matriz inversa. (382-393); (397-402)

Aly les da una breve descripción de lo que verán en la fotocopia que ella les preparó para abordar la explicación de este método. (410-414)

Explicarles porqué propone lo que propone en la primera transformación elemental. (424-428)

Remarcarles que en la primera transformación F_1-F_2 la F_1, es decir, la primera fila que se anote es la que sufre las modificaciones. (433)

Remarcarles que hay que hacer las transformaciones a la fila indicada de manera completa, es decir, incluyendo a la fila correspondiente de la matriz identidad, simultáneamente. (438-439)

Remarcarles lo que se ha hecho, en particular, lo que se ha conseguido con esa transformación elemental. (446-447)

Evocar que hacer transformaciones elementales es algo que ya han estado trabajando anteriormente en clase, para que los estudiantes adquieran mayor seguridad al desarrollar el método. (460); (489)

Situarlos, detenerse y hacerles ver que ya va quedando lo deseado (ceros por debajo y por encima de la diagonal principal), además aprovecha para preguntarles cómo conseguir el último cero que falta hacer para terminar el ejemplo. (478-489)

Habilidad para plantearles una situación hipotética para prevenirlos de error. En este caso, suponer que hagan una transformación elemental de manera incorrecta y que en lugar de avanzar retrocedan al diagonalizar la matriz para calcular la matriz inversa. (492-498)

Para concluir la aplicación del método Aly vuelve a remarcarles de manera resumida lo que se hizo en el ejemplo. (513-519)

Habilidad para plantearles una situación hipotética, adelantándose a una situación que podrían tener los estudiantes en ejercicios posteriores, con el objetivo de que tengan idea de lo que deben hacer ante una situación similar a la que les plantea, Aly les comenta el caso en el que en la diagonal principal obtuvieran 1, 3, 1 en lugar de 1, 1, 1; y que en ese caso sólo habría que multiplicar por 1/3 toda la fila en la que se encuentra el 3. (520-533)

Remarcarles la parte final del segundo ejemplo resuelto en la fotocopia para hacerles notar la situación en la que hayan logrado conseguir la diagonal 1, -1, 1 en lugar de 1, 1, 1. Aly intenta que tengan idea de cómo conseguir en la diagonal el 1, 1, 1, es decir, que sepan convertir el -1 en 1, que en ese caso sería multiplicar por -1 toda la fila donde está el -1. (538-547)

Recursos (fotocopia): Aly al observar que en el libro no viene la explicación para calcular la inversa, decide plasmar en una fotocopia el método de Gauss-Jordán, decirles en qué consiste y darles 3 ejemplos resueltos en los que aparecen las transformaciones elementales necesarias hasta llevar a la matriz inversa y finalmente concluye esa parte apoyándose del texto que aparece en el libro respecto a la matriz inversa. (548-571)

CC
Saber qué contenidos deben aprender los estudiantes aunque no aparezcan en el libro de texto (método de Gauss-Jordán). (548-571)

Evento de Término: Aly terminó de ver el método de Gauss-Jordán para calcular la matriz inversa.

[4.4] Presentación de dos propiedades que se cumplen con los números reales pero que no se cumplen con matrices. (573-635)

Objetivo general: Presentar a los estudiantes dos propiedades que se cumplen con los números reales pero que no se cumplen con matrices y remarcárselos varias veces para que lo tomen en cuenta en ejercicios posteriores.

Evento desencadenante: La presentación de dos propiedades que se cumplen con los números reales pero que no se cumplen con matrices.

[A, 4.4] Aly les explica porque esas dos propiedades que se cumplen con los números reales no se cumplen con las matrices, luego les propone un ejercicio para que practiquen no importa que no lo terminen en clase, finalmente les deja, entre otros deberes, que terminen en casa.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber que estas dos propiedades $(A+B)^2$ y $(A+B)(A-B)$ que se cumplen con los reales no se cumplen con las matrices, es decir, que en matrices $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$ y que $(A+B)(A-B) \neq A^2-B^2$. (582-594)

CEC
Saber que al aplicar la propiedad conmutativa en el producto de matrices, el error de los estudiantes puede provenir de la extensión de la propiedad conmutativa del producto en los números reales al producto en matrices. En este caso, usa ese conocimiento al remarcarles que el conocido desarrollo del cuadrado de un binomio y la diferencia de cuadrados para números reales no se verifica para matrices [$(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$ y $(A+B)(A-B) \neq A^2-B^2$]. (602-628)

CC-Es

Prever que los estudiantes pueden equivocarse, es decir que donde más se pueden equivocar es al hacer los cálculos, las operaciones en el procedimiento. (666-667)

CC-En
Decidir ver un ejercicio del libro porque sabe que los estudiantes pueden presuponer que se cumplen esas dos propiedades (por herencia de los números reales) y que en matrices no se cumple. Las dos propiedades que no se cumplen en matrices son $(A+B)^2$ y (A+B)(A-B). (573-575)

Remarcarles que esas dos propiedades en general no se cumplen en matrices por que en las matrices el producto no es conmutativo. (629-631)

Para concluir, cerrar el ejemplo, Aly les vuelve a remarcarles que tengan cuidado cuando aparezcan esas dos propiedades en las matrices. (632-635)

Aly les explica lo que quiere que hagan (que calculen la matriz inversa con el método de Gauss) en el ejercicio y para qué quiere que lo hagan (para que vean los pasos para llegar a eso). (641-650)

Aly les comenta la estrategia para hacer un ejercicio, les da un "empujoncito", pues ella considera que es lo que ella debe hacer para que los estudiantes empiecen a hacer el ejercicio. (654-656)

CPG
Controlar la indisciplina. (595-597)

Evento de Término: Se terminó la clase.

Análisis de la clase 6 de Aly

[6.1] Entrega de los exámenes del primer tema del primer bloque. (1-48)

Objetivo general: Entregarles los exámenes y hacerles algunos señalamientos sobre las respuestas que dieron algunos estudiantes.

Evento desencadenante: Iniciar la clase entregando los exámenes y su calificación del primer tema del primer bloque.

[A, 6.1] Aly comenta los principales errores cometidos por los estudiantes en el primer examen del bloque.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber el rol que juega la matriz y el rango de la matriz para determinar la dependencia o independencia lineal. Saber que si los estudiantes miran la matriz y el rango de la matriz que acaban de obtener, de ahí pueden decidir la dependencia o independencia lineal. (25-33)

CC-En
Recursos: Darles una fotocopia con las soluciones a los ejercicios del examen para que los estudiantes revisen cómo se resuelve. (1)

Hacer una serie de señalamientos sobre errores que cometieron algunos estudiantes en dicho examen, al decirlo en el grupo puede alertar a los demás sobre los errores que se comenten y de alguna forma prevenirlos del error. (7-48)

Remarcarles en el examen que se fijen en la matriz, "mirad la matriz", debido a que los estudiantes acababan de obtener el rango de la matriz y de ahí podían decidir la dependencia o independencia lineal. (25-33)

Evento de Término: Terminó de comentar a los estudiantes algunos señalamientos sobre las respuestas que dieron en el primer examen del bloque.

[6.2] Presentación de la definición del determinante. (49-180)

Objetivo general: Presentar la definición del determinante.

Evento desencadenante: Iniciar la presentación de la definición del determinante.

[A, 6.2] Aly explica en la pizarra la definición del determinante y luego se apoya del libro de texto para calcular el determinante en dos ejemplos.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber que el determinante de una matriz se representa con un número. (62-72)
Saber cómo se obtiene el determinante de una matriz de orden 2x2. (74-81); (105-108); (116-123)

Saber que la clasificación de los sistemas de ecuaciones tiene mucho que ver con los elementos de la matriz de coeficientes, saber que para conocer dicha clasificación, hay que hacer el determinante de la matriz de coeficientes y ver si el resultado es cero o distinto de cero. (89-90); (97-99); (109); (124-129)

Saber usar la notación matemática para representar el determinante. (104)

Saber la definición del determinante de cualquier matriz cuadrada. (135-140)

Saber aplicar la definición del determinante a un ejemplo concreto de una matriz de 2x2. (141-157)

CC-En
Hacerles notar que esta parte de los contenidos del curso es muy mecánica pero que aún así, en la parte de sistemas de ecuaciones se complica un poco porque hay muchas operaciones algebraicas y ahí hay que pensar muy bien las operaciones y los cambios de signos. (51-54)

Remarcarles la idea de que el determinante de una matriz es un número. Para eso, ella se los comenta y luego se los refirma con un trozo de texto que aparece en el libro, en el que se menciona la idea que les remarca. (62-72)

“Traducir” hasta llegar al término exacto que usa comúnmente en el grupo: “sale un sistema compatible determinado, es decir, que tiene una solución única, es decir, que existe una única solución”. (87-88)

Utilidad. Remarcarles que posteriormente, para conocer la clasificación de sistemas de ecuaciones, lo importante será hacer el determinante de la matriz de coeficientes y ver si el resultado es cero o distinto de cero. (89-90); (97-99); (109); (124-129)

Hacerles notar que para poder calcular el determinante de una matriz, ésta debe ser cuadrada. (133-134)

Mediante un ejemplo concreto de una matriz de 2x2, Aly trata de explicar lo que dice la definición del determinante para cualquier matriz cuadrada y luego les reafirma nuevamente que se cumple lo que se menciona en la definición para ese ejemplo. (141-157)

Hacerles ver que con determinantes de matrices de orden 2x2 no hay mucha complicación pero sí para calcular el determinante (los productos para obtener el determinante) de matrices de orden mucho mayor, por ejemplo para calcular el determinante de una matriz de orden 6x6, y así hacerles notar que para ello se pueden apoyar de las propiedades de los determinantes. (160-173)

CC
Saber los contenidos que deben aprender y la orientación de éstos, pues el tema que está presentando es determinantes pero sabe que eso se ocupará luego cuando explique la clasificación de sistemas. (97-99)

CPG
Motivación: Animarlos a que hagan los deberes. (58-60)

Evento de Término: Aly terminó de presentar a los estudiantes los ejemplos del determinante (después de darles la definición).

[6.3] Presentación de las propiedades de los determinantes para matrices de orden 2x2. (181-634)

Objetivo general: Presentar las propiedades de los determinantes para matrices de orden 2x2.

Evento desencadenante: Iniciar la presentación de las propiedades de los determinantes para matrices de orden 2x2.

[A, 6.3] Emi explica en la pizarra las propiedades de los determinantes para matrices de orden 2x2.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber la primera propiedad de los determinantes, que el determinante de una matriz A coincide con el de su traspuesta. (218-222)

Saber la notación matemática para representar la primera propiedad de los determinantes (de una matriz cuadrada de orden 2). (218-222)

Saber aplicar la primera propiedad de los determinantes a un ejemplo concreto (de una matriz cuadrada de orden 2). (224-264)

Saber que el det A = det A^t se cumple por la conmutatividad del producto en los números reales, a pesar de que se haya cambiado el orden de los elementos de la diagonal secundaria. (251-264)

Saber la segunda propiedad de los determinantes, si una fila o columna es cero entonces el determinante vale cero. (278-283)

Saber la notación matemática para representar la segunda propiedad de los determinantes (de una matriz cuadrada de orden 2). (278-283)

Saber aplicar la segunda propiedad de los determinantes a un ejemplo concreto (de una matriz cuadrada de orden 2). (272-292)

Saber la tercera propiedad de los determinantes, si se cambia una fila o columna entonces el determinante cambia de signo. (301-310)

Saber la notación matemática para representar la tercera propiedad de los determinantes (de una matriz cuadrada de orden 2). (304-310)

Saber aplicar la tercera propiedad de los determinantes a un ejemplo concreto (de una matriz cuadrada de orden 2). (320-337)

Saber la cuarta propiedad de los determinantes, si un determinante tiene dos filas o dos columnas iguales, el determinante vale cero. (341-342)

Saber la notación matemática para representar la cuarta propiedad de los determinantes (de una matriz cuadrada de orden 2). (343-346)

Saber aplicar la cuarta propiedad de los determinantes a un ejemplo concreto (de una matriz cuadrada de orden 2). (347-352)

Saber la quinta propiedad de los determinantes, si existe un múltiplo común en toda una fila o columna, ese múltiplo puede salir del determinante y el determinante queda más simplificado (quedaría el número que se saca multiplicado por el determinante simplificado). (355-365)

Saber la notación matemática para representar la quinta propiedad de los determinantes (de una matriz cuadrada de orden 2). (355-365)

Saber aplicar la quinta propiedad de los determinantes a un ejemplo concreto (de una matriz cuadrada de orden 2). (366-401)

Saber la sexta propiedad de los determinantes, si existe una proporcionalidad entre dos filas o dos columnas, el determinante vale cero. (422-425)

Saber la notación matemática para representar la sexta propiedad de los determinantes (de una matriz cuadrada de orden 2). (426-431)

Saber aplicar la sexta propiedad de los determinantes a un ejemplo concreto (de una matriz cuadrada de orden 2). (432-458)

Saber la séptima propiedad de los determinantes, si una fila o columna es suma de dos números, su determinante puede descomponerse en la suma de los determinantes de dos matrices. (469-471)

Saber la notación matemática para representar la séptima propiedad de los determinantes (de una matriz cuadrada de orden 2). (472-480)

Saber aplicar la séptima propiedad de los determinantes a un ejemplo concreto (de una matriz cuadrada de orden 2) y proponer ella misma el ejemplo como el que pudiera aparecer en cualquier libro de texto. (481-499)

Saber la octava propiedad de los determinantes, un determinante formado por dos filas (o dos columnas) es el mismo que si a una de las dos filas (o columnas) le sumo una combinación lineal de la otra. (505-507)

Saber la notación matemática para representar la octava propiedad de los determinantes (de una matriz cuadrada de orden 2). (508-512)

Saber aplicar la octava propiedad de los determinantes a un ejemplo (de una matriz cuadrada de orden 2)) y proponer ella misma el ejemplo como el que pudiera aparecer en cualquier libro de texto. (517-572); (582-606)

Saber la novena propiedad de los determinantes, el determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes. (630-633)

CEC
Saber que al hacer cambio de fila o de columna en un determinante, el error de los estudiantes puede provenir de la analogía de cuando hacían cambio de fila en una matriz bajo una transformación elemental. Si se hace un cambio de fila o de columna en el determinante, el resultado del determinante se verá afectado, a diferencia de cuando hacían cambio de fila en una matriz bajo una transformación elemental. (294-300); (314-318)

CC-Es
Prever que los estudiantes se pueden equivocar al hacer el cambio de fila o de columna, al no considerar que ahora se verá afectado el resultado del determinante por un signo menos, a diferencia de cuando hacían un cambio de fila en una matriz bajo una

transformación elemental. (294-300); (314-318)

Prever que los estudiantes empiecen a hacer cálculos innecesarios cuando puedan aplicar una propiedad de los determinantes. (326-333); (368-369)

Prever que los estudiantes pueden comprender "mejor" la quinta propiedad de los determinantes (para una matriz cuadrada de orden 2) si se las dice en lenguaje común. (360-365); (402-405)

Prever que los estudiantes pueden comprender "mejor" la quinta propiedad si escribe detalladamente los pasos de la solución y utiliza términos más conocidos para ellos, por ejemplo "factor común". (376-395)

Prever que los estudiantes pueden comprender "mejor" la quinta propiedad al remarcarles en el ejemplo que pueden sacar el 5 como factor común y recomendarles que entre más simplifiquen los números del determinante mejor. (396-401)

Prever que los estudiantes se pueden quedar con la imagen de que hay que detallar exhaustivamente los pasos al hacer un ejercicio y por eso Aly les comenta que al hacer los ejercicios, en la práctica, se aplica la propiedad directamente y no es necesario tanto detalle (pues ella escribió detalladamente los pasos en el ejemplo: expresar primero 20 como 5 por 4 y 45 como 5 por 9 y luego al hacer el determinante, escribir todo el proceso detallado para que los estudiantes vean que pueden extraer el 5 como factor común). (406-413)

Prever que los estudiantes pueden comprender "mejor" la octava propiedad de los determinantes (para una matriz cuadrada de orden 2) si se las dice en lenguaje común, en lenguaje más cómodo para los estudiantes. (508-515); (569-572)

Capacidad para escuchar e interpretar el conocimiento/pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje usual, en particular, para escuchar e interpretar la pregunta que hace E1. (607-619)

Prever que los estudiantes se harán más fácilmente una idea de la octava propiedad, si les remarca la esencia de esa propiedad (*que el determinante no varía aunque realice por en medio transformaciones elementales*) en términos matemáticos familiares a los estudiantes, es decir, prever que de esa forma se les quede más grabada esa propiedad que usarán luego. (622-627)

CC-En
Hacerles notar que se cumple lo que dice la definición del determinante para cualquier matriz cuadrada para el caso de una matriz de orden 2, antes de explicarles las propiedades de los determinantes de matrices cuadradas de orden 2. (194-207)

Explicarles nuevamente cómo se calcula el determinante para esas matrices y remarcarles que la definición del determinante se cumple para matrices de orden 2, antes de explicar la primera propiedad para determinantes de matrices de orden 2. (183-217)

Remarcarles nuevamente lo que dice la primera la primera propiedad de los determinantes para tratar de que les quede claro lo que dice y luego para explicarla usa un ejemplo. (221-225)

Guiar las respuestas de los estudiantes y darles ayudas explícitas (Aly calcula el primer producto para obtener el determinante de la matriz cuadrada de orden 2). (226-239)

Hacerles notar que el det A = det A^t se cumple por la conmutatividad del producto en los números reales, a pesar de que se haya cambiado el orden de los elementos de la diagonal secundaria. (251-264)

Dar un ejemplo antes de decir la segunda propiedad, de hecho su estrategia para presentar la segunda propiedad de los determinantes es:
Dar un ejemplo de cuando una fila sea 0, comentarles lo que dice la propiedad, enseguida un ejemplo de cuando la columna sea cero, nuevamente remarcarles lo que dice la propiedad y finalmente dar un ejemplo concreto en el que una fila sea cero y la otra fila contenga números concretos. (272-293)

Remarcarles que la fila o columna cero hacen que el valor del determinante sea cero. (293)

Hacerles notar que la tercera propiedad de los determinantes se cumple para cuando se cambien filas pero también para cuando se cambien columnas. (312-313)

Explicarles la quinta propiedad de los determinantes (para una matriz cuadrada de orden 2) en lenguaje común. (360-365)

La forma de presentarles el ejemplo en la quinta propiedad de los determinantes (para una matriz cuadrada de orden 2), de expresar primero 20 como 5 por 4 y 45 como 5 por 9 y luego al hacer el determinante, escribir todo el proceso detallado para que los estudiantes vean que pueden extraer el 5 como factor común. (376-395)

Remarcarles en el ejemplo para aplicar la quinta propiedad de los determinantes, que pueden sacar el 5 como factor común y recomendarles que entre más simplifiquen los números del determinante mejor. (396-401)

Remarcarles nuevamente la quinta propiedad de los determinantes (para una matriz cuadrada de orden 2) en lenguaje común. (402-405)

Comentarles que al hacer los ejercicios, en la práctica, se aplica la propiedad directamente y no es necesario tanto detalle (pues ella escribió detalladamente los pasos en el ejemplo). (406-413)

Anunciarles que en los ejercicios "tipo" que harán posteriormente, serán de tipo teórico, en el que comúnmente les den el valor de un determinante y con base en ese les pidan calcular otro determinante, para que los estudiantes se vayan haciendo una idea de los ejercicios que harán. (418-420)

Hacerles notar el hecho de que la fila dos es una fila que es proporcional a la fila uno, es decir, $F_2=aF_1$. (426-430)

Remarcarles nuevamente la esencia de la sexta propiedad (que una fila es proporcional a la otra). (431)

Interpreta y transfiere lo que está diciendo E2, lo transfiere y lo orienta y aprovecha para remarcarles en este ejemplo el uso de la propiedad anterior. (436-444)

Hacerles notar en el ejemplo de la sexta propiedad, que esta propiedad se deduce de las dos propiedades anteriores. (449-459)

Transfiere e interpreta la pregunta de E4 y luego da la respuesta a forma de explicación para todos los estudiantes. E4 pregunta a Aly si puede aplicar la propiedad viendo la igualdad del otro lado (←) y Aly aprovecha para hacerles notar a los estudiantes que lo pueden hacer. (460-467)

Hacerles notar a través del ejemplo por qué algunas veces interesa separar un determinante en la suma de dos determinantes (pues en ocasiones, al separar en la suma de dos determinantes uno da cero y pueden terminar los cálculos más fácilmente). (486); (492-499)

Explicarles la octava propiedad de los determinantes (para una matriz cuadrada de orden 2) en lenguaje común, en lenguaje más cómodo para los estudiantes. (508-515)

Proponer el ejemplo en la octava propiedad, es decir, inventárselo, lo va construyendo con ciertas preguntas a los estudiantes, a diferencia de los ejemplos que utiliza en las propiedades de la uno a la seis que los toma del libro de texto. (517-572)

Hacerles notar en el ejemplo que se puede justificar que el segundo determinante es cero por cualquiera de las dos propiedades anteriores (la sexta o la séptima). En particular, Aly toma en cuenta lo que dice E1 pero al final usa la propiedad que ella tiene en mente. (561-566)

Para cerrar el ejemplo de la octava propiedad de los determinantes, Aly vuelve a remarcarles lo que dice esa propiedad en lenguaje común. (569-572)

Evocar ejercicios equivalentes que han hecho anteriormente en clase. (589-591)

Transfiere e interpreta la pregunta de E1 y luego da la respuesta a forma de explicación para todos los estudiantes. (607-619)

Remarcarles la esencia de la octava propiedad de los determinantes en términos de transformación elemental, es decir, usando un lenguaje matemático familiar a los estudiantes (pues han estado haciendo transformaciones elementales a matrices, en varias clases anteriores). (622-627)

Aly presenta la octava propiedad de los determinantes, luego un ejemplo genérico, nuevamente les remarca la octava propiedad, enseguida un ejemplo concreto y finalmente vuelve a remarcarles lo que dice la octava propiedad. (622-627)

Saber qué ejercicios y ejemplos del libro dejarles de deberes a los estudiantes. (636-644)

CC
Saber los contenidos que vienen en el libro de texto. (266-271)

Saber los contenidos que vienen en el libro de texto. (573)

Evento de Término: Terminó la clase (Aly presentó 9 propiedades de los determinantes para matrices de orden 2x2).

Análisis de la clase 7 de Aly

[7.1] Presentación de un ejemplo (con cuatro apartados) para usar las propiedades de los determinantes de orden dos. (1-74)

Objetivo general: Presentar un ejemplo (ejercicio resuelto en el libro de texto, con cuatro apartados) para usar las propiedades de los determinantes de orden dos.

Evento desencadenante: Iniciar a presentar un ejemplo (ejercicio resuelto en el libro de texto) sobre propiedades de orden dos.

[A, 7.1] Aly explica en la pizarra la solución del primer ejercicio resuelto en el libro de texto (con sus 4 apartados) y hace algunas preguntas a los estudiantes para destacar aspectos que considere necesario resaltar en los apartados.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber que no se puede resolver el determinante a partir de lo que está [p q (en la primera fila) y r s (en la segunda fila)] porque se tendría una ecuación con cuatro incógnitas (en el ejercicio dan el dato que el determinante de p q (en la primera fila) y r s (en la segunda fila) vale cuatro). (16-18)

Saber usar la propiedad de los determinantes de que se puede sacar del determinante el término común que exista entre filas o columnas, tantas veces como en filas o columnas aparezca y eso multiplicarlo por el determinante que queda. (47-51)

Saber que $|AA^{-1}|=|A||A^{-1}|$, es decir, saber la propiedad del producto de determinantes y saber la propiedad de $AA^{-1}=I$ y entonces usarla para: $|A||A^{-1}|=|I|=1$ y entonces $|A^{-1}|=1/4$. (67-74)

CEC
Saber que al aplicar la quinta propiedad de los determinantes (si existe un múltiplo común en toda una fila o columna, ese múltiplo puede salir del determinante y el determinante queda más simplificado, quedaría el número que se saca multiplicado por el determinante simplificado) de manera recursiva, el error de los estudiantes puede provenir de la igualdad $|\alpha A|=\alpha|A|$, es decir, de la idea matemática de sacar una sola vez el múltiplo común del determinante y no recursivamente. En matrices, si A es una matriz cuadrada de orden 2, entonces $|\alpha A|=\alpha.\alpha|A|\neq|\alpha A|$, es decir, $|\alpha A|\neq\alpha|A|$, pues

ahora depende del orden de la matriz cuadrada A, el número de veces que quede multiplicado el múltiplo común por él mismo y todo ello multiplicado por el determinante de la matriz cuadrada A. En este caso $|11A| = 11.11|A| \neq |11|$ A, A es una matriz cuadrada de orden 2. (21-46)

CC-Es
Prever que los estudiantes se pueden equivocar al calcular el valor del determinante en el que en comparación con el original, las columnas están cambiadas, es decir, prever que los estudiantes pueden no fijarse en este aspecto que difiere entre las matrices y los determinantes; que en los determinantes al cambiar filas o columnas el resultado se altera, mientras que en las matrices podían cambiar filas mediante transformaciones elementales sin cambiar de signo y entonces en los determinantes: si el determinante de p q (en la primera fila), r s (en la segunda fila), vale cuatro, entonces el determinante de q p (en la primera fila), s r (en la segunda fila), vale menos cuatro. (60-66)

CC-En
Saber qué ejercicios proponerles para empezar a aplicar las propiedades de los determinantes de orden dos. En este caso Aly se guía de los primeros ejercicios propuestos por el libro de texto). (1-126)

Saber cuándo y cómo aclarar una idea a los estudiantes. ¿Cuándo? Cuando prevé que los estudiantes se pueden equivocar y ¿cómo? a través de preguntas a los estudiantes. Aly pregunta: ¿puedo decir que $|11A|=11|A|$? Para que a partir de ahí, los estudiantes piensen en esa posible situación. (21-46)

Alertarlos. Hacerles la recomendación de que tengan cuidado cuando tengan que calcular $|11A|$ con una matriz de orden 3x3 porque en ese caso habría que sacar 3 veces el 11. (47-51)

Plantearles una situación hipotética de qué pasaría si tuvieran que calcular $|11A|$ con una matriz A de orden 3x3. Aly usa esa estrategia para prevenir a los estudiantes del error. (47-51)

Resolver el ejemplo mediante preguntas a los estudiantes para remarcarles que se fijen en que es un ejemplo en el que en ese determinante en comparación con el original, está cambiado el orden de las columnas. (52-65)

Evento de Término: Terminar de revisar el ejemplo (ejercicio que viene resuelto en el libro de texto).

[7.2] Revisión de ejercicios para usar las propiedades de los determinantes de orden dos. (75-163)

Objetivo general: Revisar ejercicios (ejemplos) para usar las propiedades de los determinantes de orden dos.

Evento desencadenante: Iniciar a revisar el primer ejercicio propuesto en el libro de texto para usar propiedades de los determinantes de orden dos.

[7.2.1] Revisión del primer ejercicio para usar las propiedades de los determinantes de orden dos.

(75-126)

Objetivo particular: Revisar el primer ejercicio para usar las propiedades de los determinantes de orden dos.

[A, 7.2.1] Aly pregunta si alguien quiere pasar a la pizarra a hacer el primer ejercicio. E12 pasa a la pizarra a resolver los cuatro apartados del primer ejercicio que aparece propuesto para hacer en el libro de texto.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber calcular el determinante de orden 2. (79-84)

Saber que las razones que da E12 para justificar por qué el determinante da cero en el apartado c), d), e) y f) son correctas, es decir, saber las propiedades de los determinantes. En particular, saber que en el c), el determinante da cero porque hay una columna de ceros; en el apartado d), el determinante da cero porque dos columnas son iguales; en el apartado e), saber que el determinante da cero porque la segunda fila es siete veces la primera. (96-112) Y en el apartado f), saber que el determinante da cero porque la columna 1 es menos 20 veces la columna 2. (118-119)

CC-En
Remarcarles a los estudiantes este hecho importante al hacer determinantes: decir que vale cero sin hacer los cálculos, implica justificar por qué vale cero. (94-95)

Hacerle notar a E12 a través de preguntas orientadas el porqué da cero el valor del determinante sin necesidad de hacerlo (porque la segunda fila es siete veces la primera). (105-114)

Evento de Término: Terminar de revisar el primer ejercicio propuesto en el libro de texto.

[7.2.2] Revisión del segundo ejercicio para usar las propiedades de los determinantes de orden dos. (127-163)

Objetivo particular: Revisar el segundo ejercicio para usar las propiedades de los determinantes de orden dos.

Evento desencadenante: Iniciar a revisar el segundo ejercicio propuesto en el libro de texto para usar propiedades de los determinantes de orden dos.

[A, 7.2.2] Aly pregunta: ¿Quién quiere pasar a la pizarra para hacer el segundo ejercicio propuesto del libro de texto? E9 pasa a la pizarra a resolver los cuatro apartados del segundo ejercicio.

Conocimientos en acción

CCC
Saber que la respuesta de E9 es correcta (que como piden calcular ese determinante que es el mismo que el de partida sólo que con las filas cambiadas, entonces cambia de signo y el resultado es 13). (131-138)

Saber que $|6A| \neq 6|A|$ que en este caso es $6(6)|A|$ pues A es de orden 2x2. (142-143)

Saber usar la propiedad del determinante (de sacar un término común de una columna del determinante) para saber que es correcta la respuesta de E9. (148-158)

CEC
Saber que al aplicar la quinta propiedad de los determinantes (si existe un múltiplo común en toda una fila o columna, ese múltiplo puede salir del determinante y el determinante queda más simplificado, quedaría el número que se saca multiplicado por el determinante simplificado) de manera recursiva, el error de los estudiantes puede provenir de la igualdad $|\alpha A| = \alpha |A|$, es decir, de la idea matemática de sacar una sola vez el múltiplo común del determinante y no recursivamente. En matrices, si A es una

matriz cuadrada de orden 2, entonces $|\alpha A| = \alpha.\alpha|A| \neq \alpha|A|$, es decir, $|\alpha A| \neq \alpha|A|$, pues ahora depende del orden de la matriz cuadrada A, el número de veces que quede multiplicado el múltiplo común por él mismo y todo ello multiplicado por el determinante de la matriz cuadrada A. En este caso $|6A| = 6.6|A| \neq 6|A|$, A es una matriz cuadrada de orden 2. (142-143)

Saber que cuando un estudiante escriba 36.-13 para expresar ese producto, debe usar paréntesis y escribirlo como 36(-13). Saber que la notación (saber escribir paréntesis para indicar el producto, sobre todo cuando haya en los factores un número negativo) es muy importante en la matemática, y en particular en la matemática escolar, pues es el profesor el que hace caer en la cuenta de esa notación matemática y plantearse si al hacer la operación 36.-13, el error de los estudiantes puede provenir del hecho de no usar paréntesis y ver la operación como una resta y no como un producto. (144-145)

CC-En
Confirmar y reafirmar la respuesta de E9 a ese apartado del ejercicio (que les piden calcular ese determinante que es el mismo que el de partida sólo que con las filas cambiadas, entonces cambia de signo y el resultado es 13). (131-138)

Hacer referencia a un ejercicio equivalente anterior a este, para que los estudiantes ubiquen el ejercicio en la propiedad correspondiente más rápidamente. (139-141)

Hacerles notar que es importante escribir adecuadamente en matemáticas, en particular, le hace notar a E9 frente al grupo que use paréntesis, cuando indique el producto de 36 por -13 pues E9 lo había expresado como 36.-13. (144-145)

Hacerles notar/remarcar la propiedad y decirles de dónde se deduce (que se deduce de la definición de matriz inversa y de la propiedad de que el determinante de un producto es el producto de los determinantes) y que por tanto pueden usar luego. (158-163)

CPG
Acercarse al lugar de los estudiantes cuando levantan su mano porque tienen dudas. (152-153)

Evento de Término: Terminar de revisar el segundo ejercicio propuesto en el libro de texto.

Evento de Término: Terminar de revisar dos ejercicios propuestos en el libro de texto.

[7.3] Presentación de la regla de Sarrus. (164-378)

Objetivo general: Presentar la definición de la regla de Sarrus y un ejemplo.

Evento desencadenante: Iniciar la presentación de la definición de la regla de Sarrus.

[7.3.1] Presentar la definición de la regla de Sarrus. (164-236)

Objetivo particular: Presentar la definición de la regla de Sarrus.

[A, 7.3.1] Aly explica en la pizarra la regla de Sarrus.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber en qué consiste la regla de Sarrus. (176-230)

CEC
Saber que al aplicar la quinta propiedad de los determinantes (si existe un múltiplo común en toda una fila o columna, ese múltiplo puede salir del determinante y el determinante queda más simplificado, quedaría el número que se saca multiplicado por el determinante simplificado) de manera recursiva, el error de los estudiantes puede provenir de la igualdad $|\alpha A| = \alpha|A|$, es decir, de la idea matemática de

sacar una sola vez el múltiplo común del determinante y no recursivamente. En matrices, si A es una matriz cuadrada de orden 2, entonces $|\alpha A| = \alpha.\alpha|A| \neq \alpha|A|$, es decir, $|\alpha A| \neq \alpha|A|$, pues ahora depende del orden de la matriz cuadrada A, el número de veces que quede multiplicado el múltiplo común por él mismo y todo ello multiplicado por el determinante de la matriz cuadrada A. En este caso, saber que cuando se les pida calcular el determinante de un número por una matriz (eg |6A|), por cada fila sale siempre el número que este multiplicando la matriz A dentro del determinante, por ejemplo, si la matriz A tuviera 5 filas pues quedaría el 6 cinco veces fuera. (169-173)

CC-Es
Saber que los estudiantes se pueden equivocar en el signo al calcular el determinante (en ese caso, al calcular el determinante de orden 3). (182-186)

CC-En
Hacerles notar a los estudiantes que existe diferencia entre propiedad y regla. Aly acaba de estar hablando sobre las propiedades de los determinantes en varias clases anteriores y ahora les presentará la definición de la regla de Sarrus. (168) ¿O más bien para que noten que ya han terminado con las propiedades y que ahora sigue otro tema?

Comentarles la estrategia para calcular el determinante de orden 3, haciendo alusión a la definición de determinante (que se obtiene haciendo todos los productos posibles dentro de los nueve elementos de la matriz, de manera que en esos productos aparezca siempre un elemento por cada fila y por cada columna). (183-185)

Indicar con flechas los elementos que hay que ir multiplicando para explicar la regla de Sarrus. En el caso en que los elementos a multiplicar no estén en la diagonal principal o secundaria, Aly forma un triángulo en el cual cada elemento sería un vértice, primero los triángulos que se forman dentro del determinante en orientación a la diagonal principal y luego los que se forman dentro del determinante en orientación a la diagonal secundaria. Usa un esquema gráfico. (187-230)

Comentarles la comparación entre la forma de presentarlo/representarlo entre ella y el libro (que en el libro aparece un dibujo en el que se indica sólo la trayectoria que hay que seguir para hacer la multiplicación de los elementos mientras que ella usa otro esquema gráfico, el cual, en el caso en que los elementos a multiplicar no estén en la diagonal principal o secundaria, Aly forma un triángulo en el cual cada elemento sería un vértice, primero los triángulos que se forman dentro del determinante en orientación a la diagonal principal y luego los que se forman dentro del determinante en orientación a la diagonal secundaria). (187-230); (232-236)

CC
Saber que la regla de Sarrus viene en el libro de texto. (176-177)

Saber que la regla de Sarrus viene presentada en el libro de texto (un dibujo en el libro en el que se indica sólo la trayectoria que hay que seguir para hacer la multiplicación de los elementos). (232-236)

Evento de Término: Terminó de presentar la definición de la regla de Sarrus.

[7.3.2] Presentación del primer ejemplo (les propone que intenten hacer el ejercicio 1 que viene en el libro de texto) para usar la regla de Sarrus. (237-312)

Objetivo particular: Presentar el primer ejemplo (les propone que intenten hacer el ejercicio 1 que viene en el libro de texto) para usar la regla de Sarrus.

Evento desencadenante: Iniciar a hacer el primer ejemplo (les propone que intenten hacer el ejercicio 1 que viene en el libro de texto) para usar la regla de Sarrus.

[A, 7.3.2] Aly les pide hacer los dos apartados del primer ejercicio, que cada estudiante intente hacerlo, mientras Aly pasa por los lugares de los estudiantes para supervisar lo que están haciendo y les va haciendo algunos señalamientos que considere pertinentes hacerles para que los resuelvan (por ejemplo, explicarles nuevamente la estrategia individualmente). Luego E10 pasa a la pizarra a resolver el primer apartado del ejercicio1. Después E2 resuelve en la pizarra el apartado b) del ejercicio 1.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber que entre más ceros haya dentro del determinante mejor, pues los cálculos para encontrar el valor del determinante son más sencillos. (251-252); (289-290)

CC-Es
Anticipar que los estudiantes pueden ponerse a calcular el determinante sin antes echar un ojito por si se pueden usar una propiedad y terminarlo más rápido, es decir, no necesitarían hacer los cálculos, sólo justificar la propiedad que utilicen. (240-246)

CC-En
Hacerles notar que entre más ceros haya dentro del determinante mejor, pues los cálculos para encontrar el valor del determinante son más sencillos. (251-252); (289-290)

Destacar la aportación de la respuesta de E1: que al calcular el valor de ese determinante, los sumandos que van en el sentido de la diagonal secundaria (□) se anulan. (253-262)

Capacidad/habilidad para interrumpir o ignorar la respuesta de E1 (Aly prefiere que también los demás estudiantes intenten resolver el ejercicio, por ello "calla" a E1). (263-268)

Aclararle a E1 sobre la notación en el libro de texto, es decir, que en un enunciado de un problema, es lo mismo que diga "calcular el determinante" que " halle el valor del determinante". (269-270)

Atender (responder) y explicar la duda de E11. E11 pregunta: ¿cuáles son los que van con el signo negativo? (qué productos van precedidos del signo menos al aplicar la regla de Sarrus para calcular el valor del determinante de orden 3). Aly le responde a forma de explicación en la pizarra, que los que van en dirección de la diagonal secundaria (□). (271-277)

CPG
Controlar al estudiante que si hizo sus deberes, para que también trabajen los otros (Aly interrumpe e ignora la respuesta de E1, Aly prefiere que también los demás estudiantes intenten resolver el ejercicio, por ello "calla" a E1. (263-268)

Una forma de acercarse a los estudiantes para ver si tienen alguna duda y luego explicársela: Aly primero pregunta a E7 si ha entendido lo que debe hacer para resolver el problema, al ver que E7 no le responde y observar a Aly, como esperando que le explique lo que debe hacer, Aly empieza a explicarle lo que hay que hacer, luego le pregunta si ahora si ya sabe lo que hay que hacer para continuar resolviendo el problema, E7 contesta que sí. (278-284)

Una forma de decirles que si no entienden algo pues le pregunten (Aly dice: bueno si alguien no se entera de algo que me llame). (300)

Una forma de acercarse a revisar lo que han hecho los estudiantes y cómo lo han hecho, preguntándoles qué resultados han obtenido ellos, después de que E10 ha calculado el determinante en la pizarra. (304-312)

Una forma de acercarse a los estudiantes para saber si tienen dudas, preguntándoles a algunos estudiantes: ¿tú cómo vas? (309-310)

Evento de Término: Aly terminó de presentar el apartado b) del ejercicio uno.

[7.3.3] Presentación del segundo ejemplo, del cual sacarán otra propiedad general de los determinantes. (313-378)

Objetivo particular: Presentar el segundo ejemplo, del cual obtendrán una propiedad general de los determinantes.

Evento desencadenante: Iniciar a hacer el segundo ejemplo, para usar la regla de Sarrus y de ahí obtener una nueva propiedad general de los determinantes.

[A, 7.3.3] Aly comienza a explicar en la pizarra el apartado b) del ejercicio 2 para hacer notar que ahí está implícita una nueva propiedad de los determinantes (luego de esa, deduce otra).

Conocimientos en acción:

CCC
Saber la propiedad de que el determinante de una matriz triangular superior es igual al producto de los tres elementos de la diagonal principal. (317-323)

Saber que la propiedad se cumple porque el desarrollo de Sarrus siempre es el mismo y entonces eso siempre va a pasar para determinantes de matrices de orden 3 (que el determinante de una matriz triangular superior es igual al producto de los tres elementos de la diagonal principal). (337-350)

Saber que el valor del determinante de una matriz con ceros debajo de la diagonal secundaria, da como resultado: menos el producto de la diagonal secundaria. Esto como deducción de una anterior (que el determinante de una matriz triangular superior es igual al producto de los tres elementos de la diagonal principal). (351-366)

CC-Es
Prever que los estudiantes se pueden equivocar al aplicar la propiedad: El valor del determinante de una matriz con ceros debajo de la diagonal secundaria, da como resultado menos el producto de la diagonal secundaria), es decir, prever que los estudiantes apliquen esta propiedad incorrectamente, en particular, prever que los estudiantes pueden olvidarse del signo menos al hacer ese cálculo. (363-366)

Prever que al haber dicho “negativo” [cuando ella dijo que el resultado del valor del determinante era negativo (en el valor del determinante de una matriz con ceros debajo de la diagonal secundaria, da como resultado: el producto de la diagonal secundaria negativo)], los estudiantes se pueden quedar con la imagen incorrecta de que siempre va a quedar en el resultado un número negativo, pero eso no necesariamente tiene porque serlo pues puede quedar como resultado un número positivo, lo único que pasa es que en el resultado de este determinante le antecede un menos al producto de los elementos de la diagonal secundaria. (374-378)

CC-En
Desarrollar cada uno de los productos al calcular el determinante de una matriz triangular superior, para hacerles ver que de todos los productos, sólo queda el producto de los elementos de la diagonal principal. En este caso ayudó la pregunta de E6 para que Aly desarrollara el procedimiento completo para calcular el determinante de orden 3 aplicando Sarrus. (328-336)

Aprovechar el ejemplo para generalizarlo en una propiedad (que el determinante de una matriz triangular superior es igual al producto de los tres elementos de la diagonal principal). (337-350)

Representar la generalización de la propiedad usando un esquema geométrico. Aly escribe un determinante y dentro de él dibuja un triángulo de la diagonal principal hacia arriba y debajo del triángulo escribe un cero grande. (337-350)

Recapitular las propiedades obtenidas a raíz del ejercicio. Remarcarles nuevamente las dos propiedades (1. Que el determinante de una matriz triangular superior es igual al producto de los tres elementos de la diagonal principal. 2. Que el valor del determinante de una matriz con ceros debajo de la diagonal secundaria, da como resultado: menos el producto de la diagonal secundaria) deducidas del apartado b) del ejercicio dos. (367-373)

Aclararles que cuando ella dijo que el resultado del valor del determinante era negativo (en el valor del determinante de una matriz con ceros debajo de la diagonal secundaria, da como resultado: el producto de la diagonal secundaria negativo), negativo quiere decir que cambia de signo. (374-378)

Evento de Término: Aly terminó de presentar el apartado b) del ejercicio dos.

[7.4] Presentarles una nueva propiedad: generalizando una de un determinante de orden dos para determinantes de orden tres, de la proporcionalidad a la combinación lineal. (383-433)

Objetivo general: Presentar una nueva propiedad: generalizando una de un determinante de orden dos para determinantes de orden tres, de la proporcionalidad a la combinación lineal.

Evento desencadenante: Iniciar la presentación de una nueva propiedad (generalizar una propiedad de orden dos –proporcionalidad- a una de orden tres –combinación lineal).

[A, 7.4] Aly explica en la pizarra la generalización de una propiedad de determinantes de orden dos para determinantes de orden tres (de proporcionalidad a combinación lineal).

Conocimientos en acción:

CCC
Saber que se puede generalizar una propiedad de los determinantes de orden dos para determinantes de orden tres (de proporcional a combinación lineal) y generalizar esa propiedad. (383-398)

Saber por qué da cero esa nueva propiedad para determinantes de orden tres o generalización de su equivalente en determinantes de orden dos. Saber que en la nueva propiedad de los determinantes de orden tres (si en un determinante existe una combinación lineal entre las filas entonces el determinante vale cero), el determinante vale cero porque al haber una combinación lineal entre las filas, pueden separar ese determinante como suma de dos determinantes y ver que en cada determinante sumando existe una fila que es proporcional a otra y entonces cada uno de los sumandos es cero. (402-416)

CEC
Saber que en un determinante de orden dos se puede hablar de proporcionalidad entre filas pero eso, en un determinante de orden tres se traduce en hablar de combinación lineal, es el profesor a diferencia de otros profesionales, el que cae y hace caer en la cuenta de que en el determinante de orden tres al haber tres filas, una se puede escribir como combinación lineal de las otras (cuando ese sea el caso) a diferencia de un determinante de orden dos que sólo tiene dos filas. (417-420)

CC-En
Aprovechar la propiedad de los determinantes de separar en suma de determinantes, para justificarles porque da cero la propiedad que generalizó (de proporcionalidad a combinación lineal. (402-416)

Explicarles porque antes, en un determinante de orden dos no se podía hablar de combinación lineal sino de proporcionalidad, pues al hablar de combinación lineal con dos filas, no tenía sentido porque sólo tenían dos filas, entonces sólo se podría hablar de proporcionalidad, no de combinación lineal. (417-423)

CC
Comentarles que esta nueva propiedad (de proporcionalidad a combinación lineal) viene en el su libro te texto como propiedad 9. (424-425)

Evento de Término: Aly terminó de presentarles esa propiedad de los determinantes (de la proporcionalidad a la combinación lineal, generalización de la propiedad para determinantes de orden dos a una de determinantes de orden tres).

[7.5] Presentación de un ejemplo con cuatro apartados para usar las propiedades de los determinantes de orden tres. (433-464)

Objetivo general: Presentar un ejemplo (que consiste de cuatro apartados) para usar las propiedades de los determinantes de orden tres.

Evento desencadenante: Iniciar a hacer el ejemplo para usar las propiedades de los determinantes de orden tres.

[A, 7.5] Aly explica en la pizarra la respuesta a lo que piden en los distintos apartados del ejemplo.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber por qué el $|A|=0$ en el apartado a), es decir, saber que es debido a que $F_2=0$ (en toda la fila dos los elementos son cero). (440-444)

Saber por qué el $|A|=0$ en el apartado b), es decir, saber que es debido a que $F_3=-2F_1$. (445-448)

Saber por qué el $|A|=0$ en el apartado c), es decir, saber que es debido a que $F_3=10F_2+F_1$. (451-455)

Saber que el $|A|=0$ en el apartado d), porque $F_1=10F_2+F_3$. (456-462)

CEC
Saber que al escribir matemáticamente, el error de los estudiantes puede provenir de que no saben escribir correctamente lo que están pensando, es decir, saber que además de saber pensar matemáticamente hay que saber escribir matemáticamente, en este caso, escribir la justificación de por qué un determinante vale cero. (449-450)

CC-Es
Prever que si les dice de que trata el ejemplo en lenguaje más común, los estudiantes entenderán “mejor” lo que deben hacer en el ejemplo. (436-439)

CC-En
“Traducirles” lo que “piden” hacer en el ejemplo: *justificar sin desarrollar, porque esos determinantes den cero, es decir, saber las propiedades para justificarlo*. (436-439)

Saber qué dejarles de deberes. (463-464)

Evento de Término: Aly terminó de hacer los cuatro apartados del ejemplo y se terminó la clase.

Análisis de la clase 8 de Aly

[8.1] Revisión de ejercicios en clase donde se apliquen las propiedades de los determinantes. (1-257)

Objetivo general: Revisar ejercicios en clase donde se apliquen las propiedades de los determinantes.

Evento desencadenante: Iniciar a revisar las respuestas a los tres apartados del primer ejercicio que les había dejado de deberes.

[8.1.1] Revisión del primer ejercicio en el que se aplican propiedades de los determinantes. (1-152)

Objetivo particular: Revisar el primer ejercicio en el que se aplican propiedades de los determinantes.

[A, 8.1.1]. Aly pregunta a los estudiantes si hicieron la tarea, un estudiante dice que no sabe cómo hacerlo y entonces Aly decide hacer el ejercicio en la clase (los tres apartados del ejercicio).

Conocimientos en acción:

CCC

Saber aplicar la propiedad de los determinantes en la que si un número está multiplicando a todos los elementos en una fila entonces se puede sacar ese número del determinante, es decir, $\begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$. En el primer apartado (14-18) y en el segundo apartado (27-30); (56-75)

Saber que una igualdad puede leerse en un sentido o en otro. En este caso, en una propiedad de los determinantes, saber que si en general se tiene $\begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$ se puede decir que $\begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$ o bien que $a\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$. (38-46)

Aplicar el otro sentido de la igualdad, es decir, $a\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$ para terminar el ejercicio. (47-55)

Saber la propiedad de los determinantes $\begin{vmatrix} a+b & e \\ c+d & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & e \\ d & f \end{vmatrix}$. (84-100)

Saber aplicar la propiedad $\begin{vmatrix} a+b & e \\ c+d & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & e \\ d & f \end{vmatrix}$ para dar respuesta al tercer apartado del ejercicio. (101-145)

Saber la propiedad de que si en un determinante una fila es proporcional a otra, entonces el determinante vale cero. (125-127)

Saber que si en un determinante existen dos filas idénticas entonces el determinante vale cero. (142)

CEC

Saber que la igualdad $\begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$ también puede verse como $a\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$, es decir, que por la propiedad simétrica: Si a=b entonces b=a. Para otros profesionales $\begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$ puede ser simplemente una propiedad para aplicar, pero es el profesor el que hace caer en la cuenta de que hay dos formas de ver la igualdad de esos determinantes, ya sea de derecha a izquierda o viceversa, es decir, hacerles notar y reforzar que es lo mismo $\begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$ que $a\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$. (32-37); (42-46)

Saber que al aplicar la propiedad $\begin{vmatrix} a+b & e \\ c+d & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & e \\ d & f \end{vmatrix}$ (que se cumple también para filas) cuando en dos filas tienen sumandos, el error de los estudiantes puede provenir de usar la propiedad dos veces al mismo tiempo, en lugar de usar la propiedad primero en una fila y luego en otra, porque la primera vez deben dejar una fila quieta. Saber que no existe propiedad que les diga exactamente que "no deben usar dos veces al mismo tiempo la propiedad", pero es el profesor el que tiene conocimiento de que ese es un error en los estudiantes, es decir, no es asunto propiamente de la matemática en sí, pero sí de la matemática que ocupa el profesor para la enseñanza. En este caso, hay que calcular $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$ sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

Aly (111-116):

Entonces hay que "descomponer" una fila y luego otra, así tenemos que

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x & 2y & 2z \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$$

pero $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x & 2y & 2z \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \ pues\, F_2 = 2F_1$

Entonces $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ ("descomponiendo" la tercera fila)

pero $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \, pues\, F_1 = F_3$ y en el ejercicio dan el dato de que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Entonces $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = 1$

CC-Es

Prever que en el segundo apartado del ejercicio hay un 3/5 que puede despistar a los estudiantes para usar una propiedad de los determinantes, el determinante completo que tienen es (24-31):

$$5\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Prever que los estudiantes pueden ver la igualdad de una propiedad en un sólo sentido, es decir, ver que

$\begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$ pero no ver que $a\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$. (32-37)

Prever que los estudiantes se pueden confundir y creer que en los determinantes hay que multiplicar el 5 por cada elemento del determinante, en la expresión $5\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, pues eso es lo que se hace en el producto de un escalar por una matriz (tema que tienen "fresco" porque lo vieron últimamente). Pero en este caso, ese 5 que está fuera del determinante puede entrar en el determinante pero multiplicando a UNA fila o a UNA columna. (32-37)

Prever una dificultad de los estudiantes, en este caso, sobre cómo extraer 1/5 de la segunda fila, es decir, de 1, 0, 3/5. (67-73)

Prever que los estudiantes pudieran equivocarse si aplican la propiedad dos veces al mismo tiempo, porque en ese determinante aparecen dos filas en las que hay suma en los elementos, no se puede aplicar la propiedad dos veces al mismo tiempo porque la primera vez debe dejar una fila quieta, es decir, deben usar la propiedad primero en una fila y luego en otra. (93-116)

CC-En
Hacer peguntas para ir orientando la respuesta al apartado a) del ejercicio (eg Aly: *Este es muy fácil ¿no?, ¿qué hay que hacer ahí?*). (12-18)

Explicar por qué el resultado del primer apartado es 3, Aly utiliza el dato que le dan en el ejercicio y aplica la propiedad de los determinantes en la que si un número está multiplicando a todos los elementos en una fila entonces se puede sacar ese número del determinante, es decir, $\begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$. (14-18)

Decidir explicar en la pizarra el segundo apartado del ejercicio a pesar de que E1 ha dicho el resultado correctamente, debido a que considera que es un caso especial en el que se usa una sola propiedad dos veces y al final el resultado del determinante no varía respecto al determinante que se tenía como dato en el ejercicio. (20-79)

Hacer la comparación entre dos formas de hacer un ejercicio a raíz de que E2 ha dicho otra forma de hacer ese apartado (sacar primero 1/5 como factor común, luego sacar 5 como factor común y queda 1, de multiplicar 1/5 por 5) pero usando la misma propiedad. (56-64)

Decidir explicar a los estudiantes la otra forma de hacer el segundo apartado propuesto por E2 (E2: *sacar el 5 y luego de la segunda fila sacar factor común 1/5 extraerlo fuera del determinante y queda 1, por el 1 que vale el determinante pues es 1*). (64-66)

A forma de cierre de ese apartado, remarcarles en resumen las dos formas de resolver ese apartado del ejercicio (Aly: *...se puede extraer dos veces, de dos filas un numerito o extraer el 5 y volver a ponerlo dentro del determinante, vale*). (78-79)

Remarcarles, antes de empezar a hacer el tercer apartado del ejercicio, Aly quiere recordarles la propiedad que se usará en este apartado, es decir, la propiedad $\begin{vmatrix} a+b & e \\ c+d & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & e \\ d & f \end{vmatrix}$. (84-92)

Hacer el mismo ejercicio (el mismo apartado de un ejercicio) de dos formas, primero ella propone una forma de hacerlo, luego E2 propone otra forma y Aly decide explicar esa otra forma de hacerlo en la pizarra para que los demás estudiantes vean esa otra forma de hacerlo y que de cualquier manera el resultado es el mismo. (24-77)

Remarcarles nuevamente lo que no pueden hacer (descomponer al mismo tiempo la segunda y tercera fila en la que aparecen los sumandos) y darles la estrategia para resolverlo (descomponer primero una y luego otra). (103-105)

Usar un esquema gráfico para que se fijen (para visualizar) cuál es la fila a la que van a aplicar la propiedad y por tanto las otras dos filas quedan "quietas" (Aly encierra en un círculo la segunda fila). (107)

Explicarles que 2y es 2y+0 para que lo visualicen más fácilmente los estudiantes cuando apliquen la propiedad. (209)

Evento de Término: Aly terminó de hacer los tres apartados del primer ejercicio.

[8.1.2] Presentación de ejercicios con determinantes de orden mayor que 3 para que utilicen las propiedades de los determinantes. (152-257)

Objetivo particular: Presentar ejercicios con determinantes de orden mayor que 3 para que utilicen las propiedades de los determinantes.

Evento desencadenante: Empezar a presentar otro ejercicio para calcular determinantes de orden mayor que 3, usando las propiedades de los determinantes.

[A, 8.1.2]. Aly explica en la pizarra la solución a cada uno de los 5 apartados del ejercicio.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber que si en un determinante dos filas son iguales entonces el determinante vale cero. (185-189)

Saber que si en un determinante existe una fila o columna en la que todos sus elementos son cero, entonces el determinante vale cero. (194-200)

Saber que si en un determinante una fila o columna es combinación lineal de otra, entonces el determinante vale cero. (213-217); (250-252)

Saber que todas las propiedades que han visto para determinantes de orden 2 y 3, también se pueden aplicar en general a cualquier determinante, es decir, de cualquier orden. (218-220)

Saber que las propiedades de los determinantes son importantes sobre todo para calcular determinantes de orden mayor a tres. (234-236)

CC-En
Comentarles la estrategia para calcular esos determinantes de orden mayor que 3 (Aly: *hay que buscar ahí entre las filas y las columnas alguna relación, alguna proporcionalidad, combinación lineal, algo*). (181-182)

Remarcarles nuevamente que las propiedades son válidas para cualquier determinante (se refiere a cualquier orden del determinante). (190-191)

Repetir lo que ha dicho E1 (E1: *La última columna eh* - E1 contesta nervioso- *es la primera multiplicada por 1000 más la segunda por 100 y la tercera por 10*) y refinarlo con el concepto de combinación lineal y con eso justifica por qué el determinante vale cero. (207-217)

Remarcarles nuevamente la validez de los determinantes para distinto orden y les aclara que al decir cualquier determinante, se refiere a cualquier orden del determinante. (218-220)

Aprovechar la respuesta de E12 (E12: *La última columna es combinación lineal de la segunda*), corregirla y la utiliza para explicar e ir corroborando que la cuarta columna es nueve veces la segunda columna, es decir, la cuarta columna es proporcional a la segunda. (224-231)

Remarcarles el hecho de que "sin tener que hacer cuentas", al usar la propiedad de los determinantes el determinante vale cero. (232-233); (241-243)

Hacerles notar la importancia de las propiedades de los determinantes, sobre todo en determinantes muy grandes. (234-236)

Interpretar la respuesta de E12 (E12: *Que la 3 es 100 veces la 4 más 10 veces la 1 más la 2*) y completarla, para justificar que el determinante vale cero porque la tercera fila es 100 veces la cuarta fila más diez veces la primera fila más la segunda fila. (248-252)

CPG
Control de la indisciplina. Aly: *E3 por qué no atiendes hoy mejor, y copias en casa, porque aquí si vienen a copiar es perder tiempo*. (192-193)

Evento de Término: Aly terminó de hacer los cinco apartados de este ejercicio.

[8.2] Presentación de cómo resolver (calcular) determinantes de orden mayor a tres (que no se resuelven con las propiedades). (258-571)

Objetivo general: Presentarles cómo resolver (calcular) determinantes de orden mayor a tres (que no se resuelven con las propiedades).

Evento desencadenante: Iniciar la presentación de lo qué es un menor.

[8.2.1] Presentarles el concepto de menor, menor complementario y adjunto de un elemento. (261-454)

Objetivo particular: Presentar el concepto de menor, menor complementario y adjunto de un elemento.

[A, 8.2.1]. Aly explica a través de un ejemplo en la pizarra lo que es un menor, menor complementario y adjunto de un elemento, luego explica otro ejemplo donde se aplican esos conceptos.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber lo que es un menor (Aly: S*e llama menor al valor del determinante de cualquier submatriz que se forma por el cruce de algunas columnas con alguna fila*). (281-283); (306-308); (309-312)

Saber la notación de un menor (en este caso, saber que se escriben como determinantes y no como matrices). (302-305)

Saber cómo encontrar el menor complementario de un elemento. (328-361)

Saber la definición de adjunto de un elemento de una matriz cuadrada. (364-373)

Saber generalizar todos los menores que pudieran salir de orden 2 (Aly: *Cualquier submatriz de orden 2x2, su determinante eso sería un menor*). (407)

Saber calcular el menor complementario de un elemento (incluye saber aplicar la regla de Sarrus para calcular un determinante de orden 3). (408-426)

Saber calcular el adjunto de un elemento. (439-447)

Saber la utilidad de encontrar el adjunto de un elemento (Aly: *Nos sirve para desarrollar determinantes mayores que no sean de orden 3, que sean de orden 4, de orden 5*). (452-454)

CC-Es
Prever que los estudiantes pueden confundir el menor complementario con el adjunto del menor complementario, es decir, prever confusión con dos cosas distintas que acaban de definir. (374-375)

CC-En
Para definir un menor, da ejemplos de submatrices que formarían el menor y finalmente define el menor como el valor del determinante de una submatriz. (263-308)

Primero da un ejemplo de un menor de orden 2, luego define un poco las características de la submatriz que forma el menor y después vuelve a hacerles notar el ejemplo del menor que acaban de hacer. (263-287)

Hacerles notar cómo obtener un menor de orden 4 (Aly: *Sería toda la matriz completa de 4 filas y 4 columnas*). (292-293)

Darles un ejemplo de un menor de orden 3. (294-299) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 7 & 1 & 10 \end{vmatrix}$

Remarcarles la esencia de los menores de orden 2 y de orden 3 (Aly: *Entonces tenemos los menores que son los de orden 2 y los de orden 3, cruzando filas y columnas, las que me digan o las que necesite, vale*). (300-301)

Cerrar los ejemplos anteriores haciéndoles ver que todo lo que han visto es para llegar a la definición de menor. (306-308)

"Traducir" la definición formal que viene en el libro de texto, combinar tanto lenguaje formal con lenguaje común. (309-312)

Remarcar lo que indica el primer y segundo subíndice (cosa que acababan de ver hace algunos días en matrices), (Aly: *el primer subíndice indica la fila y el segundo la columna*). (322-324)

Definir el menor complementario auxiliándose de un ejemplo y luego ya lo denota en general por α_{ij}. (327-342)

Remarcarles nuevamente cómo encontrar el menor complementario de un elemento (Aly: *Entonces para encontrar el menor complementario de un elemento, suprimo la fila y la columna donde está el elemento y el determinante de lo que queda es el menor complementario de ese elemento, vale*). (343-345)

Hacerles preguntas como: *¿dónde se encuentra ese elemento?, ¿cuál sería el menor complementario ahí con esa matriz del elemento a sub dos dos, es decir, cuál sería alfa dos dos?* para calcular otro menor complementario y ver si le van entendiendo los estudiantes. El estudiante E2 contesta y ella va remarcando (repitiendo) la respuesta del estudiante y finalmente les remarca nuevamente a todos, cómo han encontrado el menor complementario del elemento a_{22} (de la matriz genérica de orden 3x3). (347-361)

Hacerles notar que el adjunto por la forma en que está definido (en particular: $(-1)^{i+j}$), algunas veces queda positivo y otras negativo. (376-381)

Comentarles la aplicación que tienen los adjuntos de los menores complementarios, es decir, decirles para qué les va a servir (Aly: *...esto la aplicación que tiene es para desarrollar determinantes mayores eh, determinantes de orden superior*). (382-384)

Traducir", en concreto, lo que piden encontrar en el primer, segundo y tercer apartado del ejemplo (Aly: *Un menor de orden dos de la matriz, luego el menor complementario y luego el adjunto*). (396-397)

Aclararles este dato (el determinante de la submatriz) que le había faltado decir y que es parte de lo que forma un menor. (403-405)

Hacerles preguntas para que la vayan siguiendo pero luego ella misma se contesta, eg Aly: *Bueno, ¿qué tengo que hacer entonces para ver cuál es el menor complementario de ese elemento? Pues suprimimos por ende esa columna y esa fila*. (415-417)

Explicar cómo calculó el determinante de orden 3 con la regla de Sarrus y que se obtiene 198, que es el valor del menor complementario α_{32}. Aly repasa nuevamente cómo calcular el determinante de orden 3 por Sarrus (tema visto hace algunos días). (427-438)

Hacer una pregunta para que los estudiantes noten la diferencia entre menor complementario y su adjunto (Aly: *¿qué es lo que hay de diferencia entre el menor complementario y el adjunto? El signo*). (440-442)

Saber qué dejarles de deberes (que hagan un ejercicio que viene en el libro, parecido al ejemplo que han hecho) una vez que ha terminado de presentarles un primer ejemplo. (450-451)

Decirles para qué sirve lo que han hecho en el ejemplo y por tanto, en general, lo que han visto hasta llegar al adjunto, es decir: menor, menor complementario y adjunto. Comentarles la utilidad de esos tres conceptos: *para desarrollar determinantes mayores que no sean de orden 3, que sean de orden 4, de orden 5*. (452-454)

CPG
Preguntarles para saber si van entendiendo (Aly: *Otro menor de esta matriz, ¿quién me lo dice? Un menor de orden 3 ¿cómo podríamos hacer o encontrar un menor de orden 3 de ahí?*). (288-291)

Una forma de preguntarles si entienden lo que se ha hecho (Aly: *Se entiende ¿no?).* (449)

Evento de Término: Aly terminó de hacer ejemplos sobre calcular el adjunto de un elemento de una matriz.

[8.2.2] Presentarles una nueva propiedad, es decir, una forma de calcular determinantes de orden mayor o igual a tres. (457-571)

Objetivo particular: Presentar una nueva propiedad, es decir, una forma de calcular determinantes de orden mayor o igual a tres.

Evento desencadenante: Iniciar a presentarles cómo calcula determinantes de orden mayor o igual a tres.

[A, 8.2.2]. Aly explica en la pizarra una forma de calcular determinantes de orden mayor o igual a tres (mediante adjuntos) y la mayor parte de la demostración (no terminó la demostración porque se terminó la clase, le faltó alrededor de una tercera parte o poco menos).

Conocimientos en acción:

CCC
Saber calcular un determinante de orden tres mediante adjuntos eligiendo la primera fila. (475-480)

Saber cómo se escribiría la solución al calcular un determinante mediante adjuntos. (483-486)

Saber indicar los adjuntos por línea para calcular el determinante de una matriz genérica de orden tres. (526-562)

CC-En
Comentarles que esta propiedad (para calcular determinantes mediante adjuntos) que van a ver, se puede aplicar para calcular determinantes de orden tres o más y que ella escribirá la propiedad para el caso de una matriz cuadrada de orden tres. (466-469)

Comentarles en lenguaje más familiar cómo calcular el determinante de una matriz de orden mayor o igual a tres (Aly: *Bueno pues el valor del determinante es ir multiplicando los elementos de una fila o columna por sus correspondientes adjuntos*). (473-474)

Aclararles que también pueden calcular el determinante mediante adjuntos eligiendo otra fila. (481-482)

Darles y explicarles otra forma de escribir (representar) cómo calcular un determinante mediante adjuntos. Aly lo escribe de forma compacta $\left|A\right| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ con *i* fijo. (491-510)

Comentar la estrategia de la demostración (Aly: *Si en esto* –Aly señala los adjuntos que había escrito para calcular el determinante de A con la primera fila- *nos ponemos a escribir quién es el adjunto A_{11}, A_{12}, A_{13} van a ver que lo que nos va a quedar es el desarrollo por la regla de Sarrus*). (516-523)

Comentarles su estrategia para escribir los resultados (Aly: *...primero voy a ir haciendo cada uno de los adjuntos y luego ya los anotamos todos juntos, nos va a salir una fórmula muy grande*). (535-536)

Comentarles lo que falta por hacer para ver si alguien se atreve a terminarlo en casa y sino ella lo terminará la siguiente clase (ya se terminó la clase y no alcanzó a terminar de hacer la demostración). (563-569)

Saber qué dejarles deberes. Aly los invita a que terminen lo que faltó por hacer en la demostración (sustituir en la expresión que ya tienen escrita, los adjuntos que acaban de obtener y ver si al hacer el desarrollo obtienen los mismos términos que con la regla de Sarrus, para calcular un determinante genérico de orden tres). (570-571)

CC
Saber que ese contenido viene en el libro de texto. (514-515)

Evento de Término: Se terminó la clase. Aly no terminó de hacer la demostración y les indica lo que faltó (aproximadamente una tercera parte o un poco menos) por si algún estudiante se atreve a terminarlo.

Análisis de la clase 11 de Aly

[11.1] Presentación ejercicios para aplicar el teorema de Rouché-Frobenius. (1-207)-{186-187}

Objetivo general: Presentar ejercicios para aplicar el teorema de Rouché-Frobenius.

Evento desencadenante: Inicia la revisión del ejercicio 1 (con 3 apartados) que Aly dejó de deberes la clase anterior.

[A, 11.1] Aly explica en la pizarra la solución de cada uno de los 3 apartados del ejercicio.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber estudiar el rango de una matriz:
Estudiar el rango de la matriz de coeficientes, es decir, en el apartado a) saber si existe o no rango 1, rango 2 ó rango 3. (26-31). *Idem* en el apartado b) del ejercicio (84-88). *Idem* en el apartado c). (116-158)
Estudiar el rango de la matriz ampliada:
En el apartado a), aprovechar que ya se sabe que mínimo existe rango 2 (porque la matriz de coeficientes tiene rango 2) y para ver si la matriz ampliada tiene rango 3 basta con calcular el determinante de ésta. (32-36) Saber que el rango de la ampliada es 2 porque el determinante de la ampliada es 0, entonces el máximo menor encontrado

fue de orden 2. (51-54)
En el apartado b), saber que el rango de la ampliada es 3 porque el máximo menor encontrado es de orden 3. (89-105)
En el apartado c), saber que el rango de la ampliada es 3 porque el máximo menor encontrado es de orden 3. (159-177)

Saber que la última columna es combinación lineal de las anteriores (C_3=C_1-C_2). (41-45)

Saber el teorema de Rouché-Frobenius (que si el rango máximo encontrado coincide con el número de incógnitas entonces el sistema es compatible determinado). (55-64)

Saber que de la escritura de la matriz ampliada pueden ir analizando el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada (para no escribir primero la matriz de coeficientes y luego la ampliada, es decir, para escribir sólo la ampliada y de ahí analizar el rango de ambas). (77-83)

Saber la regla de Sarrus para calcular un determinante de 3x3. (95-99); (171-175)

Saber el Teorema de Rouché-Frobenius. (99-107); (178-179)

Saber que no se puede escribir el determinante de una matriz que no sea cuadrada. (121-128)

Saber que en el sistema de 3x4 al ampliar la matriz de coeficientes con la cuarta columna, el determinante del menor de orden 3 vale cero, porque existe una combinación lineal en las columnas (C_3=C_1-C_2). (147-153)

CC-Es
Prever que los estudiantes pueden ponerse a hacer cálculos sin antes fijarse si pueden usar una propiedad, es decir, sin ver si existe alguna relación entre las filas o las columnas para ver si se puede aplicar una propiedad de los determinantes y no hacer todo el cálculo. En el apartado a) (38-40); en el apartado b) (91-92); en el apartado c) (133-134); (168-169)

Prever que los estudiantes se pueden quedar con una imagen inadecuada del contenido y por ello luego siente la necesidad de hacer una aclaración o comentario, es decir, prever que los estudiantes no tomen en cuenta que la matriz debe ser cuadrada para calcular su determinante, pues el determinante de una matriz que no sea cuadrada no está definido). (121-128)

CC-En
Transferir y orientar la respuesta del estudiante (E5) a una convención matemática del contenido, es decir, E5 dice el orden de la matriz de coeficientes pero primero dice las columnas y luego las filas (2x3), entonces Aly acomoda la respuesta y remarca que el orden es de 3x2. (10-16)

Transferir y orientar la respuesta del estudiante para conducir dicha respuesta a lo que el profesor explicará posteriormente. (10-17)

Comentarles la estrategia de "solución" del ejercicio (tienen la matriz de coeficientes y la matriz ampliada, lo que tienen que hacer únicamente es estudiar el rango de ellas y ver si los rangos de ellas coinciden porque entonces el sistema es compatible). (22-25)

Recomendarles a los estudiantes que observen primero el problema, que se detengan un momentito antes de hacer nada y vean si existe alguna relación entre las filas o las columnas para ver si se puede aplicar una propiedad de los determinantes y no hacer todo el cálculo, pues de existir una combinación lineal entre filas o columnas el determinante vale 0. (38-40)

Anunciarles que verán un poquito más sobre eso (saber resolver el sistema) más adelante cuando vean la regla de Cramer (en ese apartado del ejercicio sólo piden decir de qué tipo es el sistema de acuerdo al Teorema de Rouché-Frobenius). (65-68)

Enseñando a hacer (escribir menos). Comentarles que pueden escribir la matriz ampliada directamente (incluyendo la matriz de coeficientes) y de ahí ir analizando el rango de ambas, de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada. (77-83)

Hacerles hincapié en que no importa tanto el valor exacto del determinante sino el hecho de que de cero o distinto de cero. (99-101); (175-176); (185)

Cerrar el ejercicio de los tres apartados (a), b) y c)) remarcándoles la utilidad del Teorema de Rouché-Frobenius. (180-181)

CPG
Incitarlos a que hagan los deberes y así no tengan tanto problema cuando hagan el examen. (72-73)

Evento de Término: Aly terminó de explicar "la solución" al ejercicio 1 (los 3 apartados).

[11.2.] Presentación de la regla de Cramer, demostración de la regla para un sistema genérico de 4x4 y un ejemplo para aplicar dicha regla. (186-187); (208-554)

Objetivo general: Presentar la regla de Cramer, demostrarla para un sistema genérico de 4x4 y un ejemplo para aplicar dicha regla.

Evento desencadenante: Empezar a presentar la definición genérica de la regla de Cramer.

[11.2.1] Presentación de la regla de Cramer. (186-187); (208-295)

Objetivo particular: Presentar la definición de la regla de Cramer.

[A, 11.2.1] Aly explica en la pizarra la definición de la regla de Cramer.

Conocimientos en acción:

CCC

Saber el Teorema de Rouché-Frobenius. (188-207)

Saber la relación entre un sistema de Cramer y los rangos (considerando que un sistema será de Cramer cuando el número de ecuaciones sea igual al número de incógnitas y además eso sea igual al rango de la matriz de coeficientes e igual al rango de la matriz ampliada, es decir, todos coinciden). (214-220)

Saber la definición de la regla de Cramer para un sistema genérico de 4x4. (237-295)

Saber escribir el sistema de 4x4 de forma genérica. (238-249)

Saber cómo calcular x según la regla de Cramer ($x=|A_x|/|A|$). (258-260)

Saber cómo se calcula el $|A_x|$. (263-275)

Saber cómo calcular y según la regla de Cramer ($y=|A_y|/|A|$). (278-288)

Saber cómo calcular z según la regla de Cramer ($z=|A_z|/|A|$). (289-291)

Saber cómo calcular t según la regla de Cramer ($t=|A_t|/|A|$). (293)

CC-Es
Prever que los estudiantes entenderán "mejor" la definición de un sistema de Cramer si se las dice en lenguaje más familiar a los estudiantes. (221-223)

CC-En
Comentar a los estudiantes que la regla de Cramer es el método más práctico y más eficaz para resolver un sistema. (209-210)

Aclararles "traducir" lo que dice la definición de un sistema de Cramer a lenguaje más familiar a los estudiantes. (221-223)

Aclararles porque el sistema de la definición de la regla de Cramer se trata de un sistema compatible determinado. (224-231)

Ignorar la respuesta de E8 que es incorrecta y que no aporta nada a la explicación que Aly está dando. (282-283)

CC
Saber los contenidos que vienen en el libro de texto. Saber que la regla de Cramer viene en el libro de texto, en la página 102. (214-220)

Evento de Término: Aly terminó de presentar la definición de la regla de Cramer.

[11.2.2.] Presentación de la demostración de la regla de Cramer. (296-464)

Objetivo particular: Presentar la demostración de la regla de Cramer para que los estudiantes se acostumbren a ver y estudiar demostraciones.

Evento desencadenante: Iniciar la demostración de la regla de Cramer para un sistema de 4x4.

[A, 11.2.2] Aly explica en la pizarra la demostración de la regla de Cramer, ella hace mayor énfasis en la explicación del $|A_x|$, lo desarrolla paso a paso hasta obtener $x=|A_x|/|A|$, pero para obtener $y=|A_y|/|A|$ y $z=|A_z|/|A|$ sólo explica la idea para hacerlo pues es similar a la estrategia utilizada para obtener $x=|A_x|/|A|$.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber hacer la demostración de la regla de Cramer para un sistema de 4x4. (299-460)
Saber la propiedad de los determinantes de que si todos los elementos de una fila o columna están

formados por dos sumandos, dicho determinante se descompone en la suma de dos determinantes. (372-416)

Saber la propiedad de los determinantes de que el $|A|=0$ si una fila o columna es proporcional a otra. (405-416)

Saber la propiedad de los determinantes de que si se multiplica un determinante por un número real, queda multiplicado por dicho número cualquier fila o columna, pero sólo una. (420-428)

Saber la estrategia para encontrar $y=|A_y|/|A|$ partiendo del $|A_y|$. (448-458)

CC-Es
Prever que los estudiantes no ven fácilmente el otro sentido de la igualdad (←, en este caso particular, en la expresión $a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}t=C_1$, no ven que esa expresión también se puede ver como $C1=a11x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}t$). (333-337)

Prever que puede ser más complicado o producir confusión a los estudiantes trabajar con x_1, x_2, x_3, x_4, por eso al hacer la demostración de la regla de Cramer para un sistema de 4x4 usa la notación x, y, z, t en lugar de x_1, x_2, x_3, x_4. (339-340)

CC-En
Hacerles notar parte de la estrategia para la demostración de la regla de Cramer. Remarcarles que en el primer elemento de la primera columna sólo han escrito lo que vale C_1 en términos de la ecuación (pues $a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}t=C_1$), es decir, les hace notar que ha escrito a C_1 como combinación lineal, lo cual es el punto clave en el $|A_x|$. (321-324)

Comentarles la estrategia o parte de ella para hacer la demostración de la regla de Cramer, usar las propiedades de los determinantes (en particular: 1. Separar en sumas de determinantes la columna expresada en términos de combinaciones lineales. 2. Usar la propiedad de proporcionalidad entre columnas y 3. Usar la propiedad de sacar término común). (329-331)

Remarcarles que en matemáticas es mejor demostrar cosas "largas" (extensas) con cuidado que las cortas, porque en una afirmación corta se tienen tan pocas cosas, tan pocos datos para trabajar que es más difícil, y no como las afirmaciones largas. En concreto, comentarles que no hay que asustarse al tener que resolver un problema que en apariencia es extenso. (365-370)

Hacerles notar la proporcionalidad entre dos columnas del determinante para ver que entonces ese determinante vale 0 y que lo mismo pasa con los siguientes dos determinantes, de tal forma que hay tres determinantes que dan 0 y del determinante principal $|A_x|$ que tenían inicialmente ya sólo les queda un determinante menos extenso. (405-419)

Hacerles notar que el término común que existe en la primera columna y que por tanto pueden usar una propiedad de los determinantes para sacar el término común (x) del determinante (si se multiplica un determinante por un número real, queda multiplicado por dicho número cualquier fila o columna, pero sólo una). (420-428)

Remarcarles a lo que han llegado con lo realizado hasta el momento (a que $|A_x|=x|A|$). (434-435)

Comentarles la estrategia para calcular $|A_y|$, que sería similar a la anterior (para calcular $|A_x|$) pero ahora se obtendría $|A_y|=y|A|$ entonces $y=|A_y|/|A|$. (448-458)

A forma de cierre de la demostración de la regla de Cramer, comentarles que la estrategia para calcular $|A_z|$, sería similar a la anterior (para calcular $|A_y|$) pero ahora se obtendría $z=|A_z|/|A|$. (459-460)

Hacerles notar que una cosa es hacer una demostración y otra hacer ejemplos concretos (con números específicos). (462-464)

CPG
Animarlos a que en la demostración de la regla de Cramer, aunque vean que en apariencia tienen que calcular un determinante muy amplio ($|A_x|$ expresado en la primera columna con combinaciones

lineales), cuentan con propiedades de los determinantes para calcularlos más rápido. (329-331)

Preguntarles a los estudiantes *¿qué pasa?* cuando los ve con cara de duda. (332)

Animarlos a seguir haciendo la demostración, que no se espanten porque en apariencia vean que el determinante que está quedando $|A_x|$ es muy amplio. (370)

Animarlos al hacerles ver que en un principio es largo de escribir el $|A_x|$, pero luego hay tres determinantes que dan 0 y entonces sólo les queda uno menos extenso. (417-419)

Nuevamente animándolos para que hagan la demostración de la regla de Cramer. (Aly: *Sé que no es lo más agradable* –hacer la demostración- *pero porque veáis esto no pasa nada, no.* Aly 11, p.10). (441-442)

Evento de Término: Aly terminó de presentar la demostración de la regla de Cramer (para un sistema de 4x4).

[11.2.3.] Presentación de un ejemplo usando la regla de Cramer. (465-554)

Objetivo particular: Presentar un ejemplo usando la regla de Cramer.

Evento desencadenante: Iniciar un ejemplo para usar la regla de Cramer.

[A, 11.2.3] Aly explica en la pizarra los determinantes que hay que ir calculando para encontrar los valores de x, y, z. Luego, explica el procedimiento de Sarrus para calcular el |A|. Para encontrar los valores de x y de y, sin desarrollar el procedimiento para obtener el valor de los determinantes $|A_x|$ y $|A_y|$, Aly anota sólo el resultado de éstos y los sustituye en $x=|A_x|/|A|$, $y=|A_y|/|A|$ para escribir el valor de x y de y respectivamente. Finalmente pide a los estudiantes que ellos calculen el valor del $|A_z|$y luego encuentren el valor de z.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber que en una fracción el denominador tiene que ser ≠ 0 para que esté definida (determinada). (477)

Saber calcular el rango de la matriz de coeficientes (incluye saber determinar el menor de orden 1, 2 y 3, es decir, hacer los respectivos determinantes). (481-487)

Saber cómo hacer la comprobación de la respuesta (los valores obtenidos de x, y, z) en el sistema. (542-554)

CC-Es
Prever que los estudiantes se pueden quedar con la imagen de que no necesitan hacer todo el procedimiento para obtener los valores de x, y, z, debido a lo que acaban de ver en la estrategia de la demostración de la regla de Cramer, pues al hacer la demostración, Aly hizo el desarrollo del procedimiento completo para encontrar el valor de x pero para encontrar el valor de y y de z no hizo el procedimiento completo sino que sólo les comentó la estrategia para calcularlos. (467)

CC-En
Remarcarles cuándo un sistema es sistema de Cramer, antes de empezar a hacer el ejemplo, es decir, les remarca eso para tener claro lo que hay que hacer en el ejemplo. (472-474)

Hacerles ver que primero hay que ver que el $|A|\neq 0$ porque el |A| aparece en el denominador de las expresiones $x=|A_x|/|A|$, $y=|A_y|/|A|$, $z=|A_z|/|A|$, es decir, para poder encontrar los valores de x, y, z respectivamente. (475-477)

Hacerles notar por qué el ejemplo es un sistema de Cramer (que el número de ecuaciones coincide con el número de incógnitas y eso es igual al rango de la matriz de coeficientes e igual al rango de la ampliada). Es decir, remarcarles eso antes de hacer propiamente el ejemplo. (491-493)

Aly sólo anota lo que da el $|A_x|$, es decir, no lo resuelve, sólo lo indica y anota el valor de x. Similarmente lo hace con el $|A_y|$, lo indica y no lo resuelve en clase, sólo anota el resultado de y. Para z, indica el $|A_z|$ y les pide que ellos lo calculen. (503-505); (506-515); (516-535)

Gestión de la participación. Saber que los estudiantes también deben participar activamente en clase y no sólo copiar lo que ella escribe en la pizarra. Aly los invita a que calculen el $|A_z|$ que ya ha indicado, para que los estudiantes también hagan algo y no sólo copien lo que anota ella. (520)

Corregir la idea equivocada del estudiante E3, E3 pensaba que no era necesario hacer el $|A_z|$, porque daba 0, idea errónea de E3 que justificaba que debido a que en la demostración de la regla de Cramer había un paso (para llegar a la expresión $|A_x|=x|A|$) en el que varios determinantes daban 0 (porque existía proporcionalidad entre dos columnas) entonces el $|A_z|=0$. (524-532)

Evento de Término: Aly terminó el ejemplo incluyendo la comprobación y se terminó la clase.

Análisis de la clase 12 de Aly

[12.1] Revisión de un ejercicio usando regla de Cramer para resolver un sistema de ecuaciones de 3x3. (1-97)

Objetivo general: Revisar un ejercicio usando regla de Cramer para resolver un sistema de ecuaciones de 3x3.

Evento desencadenante: Empezar a hacer ejercicios usando la regla de Cramer.

[A, 12.1] Aly explica en la pizarra la solución de un ejercicio que consiste en resolver un sistema de 3x3 usando la regla de Cramer.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber estudiar el rango de la matriz de coeficientes. (12-33)

Saber calcular determinantes de 3x3 usando la regla de Sarrus. (16-18)

Al encontrar el valor de x, y, z, saber indicar $|A_x|$, $|A_y|$ y $|A_z|$ y simplificar lo que queda en $x=|A_x|/|A|$, $y=|A_y|/|A|$, $z=|A_z|/|A|$. (63-72), (72-82), (83-93), respectivamente.

CC-Es
Prever que los estudiantes se pueden confundir al tener poca experiencia en estudiar el rango (rango 1, rango 2 y rango 3). (32-34)

CC-En
Interpretar y completar la respuesta de E1 (En este caso, acaban de indicar cómo encontrar el valor de x usando Cramer y Aly pregunta: *De la misma forma y, ¿a qué será igual?*, E1: *Al A sub y partido por A*, Aly: *y sería igual al determinante de A sub y partido por el determinante de A*). (51-54)

Indicarles el determinante A_x y comentarles que se resuelve con Sarrus y sólo anotar el resultado. (63-69)
Indicar nuevamente el determinante de A_y y sólo anotar el resultado, es decir, no

escribir ni explicar el procedimiento de Sarrus para calcularlo. (73-79)
Similarmente al anterior, indicar el determinante A_z y sólo anota el resultado. (84-90)

Evento de Término: Aly terminó de hacer el primer ejemplo usando la regla de Cramer.

[12.2] Presentación de un ejemplo de SCI usando la regla de Cramer. (98-374)

Objetivo general: Presentar un ejemplo de SCI usando la regla de Cramer.

Evento desencadenante: Empezar a presentar un ejemplo de SCI usando la regla de Cramer.

[A, 12.2] Aly explica en la pizarra cómo hacer un SCI usando la regla de Cramer.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber que se puede usar la regla de Cramer para un SCI. (98-107)

Saber calcular el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada. (130-225)

Saber usar los términos matemáticos (E1 ha dicho que una columna es inversa de otra y Aly le comenta que no inversa sino opuesta, en este caso C_3=-C_2). (159-161)

Saber usar términos adecuados en la explicación, pues no es lo mismo decir "eliminamos una columna" de la matriz que decir "a efectos del rango eliminamos una columna" de la matriz. (175-178); (216-217)

Saber cuándo un sistema es compatible indeterminado en términos del rango, es decir, saberse el teorema de Rouché-Frobenius. (231-236)

Saber aplicar (usar) la regla de Cramer para resolver un SCI. (270-277)U(302-355)

Saber la estrategia para indicar los determinantes $|A_x|$, $|A_y|$ y $|A_z|$ para encontrar el valor de x, y, z con la regla de Cramer: siempre los términos independientes se colocan en la primera, en la segunda o en la tercera columna dependiendo de la incógnita que se busque. (311-313)

Saber resolver un SCI. (369-374)

CC-Es
Prever que para los estudiantes será más comprensible este tema (Uso de la regla de Cramer en un SCI) si lo ven con un ejemplo concreto que aparece resuelto en el libro de texto. (110-112)

Prever que no se fijen si existe alguna relación entre filas o columnas y terminar más rápido el determinante justificando la propiedad que utilicen. (155,158); (164-167)

Prever que los estudiantes se pueden confundir con la z y la t que ahora son parámetros, por tanto, mejor les dará nombre de parámetro λ y μ, respectivamente. (260-269)

CC-En
Comentarles que se puede usar la regla de Cramer para un SCI. (98-107)

Evocarles y remarcarles cuándo un sistema es de Cramer, para luego hacerles ver que se puede usar Cramer en un SCI. (98-107)

Decidir con qué ejemplo empezar a abordar este tema (con el primer ejemplo de este tema que aparece resuelto en el libro de texto). (110-112)

Comentarles la estrategia de solución en ejercicios de sistemas: primero hay que saber de qué tipo es el sistema al comparar el rango de la matriz de coeficientes con el de la ampliada. (119-123)

Remarcarles lo que tendrían que ver para ver si el rango de A es tres, es decir, ver si el valor de ese determinante de orden tres es distinto de cero o no. (143-145)

Corregir el lenguaje matemático de los estudiantes (E1 ha dicho que una columna es inversa de otra y Aly le comenta que no inversa sino opuesta, en este caso C_3=-C_2). (159-161)

Remarcarles lo útil que puede ser si primero buscan relaciones entre filas o columnas antes de empezar a hacer operaciones (Aly: *... todo lo que veamos así* - relaciones - *es muy bueno porque nos evita hacer muchas operaciones del determinante, vale*). (181-183)

Gestión de la participación: Aly calla a E1 pues su respuesta no es correcta y además no aporta nada a la respuesta correcta del ejercicio (E1 dice que el sistema entonces no es compatible pero se trata de un SCI). (186-187)

Saber cuándo ignorar o retomar una respuesta de los estudiantes. En esta ocasión la respuesta de E1 es correcta (que el rango de la matriz de coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada), pero Aly la ignora para hacer el ejercicio. Posteriormente, al escuchar Aly la justificación de la respuesta de E1 (que la columna de los términos independientes es igual a la anterior cambiada de signo, lo cual hace que el rango de la matriz de coeficientes sea igual al de la ampliada) que ella ignoró por un momento, la acepta y la retoma para mostrarles a todo el grupo por qué el rango de la matriz de coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada. (201-225)

Resumirles lo que han hecho, a lo que han llegado hasta ahora lo que falta por hacer en este ejemplo (apenas han estudiado el rango de la matriz de coeficientes y de la ampliada y falta decir con base a eso qué tipo de sistema es y en su caso resolverlo). (226-229)

Hacerles notar la ventaja de que puede resultar más fácil resolver el sistema si el rango es dos y el número de ecuaciones y de incógnitas es cuatro. (237-239)

Evocarles un tema equivalente (SCI que resolvieron con el método de Gauss) para que ellos comprendan mejor lo que les acaba de decir (que se trata de resolver un SCI como los que habían resuelto antes por Gauss). (241-242)

Remarcarles el tipo de sistema del que se trata (SCI con dos parámetros), antes de empezar a hacerlo. (252-253)

Hacerles notar lo que tienen (una submatriz de orden dos que ya es de rango dos) y que por tanto pueden usar Cramer (porque esa submatriz cumple con la condición para aplicar esa regla). (271-275)

Empezar a decirles la estrategia para usar Cramer, calcular el valor de x que es igual al $|A_x|/|A|$. (276-277)

Interpretar las preguntas y respuestas de E1, pues E1 pregunta si ese SCI se puede resolver con una reducción, pero en su primera intervención, pregunta si lo puede resolver por Gauss pero posteriormente al responder a Aly, Aly transfiere su lenguaje común, es decir, su pensamiento matemático a lenguaje matemático (E1: *Una pregunta, si por ejemplo se suma o yo lo quisiera resolver por Gauss ¿se puede?*, Aly: *Claro, lo hemos hecho ¿no?*, E1: *Si pero me refiero por ejemplo a x-y, a la primera fila y la segunda fila*. Aly: *Ah tú dices aplicar una reducción*. E1: *Sí, si.*). (278-284)

Remarcarles que siempre tienen ahí (como reserva) el método de reducción (que se ve comúnmente en secundaria) para cuando lo quieran usar (cuando lo consideren útil). (296-299)

Decidir resolver el sistema por el método de reducción y por Cramer. Aly inicialmente pensaba resolverlo sólo por Cramer pero debido a la intervención de E1 (que comenta que se puede hacer una reducción –método que hasta el momento los estudiantes tienen más trabajado-), decide hacerlo también por reducción simple. (300-301)

Remarcarles la estrategia (siempre los términos independientes se colocan en la primera, en la segunda o en la tercera columna dependiendo de la incógnita que se busque), para indicar los determinantes que aparecen en los numeradores, para encontrar el valor de x, y, z con la regla de Cramer, es decir, para indicar los determinantes $|A_x|$, $|A_y|$ y $|A_z|$. (311-313)

Hacerles notar que en un SCI la solución queda en términos de parámetro(s). (348)

Remarcarles lo que se debe hacer, la estrategia a utilizar cuando los estudiantes tengan que resolver un procedimiento de ese tipo, en este caso, saber escribir el sistema compatible indeterminado, saber explicar cuáles ecuaciones no participan en ese menor, que ha dado distinto de 0, quitar las ecuaciones que sobran y obtener las incógnitas, pasar las incógnitas que van a ser parámetros a la derecha y terminar el sistema como si fuera uno de orden 2. (369-374)

CC

Saber los contenidos que vienen en el libro de texto. En este caso, saber que este tema (Uso de la regla de Cramer en un SCI) viene en el libro de texto. (110-112)

Saber que el significado de orlar en una matriz, viene en el libro de texto. (137-140)

Evento de Término: Aly terminó de hacer el ejemplo de SCI usando la regla de Cramer.

[12.3] Presentación de otro ejercicio que consiste en resolver un SCI usando la regla de Cramer, para que los estudiantes practiquen. (375-432)

Objetivo general: Presentar otro ejercicio que consiste en resolver un SCI usando la regla de Cramer, para que los estudiantes practiquen.

Evento desencadenante: Empezar a hacer un nuevo ejercicio para resolver SCI.

[A, 12.3] Aly invita a los estudiantes a empezar a hacer cada quien el ejercicio 1 propuesto por el libro.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber parte de la estrategia para resolver SCI (Aly: ... *las incógnitas que van a quedar, son las que están en esa submatriz, es decir, que la última ecuación la eliminamos, entonces ¿ahora qué hacemos con la z? Pues en este caso nuestras incógnitas van a ser x, y, y la z pasa a ser un parámetro, la vamos a llamar λ*). (415-420)

CC-En
Ponerlos a hacer un ejercicio parecido al que acaban de hacer, justo después de hacer uno similar a ese para que practiquen lo enseñado. (375-383)

Comentarles en lo que se deben de fijar, tipo estrategia, al hacer un ejercicio sobre sistemas de ecuaciones lineales (Aly: ... *primero estudiar el rango es muy importante saber con que menor distinto de 0 nos quedamos, ver las incógnitas que participan en ese menor, pues son las que verdaderamente nos van a quedan en el sistema*). (380-383)

Remarcarles que las incógnitas que van a quedar son las que están en la submatriz cuyo determinante es distinto de 0 y por tanto en este caso, eliminar la tercera ecuación y con ello la z pasa a ser parámetro. (415-420)

Dejarles de deberes terminar el ejemplo que no dio tiempo a terminar en la clase (resolver el sistema por reducción). (429-432)

Evento de Término: Se terminó la clase, no se terminó el ejercicio que estaban haciendo y les deja de deberes que lo terminen.

Análisis de la clase 14 de Aly

[14.1] Revisión de uno de los problemas (recientes) más comunes que aparecen en el examen de selectividad, sobre los últimos temas abordados en clase (clasificación de un sistema con un parámetro *a* estudiando el rango). (6-282)

Objetivo general: Revisar (hacer) uno de los problemas (recientes) más comunes que aparecen en el examen de selectividad, sobre los últimos temas abordados en clase (clasificación de un sistema con un parámetro *a* estudiando el rango).

Evento desencadenante: Aly empieza a hacer uno de los problemas más comunes que aparecen en el examen de selectividad (este problema se los había dejado de deberes anteriormente).

[A, 14.1] Aly explica en la pizarra, paso a paso, la solución del problema y a la vez hace algunas preguntas a los estudiantes para saber los procedimientos que ellos usaron y los resultados que ellos obtuvieron en ese problema.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber lo que dice el Teorema de Rouché-Frobenius. (26-30)

Saber que existe rango 1 y rango 2 en la matriz de coeficientes. (35-40)

Saber lo que se necesita para ver si el rango es 3 ó en qué caso (saber que hay que calcular el determinante de la matriz de coeficientes y analizar para qué valores da cero el determinante y para qué valores no). (35-40)

Saber calcular el determinante de orden 3. (41-43)

Saber que el rango de A es dos y el rango de la ampliada es tres (cuando a=1). (118-145)

Saber que es cierta la afirmación de E4, que si en el sistema, la primera ecuación es $x+y+z=0$ y la tercera ecuación es $x+y+z=1$, no puede ser igual a 0 y a 1 al mismo tiempo. Es decir, saber que un sistema es incompatible si por un lado se tiene que $x+y+z=0$ y que $x+y+z=1$, porque la misma ecuación no puede ser igual a 0 e igual a 1 simultáneamente. (135-137)

Saber que el sistema es incompatible (porque el rango de la matriz A es distinto del rango de la matriz ampliada), es decir, saber lo que dice el teorema de Rouché-Frobenius. (147-148)

Saber que el rango de A es dos cuando a=2. (159-163)

Saber que el rango de la matriz ampliada es dos cuando a=2. (164-174)

Saber lo que dice el Teorema de Rouché-Frobenius y por lo tanto deducir que con a=2 el sistema es un Sistema Compatible Indeterminado. (175-181)

Saber que si la solución del sistema queda por ejemplo en términos de la expresión $z/2$, entonces es conveniente hacer $z=2\lambda$ y no $z=\lambda$ para que la expresión quede más sencilla. (201-202)

Saber que puede quitar la tercera ecuación del sistema (porque el rango de la matriz de coeficientes no es tres sino dos, entonces deja las dos ecuaciones con las que obtuvo rango dos). (211-215); (216-219) y (porque una fila es combinación lineal de las otras dos). (220-225)

Saber que si el sistema de 3x3 tiene a lo más rango dos, lo importante es quedarse con las ecuaciones del menor de orden dos cuyo determinante es distinto de cero, independientemente del orden, es decir, de si es la primera y la segunda ecuación o la segunda y la tercera ecuación. (233-243)

Saber que en un sistema de 3x3, si queda rango uno pues habría una incógnita y dos parámetros, si queda rango dos entonces dos incógnitas y un parámetro. (244-246)

CEC
Saber que si el valor del determinante se expresa como una ecuación de segundo grado, entonces se pueden aplicar propiedades de los números reales en la ecuación. Es decir, cambiar de signo al término -a2 y, por lo tanto a todos los términos de la ecuación. Aly hace notar a los estudiantes que el valor del determinante no puede cambiar de signo, pero la ecuación de segundo grado en si misma sí (aplicando propiedades de campo de los números reales). E1 ha dicho: “Una pregunta, si el valor del determinante fuera, en particular, a=0, tendríamos que igualar eso a 0, pero también se podría cambiar de signo a la a al cuadrado”. La expresión del determinante de la matriz es -a2+3a-2, la ecuación sería expresada como -a2+3a-2=0. (44-56)

Saber que en un sistema compatible indeterminado, al dar soluciones a ese sistema con distinto valor de parámetro, en el conjunto de infinitas soluciones la solución será la misma (seleccionen el menor que seleccionen siempre y cuando elijan el menor de forma correcta –que el determinante sea distinto de cero). Es el profesor a diferencia de otros profesionales, el encargado de explicar a los estudiantes (sobretodo cuando es la primera vez que ven eso los estudiantes) que aunque aparentemente vean que las soluciones son distintas (con distinto valor del parámetro) en el conjunto de infinitas soluciones es la misma. (254-262)

CC-Es
Prever que si les dice el Teorema de Rouché-Frobenius en lenguaje más familiar para ellos, entenderán “mejor” lo que dice el teorema. (26-30)

Prever que al cambiar de signo a la ecuación que representa el valor del determinante, los estudiantes pueden hacerse una imagen inadecuada y cometer el error de cambiar de signo el valor del determinante, es decir, hacerlo mecánicamente sin saber lo que están haciendo. (44-56)

Capacidad para escuchar e interpretar el conocimiento/pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje usual. En este caso, interpretar que lo que E4 quiere decir es que un sistema es incompatible si por un lado se tiene que x+y+z=0 y que x+y+z=1, es decir, la misma ecuación no puede ser igual a 0 e igual a 1 simultáneamente. (135-148)

Prever que se pueden quedar con la idea incorrecta de que resolvieron el problema completo y por ello les aclara que sólo lo han resuelto para a=2. (281-282)

CC-En
Comentarles en lenguaje más familiar a los estudiantes lo que dice el Teorema de Rouché-Frobenius. (26-30)

Decirles la estrategia, lo que tienen que hacer para resolver el problema (estudiar el rango de la matriz y en su caso ver para que valores da cero el determinante de la matriz). (35-40)

Hacerles notar que este ejercicio no es diferente a los que han hecho en clase (como decía E5). (35-40)

Remarcarles que es muy importante lo que les comenta, que en el valor del determinante no pueden cambiar el signo, pero cuando está igualada a cero la ecuación que representa el valor del determinante entonces sí. (44-56)

Comentarles que pueden usar un "truco" para resolver la ecuación de segundo grado sin necesidad de usar la fórmula general, pero que si se sienten perdidos pues entonces usen la fórmula general, es decir, les da dos alternativas de solución. (63-68)

Hacer notar a E2 que no es conveniente usar la regla de Rufini para resolver ecuaciones de segundo grado y menos cuando las soluciones son fracciones o raíces. (76); (85-91)

Remarcarles que no pierdan el verdadero objetivo del problema: Discutir el sistema según los valores de a y clasificarlo. (100-101)

Hacer énfasis en que es distinto que dos filas sean iguales a que sean linealmente dependientes. En este caso si a=1 entonces la primera y la tercera fila son iguales. (121-124)

Capacidad para transferir e interpretar la pregunta de los estudiantes y luego dar la respuesta a forma de explicación. En este caso, Aly interpreta lo que dice E4 y luego responde explicando porque el sistema es incompatible (porque el rango de la matriz A es distinto del rango de la matriz ampliada). (135-148)

Recapitular brevemente lo que han visto y lo que falta por ver (que han visto si a es distinto de uno y de dos, que son los valores que anulan el determinante, luego si a es igual a uno y a continuación van a estudiar lo que pasa si a es igual a dos). (151-153)

Hacerles notar que el rango de A es dos porque precisamente obtuvieron el valor de a=2 cuando igualaron el valor del determinante a cero para ver para qué valores se hacía cero ese determinante), por tanto, como a es uno de los valores para el cual el determinante de A es cero, entonces el rango de A es dos. (159-163)

Hacer notar el hecho de que en la matriz ampliada la primera columna y la tercera son iguales (pues de ser así, el determinante de la ampliada es cero y entonces el rango de la ampliada es dos). (168-169)

Capacidad para transferir e interpretar la pregunta de los estudiantes y luego dar la respuesta a forma de explicación. Explicarles porque quita la tercera ecuación del sistema (porque el rango de la matriz de coeficientes no es tres sino dos, entonces deja las dos ecuaciones con las que obtuvo rango dos). (211-215); (216-219)

Capacidad para transferir e interpretar la pregunta de los estudiantes y luego dar la respuesta a forma de explicación. Explicarles la condición para quitar una ecuación del sistema de 3x3 para resolverlo (garantizar que no existe rango tres y quedarse con las dos ecuaciones con las que se obtuvo rango dos). (216-219)

Usar un ejemplo para hacer ver que en un sistema de 3x3 que tiene a lo más rango dos (y no rango tres), no se puede quitar cualquier fila (cualquier ecuación de sistema) para resolverlo, se tendría que quitar la que no garantice rango tres, es decir, dejar las dos ecuaciones que garanticen rango dos. (226-232)

Capacidad para transferir e interpretar la pregunta de los estudiantes y luego dar la respuesta a forma de explicación. Explicarles que si el sistema de 3x3 tiene a lo más rango dos, lo importante es quedarse con las ecuaciones del menor de orden dos cuyo determinante es distinto de cero, independientemente del orden, es decir, no importa si es la primera y la segunda ecuación o la segunda y la tercera ecuación. (233-243)

Remarcarles que en un sistema de 3x3 que tiene a lo más rango dos, independientemente de que con las dos ecuaciones que se queden sea la primera y la segunda o la segunda y la tercera (siempre y cuando garanticen el rango dos), la solución del sistema debe ser la misma. (239-243)

Hacerles notar la importancia de estudiar el rango (en un sistema de 3x3, si queda rango uno pues habría una incógnita y dos parámetros, si queda rango dos entonces dos incógnitas y un parámetro). (244-246)

Remarcarles que en un sistema compatible indeterminado, el conjunto de infinitas soluciones les debe dar la misma solución (seleccionen el menor que seleccionen siempre y cuando elijan el menor de forma correcta –que el determinante sea distinto de cero). (254-262)

Aclararles que no resolvieron el problema completo sino que sólo lo han resuelto para a=2. (281-282)

CPG
Hacer algunas preguntas a los estudiantes para saber los procedimientos que ellos usaron y los resultados que ellos obtuvieron en los dos apartados de ese problema. (6-282)

Invitarlos a que practiquen y hagan los ejercicios. Aly un poco molesta de tanta pregunta les pide que en lugar de hablar y hablar, de preguntar y preguntar qué pasaría si… y qué pasaría si..., se pongan a hacer los ejercicios (a practicar), es decir, menos hablar y más hacer. (264-267)

Evento de Término: Aly terminó de explicar la solución al problema.

[14.2] Presentación del tema "Forma matricial" a través de un ejemplo. (283-509)

Objetivo general: Presentar el tema "Forma matricial" a través de un ejemplo.

Evento desencadenante: Inicia a presentar el tema "Forma matricial" a través de un ejemplo.

[A, 14.2] Aly explica en la pizarra que el sistema de ecuaciones se puede escribir en forma matricial AX=C y que de ahí se pueden obtener los valores de las incógnitas a través de la forma $X=A^{-1}C$, es decir, usando la matriz inversa de A.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber escribir el sistema del ejemplo en forma matricial AX=C. (304-315)

Saber que el sistema se puede escribir en forma matricial porque al hacer el producto e igualar término a término (en AX=C) se obtiene el sistema inicial. (316-338)

Saber despejar la X de la ecuación matricial AX=C, es decir, saber que $X= A^{-1}C$. (349-362)

Saber la analogía entre el elemento neutro de los números reales y la matriz identidad en las matrices y su funcionalidad (que al multiplicar un elemento del mismo conjunto por el elemento neutro o la matriz identidad, en los números reales o en matrices respectivamente, lo/la deja invariante). (366-368)

Saber que $X=A^{-1}C$ es otra forma de calcular el valor de las incógnitas y que para usar esa forma, el sistema debe ser cuadrado (de 2x2, 3x3, etc.). (369-374)

Saber las condiciones para aplicar $X=A^{-1}C$ y encontrar el valor de x, y, z: el sistema debe ser cuadrado, es decir, igual número de ecuaciones que de incógnitas y existir A^{-1}, es decir, resolver el sistema de forma matricial. (375-381)

Saber que como el determinante de A es distinto de cero entonces existe A^{-1}. (386-392)

Saber calcular la matriz inversa con la expresión $A^{-1}=(AdjA)^t/|A|$, incluye saber calcular cada parte de esa expresión (AdjA, $(AdjA)^t$ y |A|). (386-464)

Saber encontrar el valor de x, y, z una vez que tiene A^{-1}, es decir, obtener X del producto $A^{-1}C$ y con ello saber el valor de x, y, z. (465-491)

Saber cuál método puede ser más rápido y por qué (*por Cramer puede ser más rápido pero depende de la dificultad de la matriz, si hay ceros en la matriz pues es mejor hacerlo por Cramer, pero si piden hacerlo con la forma matricial pues entonces hay que hacerlo con esa forma*). (501-507)

CEC
Saber que al aplicar la propiedad conmutativa en matrices, el error de los estudiantes puede provenir de la extensión de la propiedad conmutativa del producto en los números reales al producto en matrices, de tal manera que cuando despejan X de la ecuación matricial AX=C, deben tener cuidado al multiplicar A^{-1} por la izquierda en

ambos términos de la igualdad, especialmente en la segunda parte de la igualdad (en $A^{-1}C$), pues en las matrices el producto no es conmutativo y entonces $A^{-1}C \neq CA^{-1}$. Es el profesor a diferencia de otros profesionales, el que se plantea la causa matemática del error de los estudiantes al enfrentarse con la propiedad no conmutativa en el producto de matrices. (349-362)

CC-Es
Prever que los estudiantes pudieran equivocarse al multiplicar por A^{-1} sin considerar si debe ser por la derecha o por la izquierda (para despejar X de AX=C). (349-362)

Prever que los estudiantes tienen más trabajado el elemento neutro en los números reales y entonces al comentarles la analogía entre el elemento neutro de los números reales y la matriz identidad en las matrices, los estudiantes entenderán "mejor" la funcionalidad de la matriz identidad en las matrices. (366-368)

Prever que pueden equivocarse en el signo, al escribir sólo el valor del adjunto, sin escribir todos los cálculos, es decir, al hacerlo directamente. (413-416)

CC-En
Después de mostrarles, paso a paso, que el sistema se puede escribir como AX=C, Aly retoma la idea principal del ejemplo: escribir el sistema en forma matricial AX=C para resolver el sistema. (340-342)

Hacerles notar la analogía del elemento neutro de los números reales y la matriz identidad en las matrices, aprovecha que los **estudiantes** tienen más trabajado el elemento neutro en los números reales. (366-368)

Remarcarles lo que han obtenido hasta el momento (369-374):

1. Que la $X=A^{-1}C$.
2. Que $X=A^{-1}C$ es otra forma de calcular el valor de las incógnitas.
3. Que para usar la forma $X=A^{-1}C$, el sistema debe ser cuadrado (de 2x2, 3x3, etc.).

Resumirles lo más importante de lo que han obtenido (las condiciones para aplicar $X=A^{-1}C$ y encontrar el valor de x, y, z: el sistema debe ser cuadrado, es decir, igual número de ecuaciones que de incógnitas y existir A^{-1}). (375-381)

Comentarles la estrategia a seguir para resolver el problema (calcular A^{-1} para calcular $X=A^{-1}C$). (393-394)

Repetir el proceso de calcular la inversa por adjuntos. Aly decide repetir el proceso por los estudiantes que no asistieron la clase anterior, escribiendo paso a paso el procedimiento para calcular la matriz inversa con la expresión $A^{-1}= (AdjA)^t/|A|$. (386-464)

(Contestando a la pregunta de E2) Comentarles que pueden escribir sólo el valor del adjunto, si no desean escribir todos los cálculos, pero que se fijen bien en el signo que queda. (413-416)

Orientarlos sobre lo que tienen (la Adj A) y lo que hay que hacer para continuar el proceso para calcular A^{-1} (calcular $(AdjA)^t$ y después $(AdjA)^t/|A|$). (451-452)

Retomar el objetivo del problema del ejemplo: resolver el sistema. Por lo tanto recapitula lo que se ha hecho hasta el momento (obtener A^{-1}) y lo que falta por hacer para resolver el sistema (hacer el producto $A^{-1}C$ para obtener el valor de x, y, z). (465-470)

Remarcarles la importancia del orden de las matrices para poder multiplicarlas. Además les hace notar el orden (3x1) del que quedará la matriz resultante del producto $A^{-1}C$ en el ejemplo. (474-482)

Remarcarles la importancia de identificar en un enunciado cómo les piden resolver un sistema, saber si hay que resolverlo de forma matricial o si es por Cramer, pues con base en eso podrían saber qué método hay que usar. Comentarles que será de forma matricial, si dice resuelve el sistema de forma matricial, entonces hay que hacerlo de la forma AX=C, encontrar $X= A^{-1}C$ y de ahí obtener los valores de x, y, z. (492-496)

Evento de Término: Aly terminó de hacer el ejemplo en el que resuelve el sistema con la forma matricial AX=C entonces $X=A^{-1}C$.

[14.3] Presentación de la resolución de un sistema homogéneo a través de un ejemplo. (513-558)

Objetivo general: Presentar la resolución de un sistema homogéneo a través de un ejemplo.

Evento desencadenante: Inicia a resolver un ejemplo de un sistema homogéneo.

[A, 14.3] Aly explica en la pizarra, paso a paso, la resolución del sistema homogéneo.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber que hay que estudiar el rango para saber si el SH es determinado o indeterminado. (534-537)

Saber que en el ejemplo de SH existe rango 1, rango2 y rango 3 (incluye saber calcular los determinantes de orden 2 y 3). (538-552)

Saber el Teorema de Rouché-Frobenius, que si el Rango A = Rango A ampliada = Rango máximo entonces es un Sistema Compatible Determinado y entonces el sistema tiene solución trivial. (552-558)

CC-Es
Prever que si les destaca a los estudiantes las principales características de un SH antes de hacer el ejemplo, entenderán "mejor", "más rápido" y "bien" el ejemplo de SH que les va a presentar. (513-529)

CC-En
Hacerles notar que hay que estudiar el rango para saber si el SH es determinado o

indeterminado. (534-537)

Saber qué dejarles de deberes. (560-561)

Evento de Término: Aly terminó de resolver el sistema homogéneo y se terminó la clase.

Análisis de la clase 15 de Aly

[15.1] Revisión de ejercicios para clasificar sistemas homogéneos estudiando el rango de A y en su caso resolverlo. (1-218)

Objetivo general: Revisar (hacer) ejercicios para clasificar sistemas homogéneos estudiando el rango de A y en su caso resolverlo. En particular, revisar (hacer) ejercicios para practicar los últimos temas vistos en clase (Sistema Homogéneo, uso de la regla de Cramer en SCI y discusión de sistemas según el valor del parámetro *a*, clasificarlos y resolverlos).

Evento desencadenante: Aly empieza a hacer un apartado del primer ejercicio que había dejado de deberes.

[A, 15.1] Aly explica en la pizarra, la "solución" del primer ejercicio que había dejado de deberes.

Conocimientos en acción:

CCC

Saber en el apartado b) del ejercicio (1-14):

1. Que existe rango1 y rango 2.
2. Que no existe rango 3 (saber la regla de Sarrus y calcular el determinante de la matriz A de orden 3x3).
3. Que cuando Rango A = 2 = Rango de la ampliada entonces es un sistema compatible indeterminado (saber lo que dice el Teorema de Rouché-Frobenius).

Saber que en el apartado c) existe rango 1, rango 2 y rango 3. (46-52)

Saber que el rango de A = 3 por más que se agreguen filas porque el orden de A es 4x3, entonces el rango máximo que puede tener es 3. (56-71)

Saber que si el rango de la matriz A no es el rango máximo, es decir, el rango A < número de incógnitas, eso no significa que el sistema sea incompatible. (84-86)

Saber que en un sistema homogéneo el rango de A = rango de la matriz ampliada y entonces siempre será un sistema compatible y entonces lo que tienen que ver es si es determinado o indeterminado. (87-89)

Saber que en el apartado d) existe rango 1, rango 2 y rango 3. (95-109)

Saber que se puede usar la regla de Cramer para resolver el SCI. (143-155)

CC-Es
Prever que puede haber estudiantes que les preocupe o les sea más importante ver cuál sería esa dependencia lineal y pierdan el sentido del problema, es decir, que este dato puede despistar a los estudiantes (ver que el determinante de la matriz A da 0 y que entonces no puede tener rango 3, y que por tanto existe una dependencia lineal en las filas o columnas de la matriz A). En este caso el determinante de orden 3 da 0 y no se ve tan fácilmente la dependencia línea entre filas o columnas. (21-23)

Saber que le permite interpretar el pensamiento de E1 y responderle. En este caso E1 pregunta que si el sistema homogéneo es incompatible, pero al justificar E1 su respuesta (E1 dice que es incompatible porque el rango de A va a ser menor que el número de incógnitas), Aly interpreta que E1 lo que intenta decir es que el sistema homogéneo va a salir compatible indeterminado. (90-92)

Prever que a los estudiantes les puede parecer extraño usar la regla de Cramer en un SCI y que por ello no la utilicen a pesar de que se cumplan las condiciones para aplicar la regla de Cramer. (150-155)

CC-En
Decidir revisar este ejercicio con sus tres apartados porque permite practicar y repasar los últimos temas vistos en clase, es un 3 en 1, es decir, 3 casos distintos en un solo ejercicio. (1-205)

Remarcarles que es importante que se fijen en tomar el menor de orden dos que garantiza el rango dos, una vez que saben que se trata de un SCI y que tiene rango 2. (19-20)

Hacerles notar que aunque no se vea fácilmente la dependencia lineal que existe entre las filas o las columnas, lo que importa es que el determinante de orden tres da cero. (21-23)

Aclararles que no se puede hablar de determinante de A, porque A no es una matriz cuadrada, pero que van a calcular el determinante de la submatriz de A de orden tres para estudiar el rango de A (A es de orden 4x3). (43-45)

Hacerles notar que como A no es una matriz cuadrada (A es de orden 4x3), entonces no está hablando en este caso del determinante de A, sino del determinante de la submatriz de A de orden 3. (53-55)

Hacerles notar que ahora (el apartado d) del ejercicio) se trata de un sistema homogéneo de 3x4, para que noten que el orden de este sistema es contrario al del anterior (4x3). (74-76)

Aclararle a E1 que si el rango de la matriz A no es el rango máximo, es decir, el rango A < número de incógnitas, eso no significa que el sistema sea incompatible. (84-86)

Aclararle a E1 que un sistema homogéneo nunca va a ser incompatible y que lo que tienen que ver es si es determinado o indeterminado. (87-89)

Traducir/interpretar lo que está pensando E1 y responderle. En este caso E1 pregunta que si el sistema homogéneo es incompatible, pero al justificar E1 su respuesta (E1 dice que es incompatible porque el rango de A va a ser menor que el número de incógnitas), Aly interpreta que E1 lo que intenta decir es que el sistema homogéneo va a salir compatible indeterminado. (90-92)

Volver a remarcarle a E1 que el sistema será compatible (y no incompatible que era lo que él decía antes). (93)

Decirles la estrategia de solución, pues ya han hecho varios ejercicios equivalentes (básicamente tienen una estrategia de solución similar a este). Decirles: *Bueno pues lo mismo de siempre, empezamos a estudiar el rango de la matriz de coeficientes*. (94-95)

Hacerles notar que en este ejercicio (sistema homogéneo) se trata de un SCI con un parámetro para que los estudiantes tengan una idea de cómo se va a solucionar ese sistema. (115-118)

Comentarles otra parte de la estrategia de solución (quedarse con las ecuaciones del menor que garantiza rango 3 y desplazar la t a la derecha). (119-122)

Hacerles notar que ahora se trata de resolver un sistema con tres incógnitas y un parámetro y les comenta a la vez que ya saben también el valor del determinante, para luego preguntarles qué método será conveniente usar para resolver el sistema. Aly quiere escuchar Cramer pero no le contestan eso, Aly insiste para ver si le dicen Cramer pero nada. (129-140)

Hacerles notar que a pesar de que se trata de un SCI, al pasar la t como parámetro queda un sistema de 3x3 con determinante distinto de 0 y entonces se puede usar la regla de Cramer. (143-155)

Remarcarles que la regla de Cramer comúnmente se usa en SCD pero que en este caso se aplicará la regla de Cramer para este SCI con un parámetro. (150-155)

Hacerles notar que en ejercicios anteriores les quedan sistemas de 2x2 que eran fáciles de resolver por reducción, pero que ahora hay que usar otro método. Aly trata de promocionar los métodos para resolver sistemas que han visto en este bloque de Álgebra y que vean que éstos pueden ser más “cómodos”, es decir, más prácticos para resolver sistemas de ecuaciones, por ejemplo, la regla de Cramer. (174-176)

CPG

Acercarse a revisar lo que han hecho los estudiantes y cómo lo han hecho. Hacer algunas preguntas a los estudiantes para mantener la atención de los estudiantes y saber los procedimientos que ellos usaron y los resultados que ellos obtuvieron en los dos apartados de ese problema. (1-218)

Una forma de motivar a los estudiantes a hacer un ejercicio (Aly: … *ese es el sistema que nos queda para resolver, ¿cómo se resuelve esto ahora?, de estos no hemos hecho ninguno*). (124-126)

Hacerles ese comentario, puede ser una motivación para que los estudiantes vean que este apartado del ejercicio es interesante (Aly: *¿Este ejercicio nadie lo ha terminado verdad?*, Es: *No*, Aly: *Pues este es interesante ¡eh!*). (189-191)

Evento de Término: Aly terminó de explicar la "solución" al último apartado de este ejercicio.

[15.2] Revisión de un sistema de ecuaciones definido con un parámetro *a*. (219-401)

Objetivo general: Revisar (hacer) un sistema de ecuaciones definido con un parámetro *a*.

Evento desencadenante: Iniciar a hacer otro ejercicio (ejemplo).

[A, 15.2] Aly explica en la pizarra la solución de este ejercicio, discutiendo con los estudiantes el tipo de sistema que es dependiendo de los valores del parámetro *a*, lo clasifica y en el caso de que el sistema sea compatible lo resuelve.

Conocimientos en acción:

CCC
Saber que existe rango 1, rango 2 y en qué casos rango 3 (dependiendo de los valores del parámetro *a*). (223-248)

Saber que puede usar la regla de Cramer para resolver este SCD, es decir, que se cumplen las condiciones para aplicar esa regla. (252-265)

Saber calcular $x=|A_x|/|A|$, claramente incluye saber calcular $|A_x|$ y $|A|$. (270-283)

Saber calcular $y=|A_y|/|A|$, claramente incluye saber calcular $|A_y|$ y $|A|$. (284-288)

Saber calcular $z=|A_z|/|A|$, claramente incluye saber calcular $|A_z|$ y $|A|$. (289-293)

Saber (339-346):
1. Que el rango de la ampliada es 3.
2. Que como el rango de A = 2 ≠ rango de la ampliada = 3, entonces el sistema es incompatible y entonces no existe solución.

Saber que con a=-3/4 la matriz A tiene rango 2. (362-365)

Saber que (381-387):
1. El rango de la ampliada es 3.
2. Si el rango A = 2 ≠ rango de la ampliada = 3, entonces el sistema es incompatible y entonces no existe solución.

CC-Es
Dar por hecho que los estudiantes pueden resolver fácilmente una ecuación de segundo grado y por ello sólo anotar el resultado de esas operaciones. Aly no resuelve la ecuación de segundo grado sólo anota los valores que da, en este caso a=2 y a=-3/4.

(235-236)

Saber que los estudiantes pueden no apreciar que cuando calcularon el determinante de la matriz A y vieron para qué valores ese determinante vale cero, precisamente encontraron que uno de esos valores es a=2, entonces A no puede tener rango 3. Es decir, saber que los estudiantes pueden cometer el error de volver a calcular el determinante de A y "estudiar desde cero" el rango de A. (301-328)

Prever que al tomar ahora otro menor distinto al que toman comúnmente puede confundir a los estudiantes, al estudiar este sistema. (368-373)

CC-En

Hacerles notar que existe rango 2 aunque en otro menor de una submatriz que no habían tomado anteriormente en clase (Aly: ... *con la submatriz de orden 2 formada por los 2 últimos elementos de la segunda y tercera fila y de la segunda y tercera columna vemos que hay rango 2 ¿os fijáis?*). Comúnmente en los ejercicios anteriores obtenían rango dos con la submatriz formada por los dos primeros elementos de la primera y segunda fila y columna. (224-228)

Decirles parte de la estrategia a seguir al hacer este tipo de ejercicios, una vez que se tiene el valor del determinante en términos del parámetro, hay que ver para qué valores ese determinante se hace cero. (232-234)

Decirles la estrategia para solucionar el problema. Analizar a) Si a≠2 y a≠-3/4, b) Si a=2 y c) Si a=-3/4. (244-250)

Hacerles notar lo que han hecho y lo que van a hacer ahora (situarlos para luego continuar), (Aly: *Entonces ya tenemos la solución para el caso en que a≠2 y a≠-3/4. Bueno y ¿qué vamos a hacer ahora? Pues vamos a estudiar qué pasa si a vale 2*). (294-297)

Hacerles notar que cuando calcularon el determinante de la matriz A y vieron para qué valores ese determinante vale cero, precisamente encontraron que uno de esos valores es a=2, entonces A no puede tener rango 3 pero si rango 2, lo cual se puede ver con el determinante de la submatriz de orden 2 formada por los dos primeros elementos de las dos primeras filas y columnas, que es distinto de 0. Y que por tanto lo que hay que averiguar es el rango de la ampliada. (301-328)

Volver a remarcarles que ya tienen hecho el determinante de A y que por ello ya no es necesario calcular ese determinante, porque el que les queda por hacer es el determinante de la matriz ampliada (con la columna de los términos independientes). (336-341)

Comentarles lo que van a hacer, evocando a lo que acaban de hacer (con a=2), es decir, evocando al procedimiento equivalente para que los estudiantes tengan una idea de lo que van a hacer ahora. (Aly: *Bueno si a=-3/4, vamos a empezar a hacer lo mismo, vamos a empezar con la matriz ampliada*). (349-350)

Remarcarles nuevamente que no es necesario volver a calcular el determinante de la matriz A porque ya saben que da cero. Pero que lo que si necesitan es garantizar que A tiene rango 2, luego les muestra con dos submatrices de A que existe rango 2. (357-365)

Hacerles notar que también podrían trabajar con el menor que comúnmente han trabajado en ejercicios anteriores pero que ahora tomará otro menor. En este caso Aly, a diferencia de otras ocasiones, toma una submatriz diferente, normalmente siempre toma la submatriz de orden 2 formada por las primeras dos filas y columnas y ahora tomó la submatriz de orden 2 formada por los dos elementos de la segunda y tercera filas y columnas. (368-373)

Decirles esta estrategia de solución: *si me da que va a tener rango 3* –la matriz ampliada- *pues sería incompatible pues el rango de A es 2, que no, pues entonces hay que resolver*. Es decir, Aly les comenta lo que hay que hacer para dar respuesta a ese ejercicio. (376-380)

Hacerles notar que pueden tomar un menor u otro para estudiar el rango de la matriz (siempre y cuando el menor cumpla que su determinante sea distinto de cero), pero lo importante es estudiar el rango. (390-397)

Saber qué dejarles de deberes (ejercicios sobre temas que han visto, para que practiquen y repasen los últimos temas vistos en clase). (398-401)

CPG
Acercarse a revisar lo que han hecho los estudiantes y cómo lo han hecho. Hacer algunas preguntas a los estudiantes para mantener la atención de los estudiantes y saber los procedimientos que ellos usaron y los resultados que ellos obtuvieron en el primer apartado de este ejercicio. (219-401)

Forma de preguntar sus dudas a los estudiantes (Aly: *¿Queda claro esto?*). (237)

Forma de preguntar sus dudas a los estudiantes (Aly: *¿Esto lo entendéis todos?*). (311)

Invitarlos a que no sólo vean los ejercicios sino que los hagan. Los motiva invitándolos a que los hagan para que se equivoquen y así aprendan. (398-401)

Evento de Término: Aly terminó de hacer el primer apartado de este ejercicio y se terminó la clase.

IV.1.4. Cuarto acercamiento al análisis de la información

Una vez obtenidos los subdescriptores de los subdominios del CME plasmados en las modelaciones del proceso de enseñanza de cada profesora en el tercer acercamiento, el cuarto acercamiento es la fase de construcción de nuevos descriptores y refinamiento de los identificados en el primer acercamiento al análisis, así como de la verificación de que la información de los subdescriptores corresponda a esos descriptores en su totalidad. En esta fase se van puliendo primordialmente de manera simultánea el primer y tercer acercamiento al análisis, aspirando a la calidad de estudios cualitativos. De este acercamiento obtuvimos una clasificación refinada y etiquetada de descriptores de los subdominios del CME (etiquetamos a cada descriptor en los distintos subdominios, por ejemplo en el conocimiento común del contenido fuimos poniendo etiquetas CCC1, CCC2, etc.; similarmente, en el caso del conocimiento especializado del contenido CEC1, CEC2, etc.; y así sucesivamente para los otros subdominios, para ordenar y sistematizar la información y con ello facilitar su manejo).

IV.1.5. Quinto acercamiento al análisis de la información

En el quinto acercamiento, ya con la clasificación refinada de descriptores obtenida en el cuarto acercamiento al análisis, intentamos codificar los subdescriptores de los subdominios del CME plasmados en las modelaciones del proceso de enseñanza de cada profesora (en el tercer acercamiento al análisis) poniendo la etiqueta del descriptor correspondiente (etiquetas obtenidas del cuarto acercamiento) a cada subdescriptor. Además, volvíamos a verificar que la adaptación de la información evidenciada de la práctica de las dos profesoras fuera la recogida en los subdescriptores y que a su vez la etiqueta colocada a cada uno de esos subdescriptores correspondiera adecuadamente a esos descriptores en su totalidad.

De este acercamiento obtenemos los subdescriptores de los subdominios del CME ya codificados.

Por ejemplo, en el caso de la primera modelación del proceso de enseñanza de la profesora Emi, en el primer subdominio del CME:

Conocimientos en acción:

CCC
CCC1. Saber la definición de una matriz. (1-231)

CCC2. Saber usar términos y notación matemática que corresponden al concepto de matriz. (1-231)
…

Para no ser tan repetitivos al presentar cosas tan parecidas aquí y luego en el apartado V.1.2 del siguiente capítulo (Resultados, V.1.2.1. y V.1.2.2.), consideramos conveniente presentarlos ya directamente en el apartado V.1.2. Cabe mencionar que allí, mostramos los subdescriptores acomodados en el correspondiente descriptor etiquetado, organizados por orden cronológico (conforme fueron apareciendo en las modelaciones del proceso de enseñanza de cada profesora en el tercer acercamiento al análisis de la información), a su vez, cada descriptor está situado en cada subdominio del CME por subtema, para cada uno de los dos casos (Emi y Aly).

Es decir, continuando con el ejemplo anterior, en el caso de Emi, para el primer subtema, en el apartado V.1.2. aparece de la siguiente forma:

Matrices

Descriptores del **conocimiento común del contenido**:

CCC1. Saber la definición del concepto, regla, propiedad, teorema o método que presenta.

[1.1] Saber la definición de una matriz. (1-231)

…

CCC2. Saber usar términos y notación matemática (que aparece en las definiciones formales). [1.1] (1-231)

[1.1] Saber usar términos y notación matemática que corresponden al concepto de matriz. (1-231)

…

Matrices es el nombre del subtema, **CCC1** y **CCC2** son las etiquetas del descriptor "Saber la definición del concepto, regla, propiedad, teorema o método que presenta" y "Saber usar términos y notación matemática (que aparece en las definiciones formales)", respectivamente. El [1.1] significa que ese descriptor corresponde al episodio [1.1] y el subdescriptor del **CCC1** es "Saber la definición de una matriz" y el subdescriptor del **CCC2** es "Saber usar términos y notación matemática que corresponden al concepto de matriz".

Ese desarrollo lo hicimos para el caso de Emi y luego para el caso de Aly. Para cada subtema, en cada subdominio del CME escribíamos cada descriptor (etiquetado) con sus correspondientes subdescriptores.

IV.2. Análisis de los cuestionarios, las entrevistas y las notas de campo.

Los cuestionarios, la entrevista y las notas de campo son fuentes secundarias de información en nuestro estudio. Para analizarlos, con base en las respuestas plasmadas por las profesoras directamente en los cuestionarios, las transcripciones de las entrevistas y las notas de campo registradas, identificamos elementos que nos dieran indicio de alguno de los distintos subdominios del CME o aspectos que nos ayudaran a comprender alguno(s) de los descriptores que obtuvimos para cada subdominio y a su vez a entender los propios subdominios. Además, estos instrumentos de recogida de información nos aportan información a la hora de triangular los resultados.

En el siguiente capítulo presentamos los resultados de la investigación.

CAPÍTULO V. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

[1] Por cuestiones de importancia y presentación, consideramos pertinente pasar todo el apartado **V.1.1.** a la sección de Anexos (ANEXO VII).

El apartado **V.1.1.** está en la sección de Anexos (ANEXO VII).

V.1.2. Presentación del agrupamiento de los subdescriptores en descriptores, ubicados en cada subdominio del CME por subtema, para el caso de Emi y enseguida para el caso de Aly

V.1.2.1. Para el caso de Emi

Matrices

De los aspectos del **conocimiento común del contenido,** podemos abstraer los siguientes descriptores en términos más generales:

CCC1. Saber la definición del concepto, regla, propiedad, teorema o método que está presentando. [1.1] (1-231); [1.2] (258-364), (284-287), (288-302), (309-313), (351-356); [1.3] (391-394), (444-446), (447-463), (464-472), (483-486), (511-528), (539-548), (559-561), (581-582), (609-610), (612-613); [3.1] (12-49); (186-188); [4.3] (122-133), (164-165); [4.4] (483-485).

[1.1] Saber lo que es una matriz (definición). (1-231)

[1.2] Saber que en una matiz de dimensión mxn, m y n son números naturales. (247-268); (258-364)

[1.2] Saber que las matrices se denotan con letras mayúsculas y sus elementos con letras minúsculas. (284-287)

[1.2] Saber que los elementos de la matriz tienen la forma a_{ij} con i=1, 2,…, m y j=1, 2,…, n y que si el orden de una matriz es mxn, entonces m indica el número de filas y n el número de columnas. (288-302)

[1.2] Saber que en a_{ij}, los subíndices ij indican la posición del elemento en la matriz, la fila y la columna respectivamente. (309-313)

[1.2] Saber que los elementos de la matriz son números reales. (351-356)

[1.3] Saber lo que es una matriz cuadrada (matriz que tiene el mismo número de filas que de columnas). (391-394)

[1.3] Saber la definición de diagonal principal de una matriz (elementos que ocupan una posición en la que el número de fila coincide con el número de columna). (444-446)

[1.3] Saber lo que es una matriz fila (la que tiene una sola fila). (447-463)

[1.3] Saber lo que es una matriz columna (la que tiene una sola columna). (464-472)

[1.3] Saber lo que es una matriz nula (aquella en la que todos sus elementos sean cero). (483-486)

[1.3] Saber lo que es una matriz triangular superior (matriz cuadrada en la que todos los elementos que están situados por encima de la diagonal principal son cero). (511-528)

[1.3] Saber lo que es una matriz triangular inferior (matriz cuadrada en la que todos los elementos que están situados por debajo de la diagonal principal son cero). (539-548)

[1.3] Saber la definición de matriz diagonal (matriz cuadrada en la que todos los elementos que están fuera de la diagonal principal son cero). (559-561)

[1.3] Saber lo que es una matriz escalar (los elementos de la diagonal principal son todos iguales). (581-582)

[1.3] Saber lo que es una matriz unidad (matriz cuadrada en la que todos los elementos de la diagonal principal son unos). (609-610)

[1.3] Saber distinguir entre una matriz escalar, diagonal y unidad. (612-613)

[3.1] Saber cómo se realiza el producto de dos matrices. (12-49)

[4.3] Saber la definición del producto de un escalar por una matriz. (122-133)

[4.3] Saber la definición del producto de un escalar por una matriz, la suma y sus propiedades en las matrices. (164-165)

[4.4] Saber en qué consiste la matriz identidad (en la diagonal principal unos y fuera ceros). (483-485)

CCC2. Saber usar términos y notación matemática (que aparece en las definiciones formales). [1.1] (1-231), (284-287), (288-302), (309-313), (316-323), [1.3] (416-428), (447-463), (464-472), (511-528); [4.4] (305-316); [4.5] (579-583); (590-591), (635-638).

[1.1] Saber usar términos y notación matemática que corresponden al concepto de matriz y saber hacer el ejemplo referente a Criptografía y Sociología. (1-231)

[1.2] Saber que las matrices se denotan con letras mayúsculas y sus elementos con letras minúsculas. (284-287)

[1.2] Saber que los elementos de la matriz tienen la forma a_{ij} con i=1, 2,…, m y j=1, 2,…, n y que si el orden de una matriz es mxn, entonces m indica el número de filas y n el número de columnas. (288-302)

[1.2] Saber que en a_{ij}, los subíndices ij indican la posición del elemento en la matriz, la fila y la columna respectivamente. (309-313)

[1.2] Saber escribir la forma genérica desarrollada de los elementos de una matriz de orden mxn $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$. (316-323)

[1.3] Saber escribir un ejemplo genérico de matriz cuadrada de orden 2 (400-413); y de orden 3. (416-428)

[1.3] Saber representar una matriz fila (la que tiene una sola fila) de forma genérica $\left(a_{11} \ \ldots \ a_{1n}\right)$. (447-463)

[1.3] Saber representar una matriz columna (la que tiene una sola columna) de forma genérica $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$. (464-472)

[1.3] Saber representar una matriz triangular superior (matriz cuadrada en la que todos los elementos que están situados por encima de la diagonal principal son cero) en forma genérica. (511-528)

[4.4] Saber la fórmula del producto de matrices. Saber la fórmula abreviada del producto de matrices usando el símbolo de Σ ($c_{ij}= \Sigma\ a_{ik}b_{kj}$ desde k=1 hasta n) . (305-316)

[4.5] Saber la notación matemática para denotar la transformación elemental de cambiar una fila por otra ($F_i \rightarrow F_j$). (579-583); (590-591)

[4.5] Saber la notación matemática para denotar la transformación elemental de sumar a una fila otra multiplicada por un número (F_i+aF_j). (635-638)

CCC3. Saber que la notación es muy importante en matemáticas. [1.2] (234-235), (241-244).

[1.2] Saber que la notación es muy importante en matemáticas. Que en una matriz, a diferencia de una tabla, es mejor decir elementos que datos y que la matriz se denota con paréntesis. (234-235); (241-244)

CCC4. Saber la operatividad, propiedades (en cuanto a su uso), utilidad o aplicación de un concepto. [1.1.1] (94-102); [1.1.1] (120-125); [1.1.2] (35-231); [1.2] (357-387); [3.1] (55-96), (153-171), (186-188), (202-218); [3.2] (359-381); [4.2] (46-59), (66-74), (79-88), (100-109); [4.3] (143-146); [4.4] (195-346), (389-396), (435-439), (486-488), (534-539); [4.5] (576-577), (596-598), (585-594), (600-609), (613-615), (616-626), (628-634), (641-661), (735-784), (799-809), (834-843), (850-851).

[1.1.1] Saber multiplicar matrices, aunque en este caso Emi se despista y comete un error numérico escribe 119 y debe ser 123 (el 123 es obtenido de (34)(2)+(11)(5)). (94-102)

[1.1.1] Saber la operatividad de las matrices (producto de matrices XA=B y obtener $X=BA^{-1}$) y saber la utilidad de la matriz inversa (para descifrar un mensaje en un ejemplo de Criptografía). En el ejemplo, Emi no obtiene la matiz inversa (pues por el momento no es el objetivo) y sólo comenta su funcionalidad (ayudar a descifrar el mensaje) en este ejemplo. (120-125)

[1.1.2] Saber que las matrices tienen aplicación en varios campos, en particular en sociología y en economía. (35-231)

[1.2] Saber en una matriz de 4x5:
1. El número de filas y columnas que tiene esa matriz.
2. Que los elementos de la matriz pueden ser enteros y fraccionarios.
3. Que para localizar un elemento sólo hay que contar la fila y la columna para conocer su posición. (357-387)

[3.1] Saber efectuar el producto de dos matrices cuadradas de orden dos, con números concretos. (55-96)

[3.1] Conocer cómo obtener el orden de una matriz (contando las filas y las columnas que tiene). (153-171), (186-188)

[3.1] Saber efectuar el producto de dos matrices (una de orden 1x4 por otra de 4x1) con números concretos y por ello saber que la respuesta de E3 es correcta (E3 le dice cómo se efectuó el producto y el resultado de la matriz producto). (202-218)

[3.2] Saber calcular el producto de dos matrices cuadradas de orden tres, a pesar de que Emi reconoce que se despistó cuando calcularon el primer elemento de la tercera fila de la matriz producto, pues el que habían calculado era el tercer elemento de la tercera fila y lo habían anotado como primer elemento de esa fila. (359-381)

[4.2] Saber la operatividad de la propiedad asociativa para la suma de las matrices. (46-59)

[4.2] Saber la operatividad de la matriz nula en matrices (aquella en la que todos sus elementos son cero). (66-74)

[4.2] Saber la operatividad de la matriz opuesta en matrices. (79-88)

[4.2] Saber la operatividad de la propiedad conmutativa para la suma de las matrices. (100-109)

[4.3] Saber por qué se cumple la propiedad $\lambda(A+B)= \lambda A+ \lambda B$ (por como están definidas la suma de matrices y el producto por un número real). (143-146)

[4.4] Saber cómo se hace el producto de dos matrices. (195-346)

[4.4] Saber la operatividad de la propiedad distributiva en matrices, es decir, que $A(B+C)=AB+AC$ ó $(A+B)C=AC+AB$. (389-396)

[4.4] Saber que en el producto de matrices no se cumple en general la propiedad conmutativa. (435-439)

[4.4] Saber aplicar $AI=IA=A$. (486-488)

[4.4] Saber que para calcular la matriz inversa será necesario hacer varios cálculos y no sólo una división o fracción como en el caso del inverso multiplicativo en los números reales. (534-539)

[4.5] Saber que al hacer la transformación elemental de cambiar una fila por otra, están cambiando la matriz, ya no es la misma matriz inicial. (576-577); (596-598)

[4.5] Saber realizar la transformación elemental de intercambiar dos filas en una matriz. (585-594)

[4.5] Saber que en una matriz, con un número de filas mayor que dos, las filas se pueden intercambiar entre ellas mediante transformaciones. (600-609)

[4.5] Saber que al hacer la transformación elemental de multiplicar toda una fila por un mismo número, se realiza dicha transformación sólo a esa fila y no a toda la matriz. (613-615)

[4.5] Saber aplicar la transformación elemental de multiplicar toda una fila por un mismo número en un ejemplo concreto (una matriz de orden 2x2). (616-626)

[4.5] Saber la utilidad de las transformaciones elementales: 1) Hallar la matriz inversa, 2) Determinar el rango de una matriz y 3) Resolver sistemas de ecuaciones. (628-634)

[4.5] Saber aplicar la transformación elemental de sumar a una fila otra multiplicada por un número en un ejemplo concreto (una matriz de orden 2x2). (641-661)

[4.5] Saber hacer los cambios y las transformaciones elementales necesarias para obtener la inversa, en sí, saber aplicar el método de Gauss-Jordán. (735-784); (799-809); (834-843); (850-851)

De los aspectos del **conocimiento especializado del contenido,** podemos abstraer los siguientes descriptores en términos más generales:

CEC4. Saber la causa matemática de los errores comunes de los estudiantes. [1.2] (234-235); [4.4] (556-562).

[1.2] Saber que al expresar el lenguaje matemático el error de los estudiantes puede provenir de la falta de precisión en el lenguaje en la matemática escolar. Saber que expresar el pensamiento matemático con un lenguaje adecuado tiene gran peso. En este caso, Emi les precisa que cuando se hable de matriz se hablará de elementos y no de datos. (234-235)

[4.4] Saber que al calcular la matriz inversa de otra, el error de los estudiantes puede provenir de la extensión del inverso multiplicativo en los números reales a la matriz inversa, en cuanto a que pueden pensar que como todos los números reales excepto el cero tienen inverso multiplicativo, en las matrices sea sólo la matriz nula la que no tenga inversa, pero en las matrices, además de la matriz nula (que sería similar al cero en los reales), habrá otras matrices que no tengan inversa. (556-562)

CEC2. Saber los pasos ocultos: conocer la procedencia y las razones matemáticas por las que funcionan los procedimientos. [4.4] (350-366).

[4.4] Saber que por la propia forma de hacer las operaciones, es decir, por la propia forma en que están definidas las operaciones con matrices, habrá algunas propiedades de los números reales que se trasmitan al producto de matrices y otras no. (350-366)

CEC1. Saber el significado de los conceptos. [4.4] (411-419).

[4.4] Saber que la multiplicación de matrices es una operación binaria, y por tanto en caso de que haya que multiplicar tres matrices, se debe anotar paréntesis o simplemente tomar en cuenta que se debe hacer primero el producto de dos matrices y luego el resultado por la otra matriz, es decir, saber que no hay forma de multiplicar tres matrices simultáneamente. (411-419)

De los aspectos del **horizonte matemático,** podemos abstraer los siguientes descriptores en términos más generales:

HM1. Conocer las similitudes (las relaciones) entre varios conceptos matemáticos de un mismo tema o unidad. [1.1.1] (13-34).

[1.1.1] Capacidad de relacionar varios conceptos matemáticos hasta llegar al deseado.
Álgebra → Sistemas de ecuaciones → Matrices → Tipos de ejercicios → Problemas→ Grafos → Matriz. (13-34)

HM2. Saber cómo un contenido está relacionado con otro más general (incluso aunque no aborde esa forma más general en ese grupo porque el programa no lo incluye). [4.3] (169-187).

[4.3] Emi les anuncia que este tema está relacionado con el de “estructuras algebraicas”, que no se ve en esta especialidad de bachillerato (Ciencias Sociales) pero sí en el Científico Tecnológico. (169-187)

De los aspectos del **conocimiento del contenido y estudiantes,** podemos abstraer los siguientes descriptores en términos más generales:

CC-Es1. Saber escuchar e interpretar el conocimiento o pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje (común o en proceso de adquisición del nuevo concepto –mezcla de lenguaje común con matemático). [1.1.1] (1-12); [1.2] (232-239).

[1.1.1] Saber escuchar e interpretar el pensamiento que expresan los alumnos en su lenguaje usual. En este caso, Emi pregunta qué es lo que recuerdan del tema anterior (sobre el planteamiento de problemas de sistemas de ecuaciones), E1 contesta que había que poner los datos en una especie de tabla y Emi completa esa respuesta traduciendo y transfiriendo lo que dijo E1 (Emi: *Que cuando nos plantean un problema tú quieres decir que es útil colocar los datos no de cualquier manera sino en una tabla que nos facilita la toma de datos y luego el planteamiento del problema* - Emi voltea a ver a E1 y le pregunta - *¿No es así?*). (1-12)

[1.2] Interpretar las respuestas de los estudiantes y guiarlas para llegar a las palabras que ella quiere escuchar, por ejemplo: “¿En lugar de datos decimos elementos?” Pues pretende que los estudiantes aprendan a ir usando el vocabulario adecuado matemáticamente para las matrices, en particular, en la definición de matriz. (232-239)

CC-Es2. Saber las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre el contenido matemático. [1.2] (348-350); [1.3] (434-439), (585-589).

[1.2] Saber las necesidades de los estudiantes, en este caso Emi sabe que E9 puede tener problemas y acude a ella. Emi anticipa el problema de E9, en este caso, Emi se acerca a E9 para mostrarle en el libro de E9 - en Braille- el ejemplo que se va a hacer. (348-350)

[1.3] Saber las dificultades y necesidades de los estudiantes. En este caso Emi anticipa que E9 por su deficiencia visual, podría tener problemas para entender o seguir lo que Emi va explicando (matriz cuadrada y diagonal principal), por ello se acerca con E9 y cuando Emi verifica que E9 va siguiendo lo que ella ha explicado hasta ese momento, entonces Emi continúa explicando en la pizarra. (434-439)

[1.3] Saber las dificultades y necesidades de los estudiantes. En este caso Emi prevé que E9 por su deficiencia visual, podría tener problemas para entender y seguir la explicación de Emi, por eso ella se acerca a E9, para ayudarla a localizar este ejemplo en las notas que ella le prepara a E9 – algunas veces en Braille-, Emi apoya el dedo de E9 y le va señalando con su dedo, *está es la matriz unidad que vamos a ver ahora y si todos los números son distintos diagonal y si todos son iguales escalar*. Y cuando Emi verifica que E9 va siguiendo lo que ella ha explicado hasta ese momento, entonces Emi continúa explicando en la pizarra. (585-589)

CC-Es3. Prever la confusión que pudiera tener el alumno con algún aspecto específico del contenido que se esté viendo en clase. [3.2] (400-406); [4.4] (423-427).

[3.2] Saber los errores comunes que pueden cometer los estudiantes al hacer el producto de dos matrices (multiplicar mal, sumar mal o confundirse de fila y columna). (400-406)

[4.4] Prever que los estudiantes se pueden confundir si Emi anota el orden de cada una de las matrices, al anotar las propiedades del producto de matrices, por ello no lo anota y les aclara que se supone que las matrices tienen el orden necesario para efectuar el producto. (423-427)

CC-Es4. Prever (anticipar) que los estudiantes no saben o no recuerdan un concepto o propiedad matemática. [4.4] (430-434).

[4.4] Prever que algún estudiante no sepa o no recuerde en qué consiste la propiedad conmutativa en los números reales. (430-434)

CC-Es5. Prever (anticipar) que los estudiantes se pueden quedar con una imagen o idea inadecuada del contenido. [4.4] (461-479), (556-562).

[4.4] Prever que los estudiantes se puedan hacer/quedar con la imagen inadecuada de que en el producto de matrices la conmutatividad no se da porque su orden no permite hacer el producto al conmutarlos y por ello, Emi les comenta que aún y cuando las matrices sean cuadradas, aunque el orden permita hacer el producto de las matrices conmutadas, en general el resultado será distinto. (461-479)

[4.4] Prever que los estudiantes podrían pensar, inadecuadamente, por analogía entre el inverso multiplicativo en los números reales y la matriz inversa, que sólo la matriz nula no tiene inversa. (556-562)

CC-Es6. Saber lo que a los estudiantes les parecerá cansado y aburrido de un contenido matemático específico. [4.5] (568-569)

[4.5] Emi sabe que la teoría cansa y aburre a los estudiantes. (568-569)

CC-Es7. Saber que los estudiantes pueden equivocarse al hacer determinado cálculo o de un número o de un signo (más leve), provocado por un despiste al hacer una(s) operación(es)/transformación(es), o por no dominar el contenido que se les está presentando. [3.2] (400-406), [4.5] (642-646), (730-732); (744-746).

[3.2] Saber los errores comunes que pueden cometer los estudiantes al hacer el producto de dos matrices (multiplicar mal, sumar mal o confundirse de fila y columna). (400-406)

[4.5] Saber que los estudiantes se pueden equivocar al hacer la transformación elemental de sumar a una fila otra multiplicada por un número, es decir, que no se fijen bien en cuál es la fila que van a cambiar. (642-646)

[4.5] Saber que los estudiantes se pueden equivocar al hacer las transformaciones elementales para calcular la matriz inversa y les remarca que tienen que realizar las transformaciones elementales a las dos matrices (A|I) simultáneamente, por ejemplo, si cambian la fila de A entonces hay que cambiar la fila completa, incluyendo la fila correspondiente de I. (730-732); (744-746)

De los aspectos del **conocimiento del contenido y enseñanza**[2], podemos abstraer los siguientes descriptores en términos más generales:

Ejemplos

CC-En1. Saber con qué ejemplo o ejercicio empezar, cuándo y cuáles usar para enfatizar, reforzar o generalizar cierta idea. [1.1] (35-231); [1.2] (303-309); [1.3] (400-428), (483-489), (562-569), (582-584), (649-683); [3.1] (104-236); [3.2] (243-267); [4.4] (442-454); [4.5] (625-626).

[1.1] Saber que empezar con el ejemplo de Criptografía y con el de Sociología para enfatizar/enfocar el concepto de matriz. (35-231)

[1.2] Saber hacer un ejemplo de una matriz de orden 5x4 para hacerles notar que la matriz tendría en total 20 elementos distribuidos en 5 filas y 4 columnas. (303-309)

---

[2] En este subdominio pudimos establecer varias categorías asociadas con un “issue”: *Ejemplos; ayudas; gestión de la participación (preguntas, respuestas, preguntas y respuestas, para que hagan los ejercicios); traducir; hacer notar/remarcar/destacar; alertar/prevenir; preparar actividades; forma de presentarlo/representarlo*.

[1.3] Saber hacer un ejemplo genérico de una matriz cuadrada de orden 2 y luego una de orden 3, esto último para hacer énfasis en la notación, en la forma genérica en la que están dispuestos los elementos y en lo que significan los subíndices. (400-428)

[1.3] Saber qué ejemplos usar para hacerles notar lo que es una matriz nula, para hacer énfasis en las distintas dimensiones o tamaños que puede tener una matriz nula y luego escribir en la pizarra una matriz nula de orden nxn. (483-489)

[1.3] Saber hacer un ejemplo de una matriz diagonal de orden 3x3 para que los estudiantes visualicen la forma que tiene una matriz diagonal. (562-569)

[1.3] Saber hacer un ejemplo de una matriz escalar de orden 3x3 para hacerles notar la forma que tiene para que los estudiantes visualicen la forma que tiene una matriz diagonal. (582-584)

[1.3] Saber hacer un ejemplo de matriz traspuesta, para luego explicarles cómo se obtiene la matriz traspuesta de una matriz. En este caso Emi se "inventa" un ejemplo con una matriz A de orden 2x3 con valores concretos (es decir, no con la matriz genérica de orden 2x3, para que con el ejemplo les quede claro a los estudiantes como trasponer una matriz y entonces el orden de A^t es 3x2. (649-683)

[3.1] Saber proponer un ejercicio que ella misma se "inventa", para luego pedirles que escriban quien va a ser la matriz A, la matriz B, ver si se puede efectuar el producto AB y en ese caso qué significado tiene el producto. Luego Emi empieza a supervisar lo que van haciendo los estudiantes. Enseguida Emi regresa a la pizarra para explicar en la pizarra los resultados de los ejercicios, Emi le da un "empujoncito" a E8 para que le diga los elementos de la matriz A, posteriormente Emi les hace notar de qué orden es esa matriz. Después Emi pide a E4 le diga los elementos y el orden de la matriz B. Luego les hace notar que el orden de A es 1x4 y de B es 4x1 y por tanto se puede hacer el producto AB, con ayuda de E3, Emi escribe el resultado de AB y les comenta el significado del resultado en este ejemplo (significa el número de combinaciones de vuelos desde Sevilla a Nueva York). (104-236)

[3.2] Saber qué ejercicios proponerles para que practiquen cómo se hace el producto de dos matrices. a) En el primer ejercicio propone dos matrices cuadradas pero de orden mayor, de orden 3. b) En el segundo ejercicio propone la matriz identidad de orden tres y otra matriz de orden 3x3 para que noten lo que le pasa a una matriz que es multiplicada por la matriz identidad. c) En el tercer ejercicio les propone dos matrices que no son cuadradas, una de orden 2x3 y la otra de orden 3x2 para que también practiquen hacer el producto de dos matrices que no son cuadradas. (243-267)

[4.4] Saber qué ejemplo usar para hacerles notar que simplemente al cambiar el orden de las matrices, ya no es posible hacer el producto, si A tiene orden 2x3 y B tiene orden 3x4, entonces se puede hacer AB pero no BA. Es decir, Emi les da un ejemplo para mostrar fácilmente sin necesidad de hacer una demostración formal de que no se cumple la conmutatividad en el producto de matrices (442-454)

[4.5] Saber qué ejemplo usar para hacerles notar (en un ejemplo concreto de una matriz de orden 2x2) que al hacer la transformación elemental de multiplicar toda una fila por un mismo número, afecta sólo a esa fila y a la otra fila no le pasa nada. (625-626)

CC-En2. Saber que la aplicación del concepto en un ejemplo le es útil para inducir luego la definición del concepto. [1.1.1] (35-125); [1.1.2] (136-223).

[1.1.1] Saber que la aplicación de matrices en el ejemplo de Criptografía le es útil para introducir luego la definición de matriz. (35-125)

[1.1.2] Saber que la aplicación de matrices en un ejemplo cercano de estudios sociológicos le es útil para hacer ver la aplicabilidad de las matrices (del contenido matemático) en sociología. Saber que todo esto puede coadyuvar a que el alumno se familiarice con el concepto y tenga una mayor comprensión del concepto para aplicarlo y para que el estudiante vea que el concepto de matriz puede aparecer en distintos ámbitos, por ejemplo en estudios sociológicos. (136-223)

CC-En3. Saber que una de las potencialidades de un ejemplo, en concreto al desarrollarlo, es utilizarlo para destacar los aspectos relevantes del contenido matemático que pretende enseñarles ese día en clase. [1.2] (357-387); [1.3] (395-399), (400-428), (649-683); [4.4] (442-454); [4.5] (625-626), (730-732); (744-746).

[1.2] Saber que el ejemplo de la matriz de 4x5 puede usarlo para destacar:

1. El número de filas y columnas que tiene esa matriz.
2. Que los elementos de la matriz pueden ser enteros y fraccionarios.
3. Cómo localizar un elemento sabiendo los subíndices, es decir, hacerles ver que para localizar un elemento sólo hay que contar la fila y la columna para conocer su posición. (357-387)

[1.3] Saber usar el ejemplo para hacerles notar, al empezar a presentar las matrices cuadradas que hasta ese momento habían trabajado con matrices rectangulares de orden mxn pero ahora en las matrices cuadradas como el número de filas coincide con el número de columnas, entonces no hablarán de orden mxn sino que sólo se dirá de orden n. (395-399)

[1.3] Saber utilizar el ejemplo para abordar un ejemplo genérico de una matriz cuadrada de orden 2 y luego una de orden 3, esto último para hacer énfasis en la notación, en la forma genérica en la que están dispuestos los elementos y en lo que significan los subíndices. (400-428)

[1.3] Saber usar un ejemplo de matriz traspuesta para explicarles cómo se obtiene la matriz traspuesta de una matriz. En este caso Emi se "inventa" un ejemplo con una matriz A de orden 2x3 con valores concretos (es decir, no con la matriz genérica de orden 2x3, para que con el ejemplo les quede claro a los estudiantes como trasponer una matriz y entonces el orden de A^t es 3x2. (649-683)

[4.4] Saber usar un ejemplo para mostrar fácilmente sin necesidad de hacer una demostración formal de que no se cumple la conmutatividad en el producto de matrices, Emi les da un ejemplo para hacerles notar que simplemente al cambiar el orden de las matrices, ya no es posible hacer el producto, si A tiene orden 2x3 y B tiene orden 3x4, entonces se puede hacer AB pero no BA. (442-454)

[4.5] Saber usar un ejemplo para hacerles notar en un ejemplo concreto de una matriz de orden 2x2 que al hacer la transformación elemental de multiplicar toda una fila por un mismo número, afecta sólo a esa fila y a la otra fila no le pasa nada. (625-626)

[4.5] Saber utilizar el ejemplo para remarcarles que tienen que realizar las transformaciones elementales a las dos matrices (A|I) simultáneamente, por ejemplo, si cambian la fila de A entonces hay que cambiar la fila completa, incluyendo la fila correspondiente de I. (730-732); (744-746)

CC-En4. Saber usar ejemplos con datos concretos, en lugar de desarrollar propiedades de forma general o con ejemplos genéricos, para explicar el contenido. [1.3] (649-683); [4.4] (442-454); [4.5] (625-626), (699-722).

[1.3] Saber usar un ejemplo de matriz traspuesta con números definidos, luego de explicarles cómo se obtiene la matriz traspuesta de una matriz. En este caso Emi se "inventa" un ejemplo con una matriz A de orden 2x3 con valores concretos (es decir, no con la matriz genérica de orden 2x3, para que con el ejemplo les quede claro a los estudiantes como trasponer una matriz y entonces el orden de A^t es 3x2. (649-683)

[4.4] Saber usar un ejemplo para mostrar fácilmente sin necesidad de hacer una demostración formal de que no se cumple la conmutatividad en el producto de matrices, Emi les da un ejemplo para hacerles notar que simplemente al cambiar el orden de las matrices, ya no es posible hacer el producto, si A tiene orden 2x3 y B tiene orden 3x4, entonces se puede hacer AB pero no BA. (442-454)

[4.5] Saber usar un ejemplo para hacerles notar en un ejemplo concreto de una matriz de orden 2x2 que al hacer la transformación elemental de multiplicar toda una fila por un mismo número, afecta sólo a esa fila y a la otra fila no le pasa nada. (625-626)

[4.5] Saber usar un ejemplo para describir la estrategia para calcular la matriz inversa en un ejemplo que ella se ha inventado con una matriz de 2x2 con el método de Gauss-Jordán, empezando con una pregunta que ella misma contesta. (699-722)

CC-En5. Saber que al explicar un ejemplo o un ejercicio, es importante que los estudiantes vean que los resultados obtenidos del ejemplo o ejercicio tienen un significado concreto. [3.1] (149-152), (237-241).

[3.1] Saber que al explicar un ejemplo para interpretar la matriz A que acaba de escribir es muy importante que los estudiantes vean que los elementos de esa matriz indican el número de vuelos que hay desde la ciudad de Sevilla a cada una de las ciudades que han llamado intermedias. (149-152)

[3.1] Saber que al explicar un ejemplo sobre el producto de matrices es muy importante que los estudiantes vean que el resultado del producto tiene en algunos casos un significado concreto. A pesar de que en este ejemplo que ella se inventó para tal fin puede resolverse sin necesidad de usar matrices, pues es un ejemplo en el que se obtuvo el número de combinaciones de vuelos de Sevilla a Nueva York. (237-241)

CC-En6. Saber qué ejercicios dejarles de deberes para que practiquen. [3.2] (464-466); [4.5] (882-887).

[3.2] Saber qué ejercicios dejarles de deberes (unos similares a los hechos en clase). (464-466)

[4.5] Saber qué dejarles de deberes. En este caso, dada la situación de dificultades que se suscitó al hacer el ejemplo de hallar la inversa, Emi decide dejarles deberes sobre las propiedades de las operaciones con matrices pero no de cálculo de matriz inversa. (882-887)

Ayudas

CC-En7. Saber qué ayudas dar a los estudiantes en situaciones de confusión o dificultad, para que puedan dar solución a un ejercicio o resolver un problema. [3.1] (104-236); [3.2] (268-274), (275-281), (368-381).

[3.1] Saber qué ayudas dar a los estudiantes en situaciones de confusión o dificultad. Proponerles un ejercicio que ella misma se "inventa", Emi les pide que escriban quien va a ser la matriz A, la matriz B, ver si se puede efectuar el producto AB y en ese caso qué significado tiene el producto. Luego Emi empieza a supervisar lo que van haciendo los estudiantes. Enseguida Emi regresa a la pizarra para explicar en la pizarra los resultados de los ejercicios, Emi le da un "empujoncito" a E8 para que le diga los elementos de la matriz A, posteriormente Emi les hace notar de qué orden es esa matriz. Después Emi pide a E4 le diga los elementos y el orden de la matriz B. Luego les hace notar que el orden de A es 1x4 y de B es 4x1 y por tanto se puede hacer el producto AB, con ayuda de E3, Emi escribe el resultado de AB y les comenta el significado del resultado en este ejemplo (significa el número de combinaciones de vuelos desde Sevilla a Nueva York). (104-236)

[3.2] Saber qué ayudas dar a los estudiantes en situaciones de confusión o dificultad. Acercarse a los estudiantes que le piden ayuda para poder empezar a hacer el ejercicio que les ha pedido que hagan. E1 no sabía cómo empezar a hacer el producto, pide ayuda a Emi, y Emi le comenta que tiene que multiplicar la primera fila por la primera columna y que luego tiene que ir multiplicando cada una de las filas por cada una de las otras columnas. (268-274)

[3.2] Saber qué ayudas dar a los estudiantes en situaciones de confusión o dificultad. Acercarse a los estudiantes que le piden ayuda para poder empezar a hacer el ejercicio que les ha pedido que hagan. E13 no sabía cómo empezar a hacer el producto, pide ayuda a Emi, entonces E13 con su ayuda calcula los valores de la primera y segunda fila de la matriz producto, pero al llegar al cálculo de los valores de la tercera fila de la matriz producto, E13 se siente perdida con "tantas filas, columnas y sumas de productos", entonces Emi vuelve a rescatarla y finalmente ayuda a E13 hasta terminar de hacer el producto completo de esas dos matrices. (275-281)

[3.2] Saber qué ayudas dar a los estudiantes en situaciones de confusión o dificultad. Tras la segunda equivocación de E13 (de multiplicar sólo el 2 por cada elemento de la columna, y no multiplicar uno a uno, número-a-número de la fila por número-a-número de la columna) Emi finalmente le termina el ejercicio a E13 en su cuaderno. (368-381)

CC-En8. Saber que una "buena" estrategia para que los estudiantes comprendan o hagan un ejemplo, ejercicio o problema, consiste en explicarles o hacerles hincapié en lo que quiere que hagan y para qué quiere que lo hagan o simplemente explicarles de lo que trata el ejercicio o problema. [3.1] (129-132).

[3.1] Saber que es bueno comentarles lo que quiere que hagan en este ejemplo (Emi: … *tenéis que calcular A por B y después de calcular A por B, […] quiero que me digan qué significado tiene el producto*). (129-132)

Gestión de la participación.
Preguntas
CC-En10. Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático, para hacer ver a los estudiantes que la respuesta de un estudiante es equivocada y orientar la pregunta a la respuesta que el profesor(a) quiere escuchar. [1.2] (258-264).

[1.2] Saber qué preguntas formular para hacerles ver que es equivocada la respuesta de E3 y orientar la pregunta a la respuesta que quiere escuchar. En este caso, Emi habla de que una matriz tiene dimensión mxn y les pregunta qué tipo de números serán m y n. E3 contesta que son enteros y entonces Emi les pregunta si tendrá sentido que m y n fueran números negativos o decimales, a lo cual E8 contesta que son naturales y Emi le confirma a E8 que en efecto son naturales. (258-264)

CC-En11. Saber qué preguntas formular, no necesariamente a cierto estudiante, para presentar o mostrar específicamente lo más importante del contenido que está enseñando (algunas veces las contesta ella misma y otras los estudiantes). [1.1.1] (1-12); [1.2] (234-235), (268-275), (332-346); [1.3] (391-394), (464-472), (492-507), (624-648); [4.3] (119-133); [4.4] (350-366), (492-499), (517-533), (541-555), (556-562); [4.5] (642-646).

[1.1.1] Saber qué preguntas formular para transferir y orientar la respuesta del estudiante para conducir dicha respuesta a lo que ella explicará posteriormente. Emi acepta la respuesta de E1 y la completa utilizando términos o aspectos del contenido que usará posteriormente. En este caso, Emi pregunta qué es lo que recuerdan del tema anterior (sobre el planteamiento de problemas de sistemas de ecuaciones), E1 contesta que había que poner los datos en una especie de tabla y Emi completa esa respuesta traduciendo y transfiriendo lo que dijo E1 (Emi: *Que cuando nos plantean un problema tú quieres decir que es útil colocar los datos no de cualquier manera sino en una tabla que nos facilita la toma de datos y luego el planteamiento del problema* - Emi voltea a ver a E1 y le pregunta - *¿No es así?*). (1-12)

[1.2] Saber qué preguntas formular para aprovechar la respuesta de E7, aceptarla y completarla para dar una definición más precisa de matriz (Emi: *Decidme, ¿qué es una matriz?* E7: *Un conjunto de datos que se disponen en columnas*, Emi: *¿En lugar de datos decimos elementos?*, E7: *También*, Emi: *Sería prácticamente lo mismo pero más genérico, entonces es un conjunto ordenado de elementos dispuestos en filas y columnas*). (234-235)

[1.2] Saber qué preguntas hacer para transferir y orientar la respuesta del estudiante para llegar a lo que ella quiere (Emi: *¿Cuál es la matriz más pequeña? de tamaño*, E3: *mx1*, Emi: *¿mx1?, una columna, ¿1x1?*, E3: *Si*). (268-275)

[1.2] Saber qué preguntas hacer para orientar una respuesta correcta a un lenguaje matemático aceptado en la matemática escolar, es decir, atendiendo o enfocado a una convención matemática. En este caso E3 da una respuesta correcta respecto a la ubicación del elemento de la matriz con subíndices 2 y 3, E3 responde que ese elemento estaría en la tercera columna, segunda fila, pero Emi hace preguntas y orienta esa respuesta para que se vayan acostumbrando a decir primero el número de filas y luego el número de columna en concordancia con esa convención matemática. (332-346)

[1.3] Saber qué preguntas formular para transferir la respuesta de los estudiantes para orientarla, es decir, usar un lenguaje con conceptos matemáticos que le servirán posteriormente. En este caso, Emi acepta y completa la respuesta de E7 (Emi: *¿Qué será una matriz cuadrada*?, E7: *La que tiene forma de cuadrado*, Emi: *Muy bien, aquella matriz que tenga el mismo número de filas que de columnas eh*). (391-394)

[1.3] Saber qué preguntas formular (que muchas veces se las contesta ella y otras pocas los estudiantes) para ir definiendo y representando la matriz fila (447-463) y la matriz columna. (464-472)

[1.3] Saber qué preguntas hacer para ir guiando (orientando) las respuestas para usar la analogía del $0 \in \boldsymbol{R}$ y la matriz nula ($0 \in$ M) y hacerles notar la importancia, el papel que jugará la matriz nula en las operaciones con matrices, en particular, en la suma de matrices y para ello les recuerda el papel del 0 en la suma y producto en los números reales (que al sumarlo con otro número real lo deja invariante). (492-507)

[1.3] Saber qué preguntas formular para presentar el concepto de matriz traspuesta. Emi inicialmente usa la analogía de una "matriz" con una caja y de "traspuesta" con darle vuelta a la caja y luego se apoya de una figura geométrica: el rectángulo. Emi para presentar la matriz traspuesta les hace la pregunta: ¿Qué pasa si a una caja le doy una vuelta? Para que los estudiantes entiendan "mejor" la idea de lo que diferencia una matriz de su traspuesta. En seguida se apoya de figuras geométricas para representar el concepto de matriz traspuesta. Representa a una matriz de mxn con un rectángulo y sobre la altura del rectángulo escribe m filas y al lado contiguo n columnas y les pregunta: ¿Qué pasa si yo le doy vuelta al rectángulo? Luego Emi dibuja la nueva forma que tendría el rectángulo al darle vuelta, Emi mira a los estudiantes esperando respuesta y E7 responde que se cambian las filas por las columnas (respuesta que Emi quería escuchar). Y después de darles la caracterización de una matriz traspuesta (que lo único que se cambia es la posición de los elementos, es decir, se cambia a las filas por las columnas), vuelve a remarcarles que trasponer una matriz es lo mismo que cambiar el rectángulo, tumbarlo y ponerlo de pie. (624-648).

[4.3] Saber qué preguntas formular para explicarles la definición del producto de un número real por una matriz en lenguaje común. (119-133)

[4.4] Saber qué preguntas formular para hacerles notar por qué han visto en clase la fórmula abreviada para multiplicar dos matrices (en términos de hacerles ver que la fórmula es compleja, es decir, que no es tan sencillo cómo simplemente multiplicar número a número, como por ejemplo en el caso del producto de un escalar por una matriz). (350-366)

[4.4] Saber qué preguntas formular para terminar de presentarles la matriz identidad, Emi les comenta la analogía entre la matriz identidad en matrices y el 1 de los números reales. (492-499)

[4.4] Saber qué preguntas formular para hacerles notar que si existe A^{-1} entonces $A A^{-1}= A^{-1}A=I$. (517-533)

[4.4] Saber qué preguntas formular para hacerles notar la analogía entre el inverso multiplicativo en los números reales y la matriz inversa en cuanto a que la matriz nula no tiene inversa por la misma razón que el cero no tiene inverso multiplicativo, pues a.0=0 en los números reales y en matrices A.0=0 (este 0 en matrices es la matriz nula). (541-555)

[4.4] Saber qué preguntas formular para remarcarles la diferencia del inverso multiplicativo en los números reales y la matriz inversa en cuanto a que todos los números reales excepto el cero tienen inverso multiplicativo pero en las matrices, además de la matriz nula (que sería similar al cero en los reales), habrá otras matrices que no tengan inversa. (556-562)

[4.5] Saber qué preguntas formular para alertarlos de que cuando hagan la transformación elemental de sumar a una fila otra multiplicada por un número se fijen en cuál es la fila que van a cambiar. (642-646)

CC-En12. Saber qué preguntas formular para presentar un nuevo concepto, una nueva propiedad o una clasificación. [1.3] (685-713); [4.1] (13-17); [4.2] (46-65), (66-74), (79-88), (100-106); [4.3] (147-150); [4.4] (375-387), (500-502), (508-533); [4.5] (699-722).

[1.3] Saber qué preguntas formular para introducir un concepto. Emi pretende mediante una pregunta (¿Cuándo va a coincidir una matriz con su traspuesta?) introducir el concepto de matriz simétrica, pero E5 le hace una pregunta: ¿Cómo asegurarse de que sea la traspuesta? A lo cual Emi da la respuesta (comparando que las filas de una sean las columnas de la otra) y trata de reforzarla con un nuevo ejemplo, una matriz de 3x3. Es decir, Emi ya no avanza con el siguiente concepto sino que nuevamente retoma lo de la matriz traspuesta y hace otro ejemplo (ahora para una matriz cuadrada de orden 3). (685-713)

[4.1] Saber qué preguntas formulara para introducir las propiedades de las operaciones con matrices. (13-17)

[4.2] Saber qué preguntas formular para presentarles la propiedad asociativa para la suma de matrices, Emi les comenta la analogía de la propiedad asociativa en la suma de los números reales y en las matrices. (46-65)

[4.2] Saber qué preguntas formular para presentarles la matriz nula en la suma de matrices, Emi les comenta la analogía del elemento neutro en la suma de los números reales y en las matrices. (66-74)

[4.2] Saber qué preguntas formular para presentarles la matriz opuesta en la suma de matrices, Emi les comenta la analogía del elemento opuesto en la suma de los números reales y en las matrices. (79-88)

[4.2] Saber qué preguntas formular para presentarles la propiedad conmutativa para la suma de matrices, Emi les comenta la analogía de la propiedad conmutativa en la suma de los números reales. (100-106)

[4.3] Saber qué preguntas formular para comentarles una nueva propiedad. (147-150)

[4.4] Saber qué preguntas formular para presentarles la propiedad distributiva en matrices, Emi les comenta la analogía de la propiedad distributiva en matrices de los números reales. (375-387)

[4.4] Saber qué preguntas formular para presentarles la definición de matriz inversa, Emi les comenta la analogía entre la matriz inversa en matrices y la propiedad del inverso multiplicativo de los números reales. (500-502), (508-533)

[4.5] Saber qué preguntas formular para introducir un método. Emi les describe la estrategia para calcular la matriz inversa en un ejemplo que ella se ha inventado con una matriz de 2x2 con el método de Gauss-Jordán, empezando con una pregunta que ella misma contesta. (699-722)

CC-En13. Saber qué preguntas formular sobre el contenido para involucrar a estudiantes pasivos. [3.1] (67-96), (104-236), (139-148).

[3.1] Saber qué preguntas formular para considerar a estudiantes poco participativos. Una vez que Emi divide en filas la primera matriz y en columnas la segunda matriz (=)(||), Emi calcula el primer elemento, luego se dirige a un estudiante en específico para que calcule el segundo elemento de la matriz producto, luego a otro estudiante el tercer elemento y a otro el último elemento. (67-96)

[3.1] Saber qué preguntas formular para considerar a estudiantes pasivos. Proponerles un ejercicio que ella misma se "inventa", les pide que escriban quien va a ser la matriz A, la matriz B, ver si se puede efectuar el producto AB y en ese caso qué significado tiene el producto. Luego Emi empieza a supervisar lo que van haciendo los estudiantes. Enseguida Emi regresa a la pizarra para explicar en la pizarra los resultados de los ejercicios, Emi le da un "empujoncito" a E8 para que le diga los elementos de la matriz A, posteriormente Emi les hace notar de qué orden es esa matriz. Después Emi pide a E4 le diga los elementos y el orden de la matriz B. Luego les hace notar que el orden de A es 1x4 y de B 4x1 y por tanto se puede hacer el producto AB, con ayuda de E3, Emi escribe el resultado de AB y les comenta el significado del resultado en este ejemplo (significa el número de combinaciones de vuelos desde Sevilla a Nueva York). (104-236)

[3.1] Saber qué preguntas formular para involucrar a los estudiantes (que casi no participan) en la respuesta a este ejercicio (Emi: *A ver E8 me puedes decir cuáles son los elementos de la matriz A, vamos contando, ¿de Sevilla a Barcelona cuántos vuelos hay? Tres vuelos, entonces el primer elemento es 3, ¿de Sevilla a Dublín?*, E8: *Cero*, Emi: *Cero*). (139-148)

Respuestas

CC-En16. Saber qué respuestas de los estudiantes aceptar, cuáles interrumpir, cuáles ignorar o cuáles destacar, para alcanzar los objetivos de la enseñanza del contenido trazados por la profesora para esa clase. [1.1.1] (1-12); [1.2] (234-235), (268-275); [1.3] (391-394), (624-648), (701-713); [4.3] (119-133).

[1.1.1] Saber qué respuestas aceptar para alcanzar su objetivo. Emi acepta la respuesta de E1 y la completa utilizando términos o aspectos del contenido que usará posteriormente. En este caso, Emi pregunta qué es lo que recuerdan del tema anterior (sobre el planteamiento de problemas de sistemas de ecuaciones), E1 contesta que había que poner los datos en una especie de tabla y Emi completa esa respuesta traduciendo y transfiriendo lo que dijo E1 (Emi: *Que cuando nos plantean un problema tú quieres decir que es útil colocar los datos no de cualquier manera sino en una tabla que nos facilita la toma de datos y luego el planteamiento del problema* - Emi voltea a ver a E1 y le pregunta - *¿No es así?*). (1-12)

[1.2] Saber qué respuestas aceptar para alcanzar su objetivo. Aprovechar la respuesta de E7, aceptarla y completarla para dar una definición más precisa de matriz (Emi: *Decidme, ¿qué es una matriz?* E7: *Un conjunto de datos que se disponen en columnas*, Emi: *¿En lugar de datos decimos elementos?*, E7: *También*, Emi: *Sería prácticamente lo mismo pero más genérico, entonces es un conjunto ordenado de elementos dispuestos en filas y columnas*). (234-235)

[1.2] Saber transferir y orientar la respuesta del estudiante para llegar a lo que ella quiere (Emi: *¿Cuál es la matriz más pequeña? de tamaño*, E3: *mx1*, Emi: *¿mx1?, una columna, ¿1x1?*, E3: *Si*). (268-275)

[1.3] Saber transferir la respuesta de los estudiantes para orientarla, es decir, usar un lenguaje con conceptos matemáticos que le servirán posteriormente. En este caso, Emi acepta y completa la respuesta de E7 (Emi: *¿Qué será una matriz cuadrada*?, E7: *La que tiene forma de cuadrado*, Emi: *Muy bien, aquella matriz que tenga el mismo número de filas que de columnas eh*). (391-394)

[1.3] Saber qué respuestas aceptar para alcanzar su objetivo. Para presentar el concepto de matriz traspuesta, Emi inicialmente usa la analogía de una "matriz" con una caja y de "traspuesta" con darle vuelta a la caja y luego se apoya de una figura geométrica: el rectángulo. Emi para presentar la matriz traspuesta les hace la pregunta: ¿Qué pasa si a una caja le doy una vuelta? Para que los estudiantes entiendan "mejor" la idea de lo que diferencia una matriz de su traspuesta. En seguida se apoya de figuras geométricas para representar el concepto de matriz traspuesta. Representa a una matriz de mxn con un rectángulo y sobre la altura del rectángulo escribe m filas y al lado contiguo n columnas y les pregunta: ¿Qué pasa si yo le doy vuelta al rectángulo? Luego Emi dibuja la nueva forma que tendría el rectángulo al darle vuelta, Emi mira a los estudiantes esperando respuesta y E7 responde que se cambian las filas por las columnas (respuesta que Emi quería escuchar). Y después de darles la caracterización de una matriz traspuesta (que lo único que se cambia es la posición de los elementos, es decir, se cambia a las filas por las columnas), vuelve a remarcarles que trasponer una matriz es lo mismo que cambiar el rectángulo, tumbarlo y ponerlo de pie. (624-648).

[1.3] Saber qué respuestas aceptar para alcanzar su objetivo. Aceptar la respuesta de E5 (que la traspuesta también será una matriz cuadrada), la completa (les comenta que la traspuesta también será cuadrada y de orden 3) y les hace notar la estrategia para escribir la traspuesta (ir tomando cada fila de la matriz y anotarlas como columna de la traspuesta, respectivamente). (701-713)

[4.3] Saber qué respuestas aceptar para alcanzar su objetivo. Específicamente al explicarles la definición del producto de un número real por una matriz en lenguaje común. (119-133)

CC-En17. Saber cómo orientar una respuesta correcta a un lenguaje matemático aceptado en la matemática escolar, es decir, atendiendo o enfocado a una convención matemática. [1.2] (332-335); [3.2] (388-395).

[1.2] Saber cómo orientar una respuesta correcta a un lenguaje matemático aceptado en la matemática escolar, es decir, atendiendo o enfocado a una convención matemática. En este caso E3 da una respuesta correcta respecto a la ubicación del elemento de la matriz con subíndices 2 y 3, E3 responde que ese elemento estaría en la tercera columna, segunda fila, pero Emi orienta esa respuesta para que se vayan acostumbrando a decir primero el número de filas y luego el número de columna en concordancia con esa convención matemática. (332-335)

[3.2] Saber cómo orientar una respuesta para precisar el lenguaje, para que se acostumbren a localizar/ubicar un elemento: a) Indicando la posición exacta diciendo fila y columna y b) que sea en ese orden, primero la fila y luego la columna. (388-395)

CC-En18. Saber cómo aprovechar las respuestas incorrectas de los estudiantes para hacerles ver las consecuencias de éstas en el contenido matemático. [1.3] (599-608).

[1.3] Saber cómo aprovechar una respuesta incorrecta para hacer ver las consecuencias que eso conllevaría en el contenido. Emi toma en cuenta la respuesta de E3 a pesar de que no es correcta a lo que ella pregunta, pero aprovecha para hacer ver qué pasaría en el caso que plantea E3, es decir, que si en la diagonal principal de una matriz escalar en lugar de unos fueran ceros entonces sería la matriz nula. (599-608)

Traducir
CC-En25. Saber usar lenguaje común o más familiar a los estudiantes o una forma más explícita, más detallada, al explicar el contenido matemático para que los estudiantes lo comprendan “mejor”. [1.2] (247-268), (380-387); [1.3] (441-446), (529-538), (570-577), (585-589), (624-648); [4.3] (119-133), (132-133), (138-140), (161-163); [4.4] (397-399), (483-485).

[1.2] Saber usar la analogía de una caja para aproximarse más al lenguaje usual de los estudiantes, para que logren entender “mejor” lo que significa “tamaño de la matriz o dimensión de la matriz” y remarcarles que es importante la dimensión que tenga la matriz. (247-268)

[1.2] Saber cómo explicar el contenido en lenguaje usual. Una forma de saber localizar un elemento sabiendo los subíndices (comentarles que para conocer la posición del elemento a_{24} sólo hay que ir contando por fila y columna y ubicarlo). (380-387)

[1.3] Saber cómo usar una analogía entre el cuadrado y la diagonal del cuadrado y una matriz cuadrada y su diagonal principal, para que los estudiantes visualicen “mejor” la diagonal principal de una matriz, en este caso, Emi señala la diagonal principal en el ejemplo de matriz genérica cuadrada de orden 2 y de orden 3. (441-446)

[1.3] Saber cómo remarcarles la caracterización de una matriz triangular superior: que el triángulo que contiene todos los ceros es un triángulo formado por ceros y está por encima de la diagonal principal. (529-538)

[1.3] Saber cómo hacerles notar por qué una matriz se llama diagonal (porque los elementos no nulos están en la diagonal principal) y que una matriz diagonal es una matriz triangular superior e inferiormente. (570-577)

[1.3] Saber cómo decirle a E9 esta caracterización para que distinga entre matriz diagonal y matriz escalar (si todos los números son distintos diagonal y si todos son iguales, escalar). (585-589)

[1.3] Saber cómo presentar el concepto de matriz traspuesta. Emi inicialmente usa la analogía de una "matriz" con una caja y de "traspuesta" con darle vuelta a la caja y luego se apoya de una figura geométrica: el rectángulo. Emi para presentar la matriz traspuesta les hace la pregunta: ¿Qué pasa si a una caja le doy una vuelta? Para que los estudiantes entiendan "mejor" la idea de lo que diferencia una matriz de su traspuesta. En seguida se apoya de figuras geométricas para representar el concepto de matriz traspuesta. Representa a una matriz de mxn con un rectángulo y sobre la altura del rectángulo escribe m filas y al lado contiguo n columnas y les pregunta: ¿Qué pasa si yo le doy vuelta al rectángulo? Luego Emi dibuja la nueva forma que tendría el rectángulo al darle vuelta, Emi mira a los estudiantes esperando respuesta y E7 responde que se cambian las filas por las columnas (respuesta que Emi quería escuchar). Y después de darles la caracterización de una matriz traspuesta (que lo único que se cambia es la posición de los elementos, es decir, se cambia a las filas por las columnas), vuelve a remarcarles que trasponer una matriz es lo mismo que cambiar el rectángulo, tumbarlo y ponerlo de pie. (624-648).

[4.3] Saber cómo explicarles la definición del producto de un número real por una matriz en lenguaje común, haciendo preguntas a los estudiantes. (119-133)

[4.3] Saber que los estudiantes pueden comprender "mejor" la definición del producto de un número por una matriz si se la dice en lenguaje común. (132-133)

[4.3] Saber que los estudiantes pueden comprender "mejor" la propiedad $\lambda(A+B)= \lambda A+ \lambda B$ si se la dice en lenguaje común. Explicarles la propiedad $\lambda(A+B)= \lambda A+ \lambda B$ en lenguaje común. (138-140)

[4.3] Saber que los estudiantes pueden comprender "mejor" la propiedad $(\lambda\mu)A= \lambda(\mu A)$ si se la dice en lenguaje común. (161-163)

[4.4] Saber que los estudiantes pueden comprender "mejor" la propiedad distributiva en matrices si se la dice en lenguaje común. (397-399)

[4.4] Saber que los estudiantes pueden comprender "mejor" la definición de una matriz identidad si se la dice en lenguaje común. (483-485)

Hacer notar/remarcar/destacar

CC-En26. Saber cómo (y cuándo) hacerles notar, remarcar, destacar o aclarar, puntualmente, lo más importante del contenido que está enseñando. [1.1.2] (221-226); [1.2] (288-302), (351-356); [1.3] (395-399), (400-413), (483-489); [3.1] (5-11), (63-66), (104-236), (153-171), (186-201); [3.2] (295-297), (403-406), (441-458); [4.3] (134-137); [4.4] (195-208), (423-427), (428-434), (457-460), (534-539); [4.5] (576-577), (613-615), (683-686), (730-732); (744-746).

[1.1.2] Saber hacerles énfasis en que vean que las matrices se usan en estudios sociológicos y hacerles notar su interés (de la profesora) de que vean que las matemáticas se aplican en campos muy diversos, en particular, en sociología; después de ver los dos ejemplos de aplicación de matrices. (221-226)

[1.2] Saber comentarles, antes de hacer un ejemplo, que los elementos de la matriz tienen la forma a_{ij} con i=1, 2,…, m y j=1, 2,…, n y les remarca que si el orden de una matriz es mxn, entonces m indica el número de filas y n el número de columnas. (288-302)

[1.2] Saber hacerles notar que los elementos de la matriz son números reales, antes de seguir avanzando en la presentación del contenido de matrices. (351-356)

[1.3] Saber hacerles notar, al empezar a presentar las matrices cuadradas que hasta ese momento habían trabajado con matrices rectangulares de orden mxn pero ahora en las matrices cuadradas como el número de filas coincide con el número de columnas, entonces no hablarán de orden mxn sino que sólo se dirá de orden n. (395-399)

[1.3] Saber hacerles notar que si el número de filas coincide con el número de columnas es una matriz cuadrada. (400-413)

[1.3] Saber hacer mención de que puede haber matrices nulas de orden 2x2 y 3x3, después de decirles lo que es una matriz nula, para que el estudiante se haga una idea de las distintas dimensiones o tamaño que puede tener una matriz nula. (483-489)

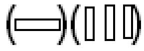
[3.1] Saber cuándo destacar aspectos relevantes de un contenido matemático. En este caso, al empezar a explicarles cómo se hace el producto de dos matrices, Emi les remarca la condición que se debe cumplir para efectuar el producto de dos matrices (que debe coincidir el número de columnas de la primera con el número de filas de la segunda matriz). (5-11)

[3.1] Saber hacer notar la condición del orden de las matrices para poder hacer el producto. Proponerles un ejercicio que ella misma se "inventa", les pide que escriban quien va a ser la matriz A, la matriz B, ver si se puede efectuar el producto AB y en ese caso qué significado tiene el producto. Luego Emi empieza a supervisar lo que van haciendo los estudiantes. Enseguida Emi regresa a la pizarra para explicar en la pizarra los resultados de los ejercicios, Emi le da un "empujoncito" a E8 para que le diga los elementos de la matriz A, posteriormente Emi les hace notar de qué orden es esa matriz. Después Emi pide a E4 le diga los elementos y el orden de la matriz B. Luego les hace notar que el orden de A es 1x4 y de B 4x1 y por tanto se puede hacer el producto AB, con ayuda de E3, Emi escribe el resultado de AB y les comenta el significado del resultado en este ejemplo (significa el número de combinaciones de vuelos desde Sevilla a Nueva York). (104-236)

[3.1] Saber hacer notar tras el hecho de que los estudiantes no le han podido decir correctamente cuál es el orden de la matriz A, que en este caso cada columna tiene un solo elemento pero se considera primera columna, segunda, tercera y cuarta, respectivamente; y que por lo tanto el orden de la matriz A es 1x4 porque tiene una fila y cuatro columnas. (153-171)

[3.1] Saber hacerles notar el orden que tienen las dos matrices para que vean que en este caso sí se pueden multiplicar esas dos matrices (A tiene orden 1x4 y B tiene orden 4x1 entonces se puede hacer el producto y la matriz producto tendrá orden 1x1). (186-201)

[3.2] Saber hacerle notar a E13 que la primera fila de la matriz producto se completa multiplicando la primera fila de la primera matriz por cada una de las columnas de la segunda matriz, con la intensión de que E13 lo tenga presente cuando complete la segunda fila de la matriz producto. (295-297)

[3.2] Saber usar el esquema gráfico  para hacerles notar que deben seguir un orden establecido para hacer el producto de dos matrices para no confundir la fila y columna que deben multiplicar. (403-406)

[3.2] Saber aprovechar el último ejercicio en el cual las matrices no son cuadradas para hacer notar (441-458):

1. Cuándo se pueden multiplicar dos matrices (cuando el número de filas de la primera matriz coincide con el número de columnas de la segunda matriz).
2. De qué orden va a quedar la matriz producto (en este caso, como A es de orden 2x3 y B de orden 3x4 entonces la matriz producto queda de orden 2x4).
3. Que si las matrices que van a multiplicar no son cuadradas pero cumplen la condición para poder multiplicarlas, es decir, que es posible hacer el producto AB, si se cambia el orden del producto BA entonces ya no se puede hacer el producto. Es decir, intenta que vean que el producto de matrices no es conmutativo. En este caso como A es de orden 2x3 y B de 3x4, AB es posible pero BA no es posible porque no se cumple la condición de que el número de filas de la primera coincida con el número de columnas de la segunda.

[4.3] Saber hacer notar que en el producto de un escalar por una matriz existe una multiplicación de 2 números reales para luego anunciarles las propiedades de escalares por matrices. (134-137)

[4.4] Saber, al presentarles el producto de dos matrices, hacerles notar/remarcarles que para hacer el producto de dos matrices debe coincidir el número de columnas de la primera matriz con el número de filas de la segunda, es decir, hacer hincapié en la importancia del orden de las matrices para poder multiplicarlas. (195-208)

[4.4] Saber hacerles notar que es importante el orden de las matrices para poder multiplicarlas, pero que ella no lo anotará, dará por hecho que al escribir las matrices en las propiedades se supone que cumplen la condición del orden para multiplicarlas. (423-427)

[4.4] Saber la importancia de remarcarles la propiedad conmutativa en los números reales, antes de ver la "no conmutatividad" en el producto de matrices. (428-434)

[4.4] Saber la importancia de remarcarles que hay que tener cuidado en el orden de las matrices para poder multiplicarlas al explicar las propiedades del producto de dos matrices. (457-460)

[4.4] Saber hacerles notar la diferencia entre el inverso multiplicativo de los números reales y la matriz inversa en matrices, para hacerles notar que para calcular la matriz inversa será necesario hacer varios cálculos y no sólo una división o fracción como en los números reales. (534-539)

[4.5] Saber hacerles notar que al hacer la transformación elemental de cambiar una fila por otra, están cambiando la matriz, ya no es la misma matriz inicial al explicar las transformaciones elementales. (576-577)

[4.5] Saber hacerles notar que al hacer la transformación elemental de multiplicar toda una fila por un mismo número, se realiza dicha transformación sólo a esa fila y no a toda la matriz. (613-615)

[4.5] Saber remarcarles nuevamente la utilidad de las transformaciones elementales para calcular la matriz inversa, antes de introducir el método de Gauss-Jordán para calcular la matriz inversa. (683-686)

[4.5] Saber remarcarles, al hacer el ejemplo, que tienen que realizar las transformaciones elementales a las dos matrices (A|I) simultáneamente, por ejemplo, si cambian la fila de A entonces hay que cambiar la fila completa, incluyendo la fila correspondiente de I. (730-732); (744-746)

Forma de presentarlo/representarlo o Estrategia didáctica

CC-En30. Saber cómo introducir un concepto mediante la relación de conceptos matemáticos vistos anteriormente. [1.1.1] (13-34).

[1.1.1] Saber cómo introducir un concepto mediante la relación de conceptos matemáticos vistos anteriormente. Emi usa la estrategia de pregunta-respuesta para relacionar los conceptos. En este caso, Emi para introducir el concepto de matriz hace un recorrido deductivo, es decir, parte de lo general a lo particular relacionando varios conceptos matemáticos familiares a los estudiantes. Empieza por comentarles que el Álgebra es una parte de las matemáticas que durante muchos siglos se ocupaba de resolver ecuaciones hasta aterrizar en que a un grafo se le puede asociar una matriz (Álgebra → Sistemas de ecuaciones → Matrices → Tipos de ejercicios → Problemas→ Grafos → Matriz). (13-34)

CC-En31. Conocer diferentes formas para introducir un tópico matemático con algún dato histórico o breve reseña histórica de ese contenido matemático o saber dar una breve reseña/anécdota histórica para contextualizar un tópico. [4.5] (689-695).

[4.5] Conocer una forma para introducir un tópico. Conocer una breve reseña histórica para introducir el tema: Método de Gauss-Jordán para calcular la matriz inversa (Emi habla un poco sobre Gauss). (689-695)

CC-En32. Saber distintas formas de presentar/representar la definición de un concepto: en forma genérica y no con números concretos. [1.3] (511-548); [4.4] (350-366).

[1.3] Saber representar la definición de matriz triangular superior en forma genérica y usar como imagen la figura geométrica del triángulo, para hacer notar por qué se le llama triangular, en particular, triangular superior. Y posteriormente de forma análoga triangular inferior, Emi nuevamente usa la geometría para representar la matriz triangular inferior para visualizar la forma de dicha matriz (Emi dibuja un triángulo grande y dentro de él un cero grande por debajo de la diagonal principal). (511-548)

[4.4] Saber hacerles notar por qué han visto en clase la fórmula abreviada para multiplicar dos matrices (en términos de hacerles ver que la fórmula es compleja, es decir, que no es tan sencillo cómo simplemente multiplicar número a número, como por ejemplo en el caso del producto de un escalar por una matriz). (350-366)

CC-En33. Conocer la estrategia de pregunta-respuesta para relacionar unos conceptos con otros hasta llegar al deseado. [1.1.1] (13-34)

[1.1.1] Conocer la estrategia de pregunta-respuesta para relacionar unos conceptos con otros hasta llegar al deseado. Introducir un concepto mediante la relación de conceptos matemáticos vistos anteriormente. Emi usa la estrategia de pregunta-respuesta para relacionar dichos conceptos. En este caso, Emi para introducir el concepto de matriz hace un recorrido deductivo, es decir, parte de lo general a lo particular relacionando varios conceptos matemáticos familiares a los estudiantes. Empieza por comentarles que el Álgebra es una parte de las matemáticas que durante muchos siglos se ocupaba de resolver ecuaciones hasta aterrizar en que a un grafo se le puede asociar una matriz (Álgebra → Sistemas de ecuaciones → Matrices → Tipos de ejercicios → Problemas→ Grafos → Matriz). (13-34)

CC-En34. Saber cómo remarcarles los aspectos más relevantes del contenido para concluir un ejemplo o la presentación de un tema. [1.1.1] (120-125); [3.2] (441-458); [4.2] (114-118); [4.5] (855-859), (870-881).

[1.1.1] A manera de cierre del ejemplo de Criptografía. Saber cómo remarcarles a forma de resumen dos aspectos importantes: 1. Que las matrices no sólo sirven para guardar datos, para almacenar información, sino que con las matrices se pueden realizar operaciones que ayudan a proteger el descifrado de un mensaje y 2. Que con la ayuda de la matriz inversa se puede volver de nuevo al mensaje original. (120-125)

[3.2] Saber aprovechar el último ejercicio en el cual las matrices no son cuadradas para hacer notar (441-458):

1. Cuándo se pueden multiplicar dos matrices (cuando el número de filas de la primera matriz coincide con el número de columnas de la segunda matriz).
2. De qué orden va a quedar la matriz producto (en este caso, como A es de orden 2x3 y B de orden 3x4 entonces la matriz producto queda de orden 2x4).
3. Que si las matrices que van a multiplicar no son cuadradas pero cumplen la condición para poder multiplicarlas, es decir, que es posible hacer el producto AB, si se cambia el orden del producto BA entonces ya no se puede hacer el producto. Es decir, intenta que vean que el producto de matrices no es conmutativo. En este caso como A es de orden 2x3 y B de 3x4, AB es posible pero BA no es posible porque no se cumple la condición de que el número de filas de la primera coincida con el número de columnas de la segunda.

[4.2] Saber, a forma de resumen y para terminar de presentar las principales propiedades de la suma de matrices, remarcarles en concreto, las implicaciones de esas propiedades que acaba de explicarles. (114-118)

[4.5] Saber concluir el ejemplo remarcándoles lo que se tenía y a lo que se llegó $(A|I) \rightarrow (I|A^{-1})$. (855-859)

[4.5] Saber remarcar o repasar de forma general lo que se hizo, a manera de cierre del ejemplo. (870-881).

CC-En35. Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente. [1.1.2] (128-138); [1.1.2] (226-231); [1.2] (279-283); [4.1] (18-42); [4.3] (134-137); [4.5] (752-765), (812-817).

[1.1.2] Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento para orientar el contenido. Emi da un prefacio para empezar este ejemplo. Aprovechar y a especie de repaso mencionarles los tipos de matrices que han estado haciendo (matrices asociadas a grafos y matrices asociadas a problemas). Su habilidad para orientar el contenido a enseñar (recapitula y luego continúa), en particular, para relacionar, para hacer un puente entre el ejemplo que acaba de hacer (sobre criptografía) y el que hará ahora (aplicado a Sociología). (128-138)

[1.1.2] Saber cómo aprovechar lo que ha visto hasta el momento para orientar el contenido. Hacerles notar que aunque las matrices se pueden estudiar en campos muy diversos, en este curso se centrarán más en el campo económico, es decir, en el uso de matrices en Economía. (226-231)

[1.2] Saber cómo aprovechar lo que ha visto hasta el momento para orientar el contenido. Comentarles varios ejemplos de dimensiones de matrices (2x1, 3x2, 4x5, 6x6, etc.) para que los estudiantes conozcan que existe una amplia gama, pero que las que trabajarán en clase serán dimensiones pequeñas, justificando que la teoría es la misma para todas. (279-283)

[4.1] Saber cómo aprovechar lo que ha visto hasta el momento para orientar el contenido. Emi retoma el proceso de cómo se hace la suma de 2 matrices, antes de dar las propiedades en la suma de matrices. (18-42)

[4.3] Saber cómo aprovechar lo que ha visto hasta el momento para orientar el contenido. Emi les hacer notar que en el producto de un escalar por una matriz existe una multiplicación de 2 números reales para luego anunciarles las propiedades de escalares por matrices. (134-137)

[4.5] Saber cómo aprovechar lo que ha visto hasta el momento para orientar el contenido. Remarcarles nuevamente la estrategia/idea general para conseguir la matriz inversa y les hace notar lo que se ha logrado en el primer objetivo (obtener el primer 1 de la matriz identidad a la que quiere llegar para hallar la matriz inversa). (752-765)

[4.5] Saber cómo aprovechar lo que ha visto hasta el momento para orientar el contenido. Cada vez que Emi va consiguiendo un cambio para obtener la matriz inversa, ella se detiene y repasa lo que se ha hecho hasta el momento y luego seguir en la solución del ejercicio. (812-817)

CC-En36. Saber cómo explicarles la utilidad, aplicación, dirección/orientación del contenido en temas siguientes. [1.3] (615-620); [4.3] (184-187); [4.4] (400-406); [4.5] (573-575), (628-634).

[1.3] Saber cómo explicarles la utilidad, aplicación, dirección/orientación del contenido en temas siguientes. Comentarles la dirección/orientación de ese contenido en temas siguientes. En este caso, justificarles que en esta clase están aprendiendo vocabulario de matrices (principales tipos de matrices) porque éstas están relacionadas con el tema de operaciones con matrices, que verán luego. (615-620)

[4.3] Saber cómo explicarles la utilidad, aplicación, dirección/orientación del contenido en temas siguientes. Comentarles la utilidad de las propiedades (las aplicarán cuando vean ecuaciones matriciales). (184-187)

[4.4] Saber cómo explicarles la utilidad, aplicación, dirección/orientación del contenido en temas siguientes. Comentarles cómo y cuándo usar la propiedad distributiva en matrices (en ecuaciones matriciales). (400-406)

[4.5] Saber cómo explicarles la utilidad, aplicación, dirección/orientación del contenido en temas siguientes. Utilidad: Emi les comenta para qué hay que saber las transformaciones elementales (para calcular la matriz inversa). (573-575)

[4.5] Saber cómo explicarles la utilidad, aplicación, dirección/orientación del contenido en temas siguientes. Comentarles la utilidad de las transformaciones elementales: 1) Hallar la matriz inversa, 2) Determinar el rango de una matriz y 3) Resolver sistemas de ecuaciones. (628-634)

CC-En37. Saber, tras la digresión en su discurso, rescatar la idea del contenido matemático que esté presentando. [1.3] (473-476).

[1.3] Saber, tras la digresión en su discurso, rescatar la idea del contenido matemático que esté presentando. Rescatar la idea de matriz fila y matriz columna y la expresan en términos cercanos a los estudiantes para tratar de que el estudiante fije la imagen de una matriz fila y una matriz columna, haciéndoles ver que se fijen en la orientación de los elementos, horizontal en la matriz fila y vertical en la matriz columna. (473-476)

CC-En38. Saber "poderosas" analogías para presentar o representar el contenido matemático. Saber que al usar la analogía de un objeto matemático con un objeto común para aproximarse más al lenguaje usual de los estudiantes, puede hacer que los estudiantes logren entender "mejor" el significado de un contenido matemático. [1.2] (247-268); [1.3] (441-446), (624-648).

[1.2] Saber "poderosas" analogías para presentar o representar el contenido matemático. Usar la analogía de una caja para aproximarse más al lenguaje usual de los estudiantes, para que logren entender "mejor" lo que significa "tamaño de la matriz o dimensión de la matriz" y remarcarles que es importante la dimensión que tenga la matriz. (247-268)

[1.3] Saber "poderosas" analogías para presentar o representar el contenido matemático. Usar una analogía entre el cuadrado y la diagonal del cuadrado y una matriz cuadrada y su diagonal principal, para que los estudiantes visualicen "mejor" la diagonal principal de una matriz, en este caso, Emi señala la diagonal principal en el ejemplo de matriz genérica cuadrada de orden 2 y de orden 3. (441-446)

[1.3] Saber "poderosas" analogías para presentar o representar el contenido matemático. Para presentar el concepto de matriz traspuesta, Emi inicialmente usa la analogía de una "matriz" con una caja y de "traspuesta" con darle vuelta a la caja y luego se apoya de una figura geométrica: el rectángulo. Emi para presentar la matriz traspuesta les hace la pregunta: ¿Qué pasa si a una caja le doy una vuelta? Para que los estudiantes entiendan "mejor" la idea de lo que diferencia una matriz de su traspuesta. En seguida se apoya de figuras geométricas para representar el concepto de matriz traspuesta. Representa a una matriz de mxn con un rectángulo y sobre la altura del rectángulo escribe m filas y al lado contiguo n columnas y les pregunta: ¿Qué pasa si yo le doy vuelta al rectángulo? Luego Emi dibuja la nueva forma que tendría el rectángulo al darle vuelta, Emi mira a los estudiantes esperando respuesta y E7 responde que se cambian las filas por las columnas (respuesta que Emi quería escuchar). Y después de darles la caracterización de una matriz traspuesta (que lo único que se cambia es la posición de los elementos, es decir, se cambia a las filas por las columnas), vuelve a remarcarles que trasponer una matriz es lo mismo que cambiar el rectángulo, tumbarlo y ponerlo de pie. (624-648).

CC-En39. Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último. [1.3] (492-507); [3.2](425-426); [4.1] (13-17), (13-42); [4.2] (46-59), (60-65), (66-74), (79-88), (100-106), (110-112); [4.4](375-387), (430-434), (489-491), (492-499), (500-502); (508-533), (534-539), (541-555), (556-562).

[1.3] Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último. Hacer preguntas e ir guiando (orientando) las respuestas para usar la analogía del 0 ϵ ***R*** y la matriz nula (0 ϵ M) y hacerles notar la importancia, el papel que jugará la matriz nula en las operaciones con matrices, en particular, en la suma de matrices y para ello les recuerda el papel del 0 en la suma y producto en los números reales (que al sumarlo con otro número real lo deja invariante). (492-507)

[3.2] Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último. Comentar la analogía del 1 ϵ ***R*** y la matriz identidad. Comentarles que en las matrices, la matriz identidad tiene un papel parecido al 1 ϵ ***R*** en cuanto a que al multiplicarlo por otro (en este caso por otra matriz cuadrada del orden de la matriz identidad) lo deja invariante. (425-426)

[4.1] Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último. Usar como estrategia para introducir las propiedades de las operaciones con matrices la familiaridad que pudieran tener los estudiantes con las propiedades de los números reales, para hacerles notar que algunas de las propiedades de matrices se derivan directamente de las propiedades de los números reales. (13-17)

[4.1] Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último. Emi usa la analogía de la suma en los números reales con la suma de matrices. (13-42)

[4.2] Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último. Para presentarles la propiedad asociativa para la suma de matrices, Emi les comenta la analogía de la propiedad asociativa en la suma de los números reales y en las matrices. (46-59)

[4.2] Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último. Explicar por qué se cumple la propiedad asociativa en las matrices (en términos de similitud con los números reales). (60-65)

[4.2] Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último. Para presentarles la matriz nula en la suma de matrices, Emi les comenta la analogía del elemento neutro en la suma de los números reales y en las matrices. (66-74)

[4.2] Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último. Para presentarles la matriz opuesta en la suma de matrices, Emi les comenta la analogía del elemento opuesto en la suma de los números reales y en las matrices. (79-88)

[4.2] Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último. Para presentarles la propiedad conmutativa para la suma de matrices, Emi les comenta la analogía de la propiedad conmutativa en la suma de los números reales. (100-106)

[4.2] Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último. Explicar por qué se cumple la propiedad conmutativa en las matrices (en términos de similitud con los números reales). (110-112)

[4.4] Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último. Para presentarles la propiedad distributiva en matrices, Emi les comenta la analogía de la propiedad distributiva en matrices de los números reales. (375-387)

[4.4] Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último. Para presentarles la propiedad conmutativa en el producto de matrices, Emi les comenta la analogía de la propiedad conmutativa en la suma y producto en los números reales. (430-434)

[4.4] Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último. Evocarles un ejercicio equivalente que hicieron anteriormente al multiplicar una matriz A por I y ver que AI=A. (489-491)

[4.4] Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último. Para terminar de presentarles la matriz identidad, Emi les comenta la analogía entre la matriz identidad en matrices y el 1 de los números reales. (492-499)

[4.4] Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último. Para presentarles la definición de matriz inversa, Emi les comenta la analogía entre la matriz inversa en matrices y la propiedad del inverso multiplicativo de los números reales. (500-502); (508-533)

[4.4] Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último. Hacerles notar la diferencia entre el inverso multiplicativo de los números reales y la matriz inversa en matrices, para hacerles notar que para calcular la matriz inversa será necesario hacer varios cálculos y no sólo una división o fracción como en los números reales. (534-539)

[4.4] Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último. Hacerles notar la analogía entre el inverso multiplicativo en los números reales y la matriz inversa en cuanto a que la matriz nula no tiene inversa por la misma razón que el cero no tiene inverso multiplicativo, pues a.0=0 en los números reales y en matrices A.0=0 (este 0 en matrices es la matriz nula). (541-555)

[4.4] Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último. Remarcarles la diferencia del inverso multiplicativo en los números reales y la matriz inversa en cuanto a que todos los números reales excepto el cero tienen inverso multiplicativo pero en las matrices, además de la matriz nula (que sería similar al cero en los reales), habrá otras matrices que no tengan inversa. (556-562)

CC-En40. Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. [3.1](12-49); [4.5] (699-722).

[3.1] Saber cómo explicar la estrategia que se utiliza para hacer el producto de dos matrices (12-49):

1. Separar la matriz A por filas y la matriz B por columnas.
2. Efectuar el producto de cada una de esas filas por cada una de esas columnas.
3. Decirles cómo efectuar ese producto (multiplicar una fila por una columna elemento a elemento y sumar esos productos).
4. Repetir el proceso para completar la primera fila de la matriz producto.
5. Repetir el proceso, la segunda fila por cada una de las columnas, dará la segunda fila de la matriz producto.
6. Repetir el proceso hasta llegar a la última fila por cada una de las columnas, da la última fila de la matriz producto.

[4.5] Saber cómo explicar la estrategia que se utiliza para calcular la matriz inversa en un ejemplo que ella se ha inventado con una matriz de 2x2 con el método de Gauss-Jordán, empezando con una pregunta que ella misma contesta. (699-722)

CC-En41. Saber qué es lo que hay que repetir y cómo, para aclarar dudas del contenido a los estudiantes o reafirmar algunos aspectos del contenido. [3.2] (347-355), (432-439); [4.5] (778-789), (790-797).

[3.2] Saber qué es lo que hay que repetir y cómo, para aclarar dudas del contenido a los estudiantes. Emi, al ver que E13 se queda callada y no hace nada a pesar de que ella trató de situarla para hacerle ver de manera general, lo que han hecho para efectuar el producto, Emi le repite cómo se obtiene la primera fila y segunda fila de la matriz producto y por tanto le indica lo que tiene que hacer (explícitamente indicándole los productos con flechas que van de la tercera fila de la primera matriz a cada una de las columnas de la segunda matriz), para calcular los valores de la tercera fila de la matriz producto. (347-355)

[3.2] Saber qué es lo que hay que repetir y cómo, para aclarar dudas del contenido a los estudiantes o reafirmar algunos aspectos del contenido. Repetir el procedimiento de cómo se hizo cierto cálculo para aclarar la(s) duda(s) de los estudiantes. En este caso Emi ve que E15 tiene duda sobre el 10 (valor obtenido de multiplicar la primera fila, segunda columna) y Emi repite las operaciones que se realizan para obtener ese valor y que E15 vea que efectivamente se obtiene ese valor. (432-439)

[4.5] Saber qué es lo que hay que repetir y cómo, para aclarar dudas del contenido a los estudiantes o reafirmar algunos aspectos del contenido. Repetir el proceso de una transformación elemental ante una situación en la que los estudiantes están en “estado de shock”, como deslumbrados e impresionados porque no entienden los cambios y transformaciones elementales que está haciendo Emi en la pizarra para conseguir la matriz inversa con el método de Gauss-Jordán. (778-789)

[4.5] Saber qué es lo que hay que repetir y cómo, para aclarar dudas del contenido a los estudiantes o reafirmar algunos aspectos del contenido. Emi repite lo que se ha hecho hasta ese momento para contestar la pregunta de E5. (790-797)

CC-En43. Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. [1.2] (247-268), (324-327); [1.3] (464-472), (473-476), (483-489), (511-548), (562-569), (582-584), (624-648), (663-674); [3.1] (68-69), (202-209); [3.2] (347-355); [4.4] (218), (350-366).

[1.2] Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. Usar la analogía de una caja para aproximarse más al lenguaje usual de los estudiantes, para que logren entender "mejor" lo que significa "tamaño de la matriz o dimensión de la matriz" y remarcarles que es importante la dimensión que tenga la matriz. (247-268)

[1.2] Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. Hacerles notar que en la forma genérica desarrollada de los elementos de una matriz de orden mxn se ve de forma explícita cuáles son los elementos que componen la matriz, tanto en filas como en columnas, a diferencia de la forma abreviada $A=(a_{ij})$ con i=1, 2,…, m y j=1, 2,…, n . (324-327)

[1.3] Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. Usar una analogía entre el cuadrado y la diagonal del cuadrado y una matriz cuadrada y su diagonal principal, para que los estudiantes visualicen "mejor" la diagonal principal de una matriz, en este caso, Emi señala la diagonal principal en el ejemplo de matriz genérica cuadrada de orden 2 y de orden 3. (441-446)

[1.3] Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. Hacer preguntas a los estudiantes (que muchas veces se las contesta ella y otras pocas los estudiantes) para ir definiendo y representando la matriz fila (447-463) y la matriz columna. (464-472)

[1.3] Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. Rescatar la idea de matriz fila y matriz columna y la expresan en términos cercanos a los estudiantes para tratar de que el estudiante fije la imagen de una matriz fila y una matriz columna, haciéndoles ver que se fijen en la orientación de los elementos, horizontal en la matriz fila y vertical en la matriz columna. (473-476)

[1.3] Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. Hacer mención de que puede haber matrices nulas de orden 2x2 y 3x3, después de decirles lo que es una matriz nula, para que el estudiante se haga una idea de las distintas dimensiones o tamaño que puede tener una matriz nula lo cual es relevante, pues hay que cambiar del $0 \in \boldsymbol{R}$ al $0 \in M$ (M es el conjunto de matrices), lo cual algunas veces no es tan trivial para los estudiantes, es decir, no es lo mismo 0 a $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. Luego, Emi escribe en la pizarra una matriz nula de orden nxn. (483-489)

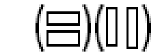
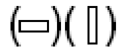
[1.3] Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. Representar la definición de matriz triangular superior en forma genérica y usar como imagen la figura geométrica del triángulo, para hacer notar por qué se le llama triangular, en particular, triangular superior. Y posteriormente de forma análoga triangular inferior, Emi nuevamente usa la geometría para representar la matriz triangular inferior para visualizar la forma de dicha matriz (Emi dibuja un triángulo grande y dentro de él un cero grande por debajo de la diagonal principal). (511-548)

[1.3] Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. Decidir hacer un ejemplo de una matriz diagonal de orden 3x3 para que los estudiantes visualicen la forma que tiene una matriz diagonal. (562-569)

[1.3] Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. Decidir hacer un ejemplo de una matriz escalar de orden 3x3 y hacerles notar la forma que tiene para que los estudiantes visualicen la forma que tiene una matriz diagonal. (582-584)

[1.3] Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. Para presentar el concepto de matriz traspuesta, Emi inicialmente usa la analogía de una "matriz" con una caja y de "traspuesta" con darle vuelta a la caja y luego se apoya de una figura geométrica: el rectángulo. Emi para presentar la matriz traspuesta les hace la pregunta: ¿Qué pasa si a una caja le doy una vuelta? Para que los estudiantes entiendan "mejor" la idea de lo que diferencia una matriz de su traspuesta. En seguida se apoya de figuras geométricas para representar el concepto de matriz traspuesta. Representa a una matriz de mxn con un rectángulo y sobre la altura del rectángulo escribe m filas y al lado contiguo n columnas y les pregunta: ¿Qué pasa si yo le doy vuelta al rectángulo? Luego Emi dibuja la nueva forma que tendría el rectángulo al darle vuelta, Emi mira a los estudiantes esperando respuesta y E7 responde que se cambian las filas por las columnas (respuesta que Emi quería escuchar). Y después de darles la caracterización de una matriz traspuesta (que lo único que se cambia es la posición de los elementos, es decir, se cambia a las filas por las columnas), vuelve a remarcarles que trasponer una matriz es lo mismo que cambiar el rectángulo, tumbarlo y ponerlo de pie. (624-648).

[1.3] Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. Usar un esquema gráfico para indicar que la primera fila de A es ahora la primera columna de A^t y similarmente la segunda fila de A es ahora la segunda columna de A^t. En este caso Emi encierra en un rectángulo la primera fila y luego la segunda fila de A y después encierra la primera columna de A^t que sería la primera fila de A, para que noten como la primera fila de A ahora es la primera columna de A^t y similarmente encierra en un rectángulo la segunda columna de A^t que sería la segunda fila de A. (663-674)

[3.1] Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. Usar un esquema gráfico  ;  para representar la división de la primera matriz en filas y de la segunda matriz en columnas, para efectuar el producto de esas dos matrices. Emi usa ese esquema gráfico porque considera que de esa forma los estudiantes visualizan "mejor" o se harán una buena imagen mental de que deben multiplicar una fila de la primera matriz por una columna de la segunda matriz al efectuar el producto de ellas. (68-69); (202-209)

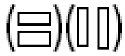
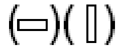
[3.2] Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. Emi, al ver que E13 se queda callada y no hace nada a pesar de que ella trató de situarla para hacerle ver de manera general, lo que han hecho para efectuar el producto, Emi le repite cómo se obtiene la primera fila y segunda fila de la matriz producto y por tanto le indica lo que tiene que hacer (explícitamente indicándole los productos con flechas que van de la tercera fila de la primera matriz a cada una de las columnas de la segunda matriz), para calcular los valores de la tercera fila de la matriz producto. (347-355)

[4.4] Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. Usar un esquema gráfico para hacer el producto de dos matrices, en la primera matriz dibuja sólo líneas horizontales para representar filas y en la segunda puras líneas verticales indicando columnas, Emi usa este esquema gráfico para que tengan una mayor visualización de que para hacer el producto de las dos matrices hay que multiplicar "filas por columnas". (218)

[4.4] Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. Saber que los estudiantes al involucrarse más con la fórmula abreviada del producto de matrices y ver que es más compleja (no sólo multiplicar número a número y ya), se hagan una imagen de que algunas propiedades de la suma y producto en los números reales se transmitirán al producto de matrices y otras no. (350-366)

CC-En44. Conocer la potencialidad de los esquemas gráficos para representar un contenido. [3.1] (67-96), (68-69); (202-209); [3.2] (403-406).

[3.1] Conocer la potencialidad de los esquemas gráficos para representar un contenido. Una vez que Emi divide en filas la primera matriz y en columnas la segunda matriz (=)(||), Emi calcula el primer elemento, luego se dirige a un estudiante en específico para que calcule el segundo elemento de la matriz producto, luego a otro estudiante el tercer elemento y a otro el último elemento. (67-96)

[3.1] Conocer la potencialidad de los esquemas gráficos para representar un contenido. Usar un esquema gráfico  ;  para representar la división de la primera matriz en filas y de la segunda matriz en columnas, para efectuar el producto de esas dos matrices. Emi usa ese esquema gráfico porque considera que de esa forma los estudiantes visualizan "mejor" o se harán una buena imagen mental de que deben multiplicar una fila de la primera matriz por una columna de la segunda matriz al efectuar el producto de ellas. (68-69); (202-209)

[3.2] Conocer la potencialidad de los esquemas gráficos para representar un contenido. Usar el esquema gráfico  para hacerles notar que deben seguir un orden establecido para hacer el producto de dos matrices para no confundir la fila y columna que deben multiplicar. (403-406)

CC-En45. Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan "mejor" el contenido que presenta, saber cómo evocar un concepto(s), un ejemplo, ejercicio, problema o procedimiento equivalente visto(s) o hecho(s) anteriormente, para presentar un nuevo concepto o un ejemplo del nuevo concepto, para que los estudiantes traigan a la mente ese contenido o se hagan una idea de cómo se resuelve el nuevo problema. [1.3] (492-507), (590-604); [3.2] (330-345), (425-426); [4.1] (13-17), (13-42); [4.2] (46-59), (60-65), (66-74), (79-88), (100-106), (110-112); [4.4] (375-387), (430-434), (489-491), (492-499), (500-502), (508-533), (541-555), (556-562).

[1.3] Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan "mejor" el contenido que presenta. Hacer preguntas e ir guiando (orientando) las respuestas para usar la analogía del 0 ϵ ***R*** y la matriz nula (0 ϵ M) y hacerles notar la importancia, el papel que jugará la matriz nula en las operaciones con matrices, en particular, en la suma de matrices y para ello les recuerda el papel del 0 en la suma y producto en los números reales (que al sumarlo con otro número real lo deja invariante). (492-507)

[1.3] Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan "mejor" el contenido que presenta. Evocar conceptos equivalentes vistos anteriormente para presentar un nuevo concepto. Emi les recuerda el ejemplo que pusieron para una matriz escalar y aprovecha eso para presentarles la matriz unidad. (590-604)

[3.2] Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan "mejor" el contenido que presenta. Comentar la analogía del 1 ϵ ***R*** y la matriz identidad. Comentarles que en las matrices, la matriz identidad tiene un papel parecido al 1 ϵ ***R*** en cuanto a que al multiplicarlo por otro (en este caso por otra matriz cuadrada del orden de la matriz identidad) lo deja invariante. (425-426)

[3.2] Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan “mejor” el contenido que presenta. Tratar de situar a E13, de hacerle ver de manera general, lo que han hecho para efectuar el producto. Emi intenta que E13 se fije que obtuvieron ya la primera y segunda fila de la matriz producto y que por tanto, la tercera fila se obtendrá de manera similar, es decir, para que por analogía, E13 calcule los elementos de la tercera fila de la matriz producto. (330-345)

[3.2] Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan “mejor” el contenido que presenta. Saber que si usa esa analogía (la analogía del $1 \in \mathbb{R}$ y la matriz identidad, en cuanto a que al multiplicarlo por otro lo deja invariante) los estudiantes pueden entender “mejor” el papel de la matriz identidad en matrices. (425-426)

[4.1] Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan “mejor” el contenido que presenta. Usar como estrategia para introducir las propiedades de las operaciones con matrices la familiaridad que pudieran tener los estudiantes con las propiedades de los números reales, para hacerles notar que algunas de las propiedades de matrices se derivan directamente de las propiedades de los números reales. (13-17)

[4.2] Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan “mejor” el contenido que presenta. Para presentarles la propiedad asociativa para la suma de matrices, Emi les comenta la analogía de la propiedad asociativa en la suma de los números reales y en las matrices. (46-59)

[4.2] Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan “mejor” el contenido que presenta. Explicar por qué se cumple la propiedad asociativa en las matrices (en términos de similitud con los números reales). (60-65)

[4.2] Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan “mejor” el contenido que presenta. Para presentarles la matriz nula en la suma de matrices, Emi les comenta la analogía del elemento neutro en la suma de los números reales y en las matrices. (66-74)

[4.2] Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan “mejor” el contenido que presenta. Para presentarles la matriz opuesta en la suma de matrices, Emi les comenta la analogía del elemento opuesto en la suma de los números reales y en las matrices. (79-88)

[4.2] Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan “mejor” el contenido que presenta. Para presentarles la propiedad conmutativa para la suma de matrices, Emi les comenta la analogía de la propiedad conmutativa en la suma de los números reales. (100-106)

[4.2] Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan "mejor" el contenido que presenta. Explicar por qué se cumple la propiedad conmutativa en las matrices (en términos de similitud con los números reales). (110-112)

[4.4] Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan "mejor" el contenido que presenta. Para presentarles la propiedad distributiva en matrices, Emi les comenta la analogía de la propiedad distributiva en matrices de los números reales. (375-387)

[4.4] Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan "mejor" el contenido que presenta. Para presentarles la propiedad conmutativa en el producto de matrices, Emi les comenta la analogía de la propiedad conmutativa en la suma y producto en los números reales. (430-434)

[4.4] Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan "mejor" el contenido que presenta. Evocarles un ejercicio equivalente que hicieron anteriormente al multiplicar una matriz A por I y ver que AI=A. (489-491)

[4.4] Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan "mejor" el contenido que presenta. Para terminar de presentarles la matriz identidad, Emi les comenta la analogía entre la matriz identidad en matrices y el 1 de los números reales. (492-499)

[4.4] Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan "mejor" el contenido que presenta. Para presentarles la definición de matriz inversa, Emi les comenta la analogía entre la matriz inversa en matrices y la propiedad del inverso multiplicativo de los números reales. (500-502); (508-533)

[4.4] Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan "mejor" el contenido que presenta. Hacerles notar la analogía entre el inverso multiplicativo en los números reales y la matriz inversa en cuanto a que la matriz nula no tiene inversa por la misma razón que el cero no tiene inverso multiplicativo, pues a.0=0 en los números reales y en matrices A.0=0 (este 0 en matrices es la matriz nula). (541-555)

[4.4] Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan "mejor" el contenido que presenta. Remarcarles la diferencia del inverso multiplicativo en los números reales y la matriz inversa en cuanto a que todos los números reales excepto el cero tienen inverso multiplicativo pero en las matrices, además de la matriz nula (que sería similar al cero en los reales), habrá otras matrices que no tengan inversa. (556-562)

De los aspectos del **conocimiento curricular, podemos abstraer el siguiente descriptor en términos más generales**:

CC1. Saber qué contenidos aparecen y cómo están organizados en el libro de texto. [1.3] (622-624)

[1.3] Saber que el tema de matriz traspuesta viene en el libro de texto. (622-624)

De los aspectos del **conocimiento pedagógico general, podemos abstraer los siguientes descriptores en términos más generales**:

CPG1. Conocer estrategias para controlar la indisciplina o distracción en el aula, para atraer la atención de los estudiantes o llamar la atención a los estudiantes cuando están comportándose de manera impropia para una clase. [4.1] (7-9); [4.5] (567-572).

[4.1] Controlando la indisciplina. Al escuchar desorden en el grupo, Emi les dice que ese contenido lo tienen en el libro, así que no es necesario que lo copien y les pide que atiendan al explicación que ella hará y estén en silencio. (7-9)

[4.5] Control de indisciplina y motivación. Emi controla la indisciplina en el grupo y luego trata de motivarlos para continuar y terminar la teoría de matrices. (567-572)

CPG2. Conocimiento y habilidad discursiva para hacer comentarios para tranquilizar y motivar a los estudiantes cuando los ve agobiados, decepcionados de ellos mismos o preocupados por el trabajo de clase que tienen que hacer; o porque se consideren incapaces de aprender un método para hacer ejercicios o procedimientos. [4.5] (860-881).

[4.5] Tranquilizar y motivar. Conocimiento para tranquilizar a los estudiantes y motivarlos, en situaciones difíciles, tener frases como: "si practican entonces podrán hacer los ejercicios similares a estos con facilidad". (860-881)

Emi

Sistemas de Ecuaciones Lineales (SEL).

De los aspectos del **conocimiento común del contenido,** podemos abstraer los siguientes descriptores en términos más generales:

CCC1. Saber la definición del concepto, regla, propiedad, teorema o método que está presentando. [8.2] (85-134); [8.4] (384-386), (434-466).

[8.2] Saber en qué consiste el método de reducción de Gauss. (85-134)

[8.4] Saber lo que es el rango de una matriz (Emi: *El rango es el número de filas linealmente independientes*). (384-386)

[8.4] Saber "las propiedades de sistemas", es decir, saber el teorema de Rouché-Frobenius. (434-466)

CCC4. Saber la operatividad, propiedades (en cuanto a su uso), utilidad o aplicación de un concepto. [6.2.1] (252-254); [6.2.2] (340-352), (434-438), (441-462), (508-516); [7.1] (10-12), (28-31), (33-37), (51-54), (55-68), (79-95), (109-110), (123-125), (126-129), (133-159), (187-216); [8.3] (306-356); [8.4] (387-397), (496-511).

[6.2.1] Saber que no es necesario convertir las áreas en otra unidad de medida, siempre y cuando usen las mismas unidades de medida en todas las ecuaciones. (252-254)

[6.2.2] Saber lo que son las matrices input/output (insumo-producto). (340-352), (434-438)

[6.2.2] Saber lo que sería una situación de equilibrio en un modelo cerrado de Leontief (gastos=ingresos). (441-462), (508-516)

[7.1] Saber realizar transformaciones elementales en un sistema sin modificar la solución del sistema de ecuaciones:

1) Saber que si cambia el orden de las ecuaciones en un sistema no altera la solución del sistema. (10-12)
2) Saber que multiplicar o dividir una ecuación por un número distinto de cero, no cambia las soluciones de la ecuación porque con esas transformaciones el sistema es equivalente. (28-31)
3) Saber que se pueden sumar las ecuaciones unas con otras porque también las ecuaciones que resultan son equivalentes, es decir, tienen la misma solución. (33-37)

[7.1] Saber la utilidad de las transformaciones elementales en matrices (*porque para encontrar el valor de x, y, z debo despejar, y una forma muy fácil de despejar es haciendo un sistema escalonado*). (51-54)

[7.1] Saber la estrategia para encontrar la solución en un sistema escalonado (si el sistema ya está escalonado entonces si ya se tiene el valor de z, se sustituye en la segunda ecuación y se obtiene *y*, finalmente se sustituye el valor de *y*, z en la primera ecuación y se obtiene el valor de la x). (55-68)

[7.1] Saber escribir el sistema en forma matricial. (79-95)

[7.1] Saber la estrategia para resolver un sistema de ecuaciones lineales con el método de Gauss (trabajar con la matriz ampliada y conseguir hacer ceros por debajo de la diagonal principal). (109-110), (123-125)

[7.1] Saber que pueden dividir todo por 10 y así manejar cantidades más pequeñas al hacer las operaciones. (126-129)

[7.1] Saber hacer las transformaciones elementales para llegar al sistema escalonado. En este caso las transformaciones elementales son a) F_2-F_1 y b) F_3-F_1. (133-159)

[7.1] Saber obtener los valores de x, y, z a partir del sistema escalonado, es decir, saber “despejar”. (187-216)

[8.3] Saber cómo se representaría un sistema escalonado en matrices para identificar qué tipo de sistema es. (306-356)

[8.4] Saber cómo se obtiene el rango de una matriz y el valor del rango de la matriz de coeficientes ya escalonada, para cada tipo de sistema. (387-397)

[8.4] Escribir correctamente el sistema en forma matricial y la matriz ampliada. (496-511)

De los aspectos del **conocimiento del contenido y estudiantes,** podemos abstraer los siguientes descriptores en términos más generales:

CC-Es2. Saber las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre el contenido matemático. [7.2] (289-292).

[7.2] Saber las necesidades y dificultades de E9. Emi vuelve a leer los datos del problema para empezar a llenar la tabla, pero les pide que cada quien vaya llenado la tabla y mientras ella se acerca a ayudar a E9 a localizar en su libro de Braille el problema que están resolviendo. (289-292)

CC-Es4. Prever (anticipar) que los estudiantes no saben o no recuerdan un concepto o propiedad matemática. [6.2.1] (156-157).

[6.2.1] Prever que los estudiantes no saben o no recuerdan a cuánto o a qué equivale un área (un decámetro cuadrado = cien metros cuadrados). (156-157)

CC-Es5. Prever (anticipar) que los estudiantes se pueden quedar con una imagen o idea inadecuada del contenido. [6.2.1] (225-229).

[6.2.1] Prever que los estudiantes pudieran hacerse la imagen inadecuada de que los problemas que resolverán en clase serían del tipo del primer ejemplo ("antiguos y difíciles") y por ello Emi les aclara que los problemas que verán no serán de ese tipo. (225-229)

CC-Es8. Saber que los estudiantes deben proceder ordenadamente respetando las convenciones matemáticas, para evitar confusiones y errores. [7.1] (184-186), (221-225).

[7.1] Saber que los estudiantes se pueden equivocar al escribir el sistema en forma matricial, es decir, que no pongan las equis debajo de las equis (x´s), las y´s debajo de las y´s y las z´s debajo de las z´s. (184-186)

[7.1] Saber que algún estudiante pudiera escribir la solución del sistema sin seguir la convención matemática de que siempre se anota el valor de las incógnitas en el orden en que aparecen dadas, en este caso (x, y, z). (221-225)

CC-Es9. Saber que los estudiantes podrían hacer cálculos mecánicamente sin saber realmente lo que están haciendo. [7.2] (311-318); [8.2] (137-148).

[7.2] Saber que los estudiantes suelen irse con la pinta y representar a las variables con algo que no tiene sentido, es decir, hacer cálculos mecánicamente sin saber realmente el sentido de las variables en el problema. (311-318)

[8.2] Saber que un error común en los estudiantes es pensar y escribir que al obtener el valor de x, y, z están obteniendo 3 soluciones al sistema, sin hacer conciencia de que el valor de esas tres variables constituye una solución. (137-148)

De los aspectos del **conocimiento del contenido y enseñanza,** podemos abstraer los siguientes descriptores en términos más generales:

Ejemplos
CC-En1. Saber con qué ejemplo o ejercicio empezar, cuándo y cuáles usar para enfatizar, reforzar o generalizar cierta idea. [6.1] (13-17); [6.2.1] (116-151); [6.2.2] (353-358); [7.1] (1-220); [8.4] (481-533).

[6.1] Saber qué ejercicios proponerles en la nueva fotocopia. Emi, después de proporcionarles una fotocopia en la que detalla paso a paso las soluciones a ejercicios anteriores, les da una nueva fotocopia con ejercicios propuestos donde ha incluido un poco más de laboriosidad y complejidad (matrices de orden 3). (13-17)

[6.2.1] Saber con qué ejemplo empezar. Iniciar con un ejemplo de un problema histórico ("El problema de los bueyes") y dar una breve reseña histórica del problema. (116-151)

[6.2.2] Saber con qué ejemplos reforzar el contenido. Recapitular y orientar el ejemplo a realizar, una vez que les explica lo que son las matrices input/output. (353-358)

[7.1] Saber qué ejemplo usar para reforzar el contenido.

1. Remarcarles cuándo dos ecuaciones son equivalentes (cuando tienen la misma solución).
2. Hacerles notar que las transformaciones que pueden hacer en las ecuaciones de un sistema son transformaciones elementales que pueden hacer en las matrices (matrices del sistema).
3. Darles un ejemplo de un sistema de ecuaciones para escribirlo luego en forma matricial.
4. Utilizar el problema de ese ejemplo para resolverlo usando el método de reducción de Gauss. (1-220)

[8.4] Saber con qué ejemplo iniciar. Decidir empezar con este ejemplo en el tema de clasificar el sistema y en su caso resolverlo, Emi usa un ejemplo para clasificar qué tipo de sistema es pero suena el timbre y ya no lo terminan, sólo deja indicada la matriz ampliada y les comenta la estrategia a seguir, les deja de tarea terminarlo, hacer transformaciones elementales para escalonarlo y decir qué tipo de sistema es y si es posible hallar la solución. (481-533)

CC-En3. Saber que una de las potencialidades de un ejemplo, en concreto al desarrollarlo, es utilizarlo para destacar los aspectos relevantes del contenido matemático que pretende enseñarles ese día en clase. [7.1] (1-220).

[7.1] Saber una de las potencialidades de un ejemplo: Utilizarlo para destacar aspectos relevantes del contenido.

1. Remarcarles cuándo dos ecuaciones son equivalentes (cuando tienen la misma solución).

2. Hacerles notar que las transformaciones que pueden hacer en las ecuaciones de un sistema son transformaciones elementales que pueden hacer en las matrices (matrices del sistema).
3. Darles un ejemplo de un sistema de ecuaciones para escribirlo luego en forma matricial.
4. Utilizar el problema de ese ejemplo para resolverlo usando el método de reducción de Gauss. (1-220)

CC-En6. Saber qué ejercicios dejarles de deberes para que practiquen. [6.2.2] (574-575); [7.2] (347-351); [8.4] (529-533).

[6.2.2] Saber qué dejarles de deberes a los estudiantes (estudiar el fin de semana y haced los ejercicios que les propuso en fotocopias para que practiquen y se preparen para el examen que harán los estudiantes la siguiente semana). (574-575)

[7.2] Saber qué dejarles de deberes (lo que ya no dio tiempo a terminar en clase: escribir el sistema en forma matricial y resolverlo con el método de reducción de Gauss). (347-351)

[8.4] Saber qué dejarles de deberes: terminar el ejemplo que estaba haciendo ella en la pizarra. (529-533)

Ayudas

CC-En7. Saber qué ayudas dar a los estudiantes en situaciones de confusión o dificultad, para que puedan dar solución a un ejercicio o resolver un problema. [6.2.1] (201-209), (233-234); [7.2] (325-328).

[6.2.1] Saber qué ayudas dar a los estudiantes en situaciones de confusión o dificultad. Darles un "empujoncito" o ayudas puntuales. Emi les da un empujoncito diciéndoles cuáles son las incógnitas necesarias para el planteamiento del problema. (201-209)

[6.2.1] Saber qué ayudas dar a los estudiantes en situaciones de confusión o dificultad. Darles la idea de por dónde empezar a plantear las ecuaciones, es decir, les da otro "empujoncito". (233-234)

[7.2] Saber qué ayudas dar a los estudiantes en situaciones de confusión o dificultad. Comentarles una forma de identificar las incógnitas del problema. Emi: "*... regularmente las incógnitas se suelen corresponder con lo que nos preguntan*". (325-328)

CC-En8. Saber que una "buena" estrategia para que los estudiantes comprendan o hagan un ejemplo, ejercicio o problema, consiste en explicarles o hacerles hincapié en lo que quiere que hagan y para qué quiere que lo hagan o simplemente explicarles de lo que trata el ejercicio o problema. [6.2.2] (441-462), (463-464), (508-516).

[6.2.2] Saber que es bueno explicarles de lo que se trata este problema de SEL, y en particular les habla de lo que sería una situación de equilibrio en un modelo cerrado de Leontief (gastos=ingresos). (441-462), (508-516)

[6.2.2] Saber que es bueno hacerles hincapié en lo que quiere que hagan en este problema (plantear las ecuaciones). (463-464)

CC-En9. Saber cómo señalar a los estudiantes algún dato del problema que no aparece explícito y que luego se usará para dar solución a un ejercicio o resolver un problema. [6.2.1] (216-217).

[6.2.1] Saber cómo señalar a los estudiantes algún dato importante. Señalar a los estudiantes datos implícitos de un problema (de SEL) porque son relevantes para resolver el problema/ejercicio, y que luego ocupará para hacer el planteamiento del problema. (159-162), (216-217)

[6.2.2] Saber cómo señalar a los estudiantes algún dato importante. Señalarles un dato del problema que no aparece explícito y que luego ocupará para plantear el problema. Emi explica que para simplificar el problema, la cantidad total que produce cada una de esas personas en un año se considerará como una unidad respectivamente. (361-370)

Gestión de la participación
Preguntas
CC-En12. Saber qué preguntas formular para presentar un nuevo concepto, una nueva propiedad o una clasificación. [6.2.1] (191-194); [7.1] (166-168); [8.2] (149-150).

[6.2.1] Saber qué preguntas formular para introducir preguntas, al presentar el tema de SEL, para empezar a resolver un problema (comprender el enunciado del problema y pensar cuáles son las incógnitas para plantear las ecuaciones. (191-194)

[7.1] Saber qué preguntas formular para introducir preguntas, al presentar la forma matricial para resolver un SEL. (166-168)

[8.2] Saber qué preguntas formular para retomar la pregunta que les había hecho antes (¿Existe siempre solución? -para un sistema de ecuaciones lineales), al principio del repaso, para continuar con la introducción para presentar luego la clasificación, es decir, empieza haciéndoles notar que no siempre existe solución al sistema. (149-150)

CC-En14. Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático para gestionar por lo menos una participación pasiva de los demás estudiantes, cuando existe un diálogo entre el profesor y un determinado estudiante, para que se planteen el porqué de lo que se va exponiendo en el diálogo. [6.2.1] (265); [6.2.2] (478).

[6.2.1] Saber qué preguntas formular para gestionar por lo menos una participación pasiva de los demás estudiantes. Emi lanza una pregunta al grupo: ¿conformes? Como una forma de tomar en cuenta a los demás estudiantes y hacerles una "llamada" a los estudiantes para atraer su atención y que la vayan siguiendo, es decir, para evitar que la explicación se convierta en un diálogo entre Emi y E2 y los estudiantes no sigan lo que va haciendo (es decir, intenta gestionar por lo menos una participación pasiva de los estudiantes). (265)

[6.2.2] Saber qué preguntas formular para gestionar por lo menos una participación pasiva de los demás estudiantes. Emi lanza una pregunta al grupo: ¿Estáis los demás conformes con lo que dice E2? Como una forma de tomar en cuenta a los demás estudiantes y hacerles una "llamada" a los estudiantes para atraer su atención y que la vayan siguiendo, es decir, para evitar que la explicación se convierta en un diálogo entre Emi y E2 y los estudiantes no sigan lo que va haciendo (es decir, intenta gestionar por lo menos una participación pasiva de los estudiantes). (478)

CC-En15. Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático para ir guiando la solución de un ejemplo o ejercicio, resolver un problema o hacer una representación gráfica. [7.1] (174-183); [7.2] (249-339); [8.3] (198-221), (222-245), (279-296), (310-332), (333-345), (346-356).

[7.1] Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático para ir guiando la solución de un problema. Pedirles que escriban las ecuaciones del sistema escalonado que ha quedado, al mismo tiempo ella va escribiendo las ecuaciones en la pizarra, escribe la primera ecuación que corresponde a la primera fila, luego les pregunta a los estudiantes: *¿cómo quedaría la segunda ecuación del sistema?* A lo cual E2 le responde cómo iría quedando y escribe la segunda ecuación, Emi la completa y luego ella misma se pregunta y se contesta cómo queda la tercera ecuación, escribiéndola en la pizarra. (174-183)

[7.2] Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático para ir guiando la solución de un problema. Proponerles que ellos planteen el problema, pero al final la que lo plantea es ella mediante algunas preguntas a los estudiantes. (249-339)

[8.3] Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático para ir guiando la solución de un problema. Proponer (inventarse) un ejemplo de SCD escalonado y mediante preguntas a los estudiantes obtiene con ayuda de E2, el valor de las incógnitas x, y, z. (198-221)

[8.3] Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático para ir guiando la solución de un problema. Proponer (inventarse) un ejemplo de SCI escalonado y mediante preguntas a los estudiantes trata de hacerles notar que la z va tomando varios valores y por lo tanto también la y y la x, para que vean que el sistema tiene infinitas soluciones. (222-245)

[8.3] Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático para ir guiando la solución de un problema. Tratar de enfatizar lo que pasa en la tercera ecuación del ejemplo de sistema escalonado que ella les propuesto (El sistema que Emi les propone es x+y+z=3, y+z=1, 0=1). Mediante preguntas a los estudiantes los guía para que observen, en particular, lo que pasa en la tercera ecuación del sistema escalonado en un SI, para que noten que el sistema no tiene solución. (279-296)

[8.3] Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático para ir guiando la realización de una representación gráfica. Escribir la matriz de un SCD ya escalonado usando un esquema gráfico y representarlo. Diferencia la parte de los coeficientes de la parte de los términos independientes, los coeficientes los representa con circulito y a los términos independientes con un cuadro, quedando de la siguiente manera $\left(\begin{array}{ccc|c} \otimes & \otimes & \otimes & \square \\ 0 & \otimes & \otimes & \square \\ 0 & 0 & \otimes & \square \end{array}\right)$

Emi escribe eso a través de preguntas a los estudiantes que muchas de las veces ella misma se contesta. (310-332)

[8.3] Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático para ir guiando la realización de una representación gráfica. Escribir la matriz de un SCI ya escalonado, usando el siguiente esquema gráfico para representarlo $\left(\begin{array}{ccc|c} \otimes & \otimes & \otimes & \square \\ 0 & \otimes & \otimes & \square \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Emi va haciendo preguntas para que los estudiantes se fijen en los elementos que quedan en la última fila al escalonar un sistema que es SCI. (333-345)

[8.3] Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático para ir guiando la realización de una representación gráfica. Escribir la matriz de un SI ya escalonado, usando el siguiente esquema geométrico para representarlo $\left(\begin{array}{ccc|c} \otimes & \otimes & \otimes & \square \\ 0 & \otimes & \otimes & \square \\ 0 & 0 & 0 & \square \end{array}\right)$ Emi va escribiendo la matriz con ayuda de los estudiantes, haciéndoles preguntas. (346-356)

Respuestas
CC-En16. Saber qué respuestas de los estudiantes aceptar, cuáles interrumpir, cuáles ignorar o cuáles destacar, para alcanzar los objetivos de la enseñanza del contenido trazados por la profesora para esa clase. [8.2] (159-166); [8.3] (341-345), (352-356).

[8.2] Saber qué respuestas de los estudiantes aceptar para alcanzar sus objetivos. Aceptar y completar la respuesta de E7, pero luego orientar el contenido a su objetivo. Habilidad para no desviarse y continuar con la orientación que tenía pensada para alcanzar su objetivo: dar una introducción para luego clasificar los sistemas. En este caso, Emi pregunta: "*¿Puede salir más de una solución en un sistema?"* Y E7 contesta que eso puede darse *en las ecuaciones de segundo grado*, cosa que es correcta pero que no es lo que interesa ahora para el objetivo de Emi, pues ella lo que deseaba escuchar es que un sistema de ecuaciones lineales puede tener infinitas soluciones, por tanto, les comenta que la respuesta de E7 es correcta y orienta el discurso a su objetivo, es decir, les comenta que "*cuando hablamos de ecuaciones lineales, puede darse el caso y que hasta ahora no os ha salido, de que haya más de una solución, en realidad puede ser que haya infinitas soluciones"*. (159-166)

[8.3] Saber qué respuestas de los estudiantes aceptar para alcanzar sus objetivos. Aceptar, completar y orientar la respuesta de E2 respecto a cómo quedó la última fila de la matriz en el sistema escalonado (Emi: "*Para que nos quede la última ecuación 0=0, significa que los elementos de la última fila son todos 0, tanto para los coeficientes como para el término independiente"*) de un SCI. (341-345)

[8.3] Saber qué respuestas de los estudiantes aceptar para alcanzar sus objetivos. Aceptar la respuesta de E2, completarla y orientarla para terminar de representar el esquema gráfico (todos los elementos de la tercera fila son cero excepto el término independiente que es un número distinto de cero). (352-356)

Traducir
CC-En25. Saber usar lenguaje común o más familiar a los estudiantes o una forma más explícita, más detallada, al explicar el contenido matemático para que los estudiantes lo comprendan "mejor". [6.2.1] (153-162); [6.2.2] (340-352); [8.3] (246-257).

[6.2.1] Saber que los estudiantes pueden entender "mejor" el enunciado del problema si se los explica en lenguaje común, en lenguaje que sea más familiar a los estudiantes. (153-162)

[6.2.2] Saber que los estudiantes pueden comprender "mejor" el problema si les explica en lenguaje común, lenguaje más familiar a los estudiantes, lo que son las matrices input/output (insumo-producto). (340-352)

[8.3] Saber usar lenguaje común o más familiar a los estudiantes o una forma más explícita, más detallada, al explicar el contenido. Emi al no contestarle los estudiantes cuánto vale *y* de la segunda ecuación y+z=2 si z=λ, Emi "transfiere y traduce" a lenguaje común, en una forma más detallada (Emi: "*A ver hemos dicho que z puede tener cualquier valor ¿no?, le podemos dar cualquier valor que queramos a z, ya que en la última ecuación no me sale un valor determinado para z, entonces si despejamos y de la segunda ecuación y z vale λ, ¿qué nos queda?*" E3: *"2-λ"*), para explicarles lo que les acaba de preguntar, y de esa forma si obtiene la respuesta correcta por parte de E3. (246-257)

Hacer notar/remarcar/destacar

CC-En26. Saber cómo (y cuándo) hacerles notar, remarcar, destacar o aclarar, puntualmente, lo más importante del contenido que está enseñando. [6.2.1] (306-319), (320-322); [6.2.2] (404-433); [7.1] (1-7), (17-22), (1-220), (96-104), (116-121), (155-159), (170-173), (184-186), (194-199), (221-225); [7.2] (311-318); [8.2] (46-84), (85-134), (109-114), (137-148), (149-150); [8.3] (271-272), (279-296), (297-306), (333-345), (357-381); [8.4] (398-414), (428-433), (382-397), (398-414).

[6.2.1] Saber cómo hacerles ver/notar que con las dos primeras ecuaciones se forma un sistema de 2x2 y cómo hacerles recordar los distintos métodos que ya conocen para resolver un sistema de 2x2 (reducción y sustitución). (306-319)

[6.2.1] Saber cómo remarcarles que lo que se va a usar para resolver SEL será la técnica matricial, porque es una técnica más avanzada y más eficiente para resolver SEL, en comparación con el método de sustitución y reducción. (320-322)

[6.2.2] Saber cómo hacerles notar aspectos relevantes de la tabla de datos del problema:
1. Leer en filas: "consumidos".
2. Leer en columnas: "producidos".
3. Lo que produce cada persona al sumarlo da 1.
4. Que cada uno es el que consume más de lo que cada uno hace, excepto el carpintero, es decir, el agricultor es el que más alimentos consume y el sastre el que más ropa consume. (404-433)

[7.1] Saber cómo remarcarles lo que significa hallar la solución de un sistema (hallar la solución común para todas las ecuaciones que aparecen en el sistema. (1-7)

[7.1] Saber cuándo hacerles una aclaración sobre el contenido, es decir, cuándo aclararles/recalcarles que cuando se habla de ecuaciones equivalentes se refiere a ver si tienen la misma solución, en este caso les hace esa aclaración después de preguntarles si dos ecuaciones particulares (12x+4=28 y 6x+2=14) son equivalentes. (17-22)

[7.1] Saber cómo
1. Remarcarles cuándo dos ecuaciones son equivalentes (cuando tienen la misma solución).
2. Hacerles notar que las transformaciones que pueden hacer en las ecuaciones de un sistema son transformaciones elementales que pueden hacer en las matrices (matrices del sistema).
3. Darles un ejemplo de un sistema de ecuaciones para escribirlo luego en forma matricial.
4. Utilizar el problema de ese ejemplo para resolverlo usando el método de reducción de Gauss. (1-220)

[7.1] Saber cómo comprobarles que al multiplicar la matriz de coeficientes y la de las incógnitas e igualar los elementos de esa matriz resultado con la de términos independientes, dan las tres ecuaciones y luego les remarca lo que se hace para pasar un sistema de ecuaciones a forma matricial, escribirlo como en el ejemplo, una matriz de coeficientes, la matriz de las incógnitas y la matriz de términos independientes). (96-104)

[7.1] Saber cómo remarcarles cuántas y cuáles matrices tienen en un sistema de ecuaciones (*en un sistema de ecuaciones lineales tenemos en realidad cuatro matrices de las que podemos hablar, la matriz de coeficientes, la matriz de las incógnitas, la matriz de los términos independientes y la matriz ampliada*). (116-121)

[7.1] Saber cómo hacerles notar que la fila uno (F_1) ha quedado como estaba y cómo ha quedado la fila dos (F_2), después de aplicarle la transformación F_2-F_1. Luego Emi aprovecha esto que les ha hecho notar para que se fijen como quedará la tercera fila después de aplicarle la transformación F_3-F_1. (155-159)

[7.1] Saber cómo remarcarles que a pesar de las transformaciones, la solución del sistema es la misma, es decir, no cambian la solución. (170-173)

[7.1] Saber cuándo y qué hacerles notar a los estudiantes: la forma de escribir el sistema escalonado (que escriban las equis debajo de las equis (x´s), las y´s debajo de las y´s y las z´s debajo de las z´s) justo después de haber escalonado el sistema. (184-186)

[7.1] Saber cómo hacerles notar lo que queda en el sistema escalonado, en particular, el hecho de que en este caso, en la segunda ecuación, queda un sistema más cómodo porque no sólo ha desaparecido la x de la segunda ecuación, sino también la z (pues normalmente al escalonar el sistema quedan en la segunda ecuación la y y la z), como sólo tienen la y entonces pueden despejar directamente la y. (194-199)

[7.1] Saber cómo hacerles notar que al escribir la solución del sistema, atiendan a la convención matemática a cerca de escribir el valor de las incógnitas en la solución del sistema en el orden en que aparecen dadas en el sistema. (221-225)

[7.2] Saber cómo aclararles (a raíz de la respuesta incorrecta de E2, al definir las incógnitas como el número de dispositivos, dato que ya les dan y por tanto no es una incógnita –E2 tal vez quiso definir así las incógnitas por analogía con otros problemas) (Emi: *no siempre las incógnitas van a ser el mismo valor, entonces cuando ponemos las incógnitas x, y, z que ponemos en todos los problemas, no tenéis que poner siempre x para los paneles fotovoltaicos, y termosifones y z colectores, eso no tiene sentido* -en este problema). (311-318)

[8.2] Saber cómo hacerles notar tres aspectos importantes acerca de los sistemas antes de remarcarles en qué consiste el método de Gauss. 1. Que no todos los sistemas de ecuaciones lineales tienen solución. 2. Ni todos los problemas se pueden resolver a través de sistemas de ecuaciones lineales. 3. Y que una vez que se tiene un sistema de ecuaciones, lo que se pretende es hallar la solución. (46-84)

[8.2] Saber cómo remarcarles en qué consiste el método de reducción de Gauss, es decir, hacerles notar los pasos que hay que seguir: escribir la matriz ampliada, hacer ceros por debajo de la diagonal mediante transformaciones elementales, escribir el sistema equivalente escalonado, resolverlo y encontrar la solución. (85-134)

[8.2] Saber cómo aclararles por qué a un sistema se le llama sistema equivalente (porque tienen la misma solución) cuando pronuncia "sistema equivalente", al estar explicando en qué consiste el método de Gauss. (109-114)

[8.2] Saber cómo tratar de hacerles ver que el valor de las tres incógnitas forman una sola solución. (137-148)

[8.2] Saber cómo retomar la pregunta que les había hecho antes (¿Existe siempre solución? -para un sistema de ecuaciones lineales), al principio del repaso, para continuar con la introducción para presentar luego la clasificación, es decir, empieza haciéndoles notar que no siempre existe solución al sistema. (149-150)

[8.3] Saber cómo hacerles notar la forma de la solución del SCI [(x=1, y=2-λ, z=λ)]. (271-272)

[8.3] Saber cómo tratar de enfatizar lo que pasa en la tercera ecuación del ejemplo de sistema escalonado que ella les propuesto (El sistema que Emi les propone es x+y+z=3, y+z=1, 0=1). Mediante preguntas a los estudiantes los guía para que observen, en particular, lo que pasa en la tercera ecuación del sistema escalonado en un SI, para que noten que el sistema no tiene solución. (279-296)

[8.3] Saber cómo remarcarles, después de ver un ejemplo de sistema escalonado para cada tipo de sistemas, que en un sistema escalonado la tercera ecuación indica de qué tipo es el sistema (si es SCD, SCI o SI). (297-306)

[8.3] Saber cómo hacer para que se fijen en los elementos que quedan en la última fila al escalonar un sistema que es SCI, al escribir la matriz de un SCI ya escalonado, usando el siguiente esquema gráfico para representarlo $\left(\begin{array}{ccc|c} \otimes & \otimes & \otimes & \square \\ 0 & \otimes & \otimes & \square \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. (333-345)

[8.3] Saber cómo remarcarles qué se tienen que fijar cuando obtengan el sistema escalonado en una matriz ampliada para distinguir un SCD, un SCI y un SI, es decir, que en particular, deben fijarse en la tercera fila del sistema escalonado (a través de una comparación entre las distintas matrices que denotó con la representación gráfica para cada sistema anteriormente). (357-381)

[8.4] Saber cómo hacerles notar el valor del rango de la matriz ampliada ya escalonada, para cada tipo de sistema. (398-414)

[8.4] Saber cómo remarcarles las diferentes posibilidades de lo que puede ocurrir al comparar el rango de la matriz de coeficientes con el rango de la ampliada, es decir, puede ocurrir que los dos rangos sean iguales o que sean distintos, cuando son iguales hay dos situaciones diferentes, puede ocurrir que el valor del rango coincida con el número de incógnitas o que sea menor. (428-433)

[8.4] Saber cómo hacerles notar cuánto vale el rango de la matriz de coeficientes ya escalonada para cada tipo de sistema. (382-414)

Preparar actividades
CC-En29. Saber cómo prepararles un compendio de actividades a los estudiantes, para que afiancen el contenido matemático que les está enseñando. [6.1] (1-12), (13-17); [6.2.2] (334), (371-378), (465-529), (574-575).

[6.2.2] Saber cómo prepararles un compendio de actividades a los estudiantes, para que afiancen el contenido matemático que les está enseñando. Apoyarse de la fotocopia para explicar un poco la tabla donde vienen dados los datos del problema del ejemplo que está haciendo (de los que ella les preparó). (371-378)

[6.2.2] Saber cómo prepararles un compendio de actividades a los estudiantes, para que afiancen el contenido matemático que les está enseñando. Usar como recurso de apoyo la fotocopia con ejercicios que ella les preparó para que vean las ayudas, los pasos a seguir para llegar a cada una de las ecuaciones del sistema. (465-529)

[6.1] Saber cómo prepararles un compendio de actividades a los estudiantes, para que afiancen el contenido matemático que les está enseñando. Proporcionarles en fotocopias las soluciones a ejercicios propuestos (preparados por ella anteriormente) en las que aparecen detalladas las soluciones paso a paso con la intención de que aquél que los haya resuelto, revise sus soluciones; o también para que sirva de motivación para el que aún no empieza a hacerlos, que sepa que ahí puede mirar cómo se resuelve. Es decir, darles un apoyo/recurso a los estudiantes para que comprueben su aprendizaje sobre ese contenido matemático. (1-12)

[6.1] Saber qué ejercicios proponerles en la nueva fotocopia. Emi, después de proporcionarles una fotocopia en la que detalla paso a paso las soluciones a ejercicios anteriores, les da una nueva fotocopia con ejercicios propuestos donde ha incluido un poco más de laboriosidad y complejidad (matrices de orden 3). (13-17)

[6.2.2] Saber cómo prepararles un compendio de actividades a los estudiantes, para que afiancen el contenido matemático que les está enseñando. Suministrarles una fotocopia en la que viene explicado un ejemplo que ella les preparó donde explica el desarrollo paso a paso. (334)

[6.2.2] Saber qué dejarles de deberes a los estudiantes (estudiar el fin de semana y haced los ejercicios que les propuso en fotocopias para que practiquen y se preparen para el examen que harán los estudiantes la siguiente semana). (574-575)

Forma de presentarlo/representarlo o Estrategia didáctica
CC-En30. Saber cómo introducir un concepto mediante la relación de conceptos matemáticos vistos anteriormente. [7.1] (8-50), (161-165).

[7.1] Saber cómo introducir un concepto mediante la relación de conceptos matemáticos vistos anteriormente. Relacionar matrices con las matrices del sistema, es decir, relaciona matrices con sistemas de ecuaciones **[**relacionando las transformaciones elementales con matrices (1. Intercambiar una fila por otra, 2. Multiplicar una fila o dividir por un número distinto de cero y 3. A una fila sumarle otra por un número) con las transformaciones de las ecuaciones (1. Al cambiar las ecuaciones no se altera la solución del sistema, 2. Multiplicar o dividir una ecuación por un número distinto de cero, no cambia las soluciones de la ecuación, pues con esas transformaciones el sistema es equivalente. 3. Se pueden sumar las ecuaciones unas con otras y las ecuaciones que resultan son equivalentes, es decir, tienen la misma solución)**]**. (8-50)

[7.1] Saber cómo introducir un concepto mediante la relación de conceptos matemáticos vistos anteriormente. Relacionar las transformaciones elementales con la matriz escalonada, al hacerles notar que el objetivo (conseguir hacer ceros por debajo de la diagonal principal) se ha alcanzado con un solo cambio (que consiste en este caso de dos transformaciones: a) F_2-F_1 y b) F_3-F_1). (161-165)

CC-En31. Conocer diferentes formas para introducir un tópico matemático con algún dato histórico o breve reseña histórica de ese contenido matemático o saber dar una breve reseña/anécdota histórica para contextualizar un tópico. [6.2.1] (98-108), (116-151); [6.2.2] (325-529), (335-338).

[6.2.1] Saber cómo introducir un tópico con algún dato histórico o breve reseña histórica de ese contenido. Usar una mini-reseña histórica/anécdota histórica para empezar el tema y luego los sitúa y orienta el tema/contenido (les comenta, que desde siempre el hombre ha intentado resolver problemas por métodos distintos pero que ya cuando empezaron a funcionar las matemáticas lo hicieron planteando ecuaciones). (98-108)

[6.2.1] Saber cómo introducir un tópico con algún dato histórico o breve reseña histórica de ese contenido. Iniciar con un ejemplo de un problema histórico (“El problema de los bueyes”) y dar una breve reseña histórica del problema. (116-151)

[6.2.2] Saber cómo introducir un tópico con algún dato histórico o breve reseña histórica de ese contenido. En el segundo problema Emi trata de dar una pequeña introducción del problema, tratando de explicarles que dicho problema viene de un modelo (input/output) con una sociedad concreta (1 agricultor, 1 carpintero y 1 sastre), donde se pretende que haya un estado de equilibrio (gastos=ingresos). Para llegar al planteamiento del problema, Emi se apoya de una fotocopia que les preparó, pero además va desarrollando el planteamiento en la pizarra a través de preguntas, Emi se va por partes, primero trata de plantear un lado de la igualdad de las ecuaciones (los gastos) y luego la otra parte (los ingresos) hasta llegar al planteamiento de las tres ecuaciones, luego aprovecha para tratar de representar las tres ecuaciones en forma matricial. (325-529)

[6.2.2] Saber cómo introducir un tópico con algún dato histórico o breve reseña histórica de ese contenido. Presentarles una pequeña introducción al ejemplo, les habla de Leontief y su premio novel por la teoría económica sobre matrices input/output (sobre esta matriz hará el ejemplo). (335-338)

CC-En34. Saber cómo remarcarles los aspectos más relevantes del contenido para concluir un ejemplo o la presentación de un tema. [6.2.2] (530-538); [8.3] (271-275)

[6.2.2] Saber cómo remarcarles, a manera de cierre de los dos ejemplos, que lo que tienen en común los dos ejemplos vistos hoy en clase, es que los plantearon con el mismo tipo de ecuaciones (lineales). Emi aprovecha para comentarles que en este tema harán el planteamiento y luego la resolución del problema viendo qué método aplicar en cada caso. (530-538)

[8.3] Saber cómo remarcarles, al cerrar el ejemplo retomando la solución del sistema, el papel del parámetro λ en un SCI (Emi: “*Como λ no tiene un valor determinado, y puede ser cualquiera* –pues y=2-λ, *este sistema tiene infinitas soluciones y es por lo tanto un SCI”*). (271-275)

CC-En35. Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente. [6.2.1] (98-108); [6.2.2] (353-358); [7.1] (161-165); [7.2] (307-310); [8.1] (29-45).

[6.2.1] Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado. Usar una mini-reseña histórica/anécdota histórica para empezar el tema y luego los sitúa y orienta el tema/contenido (les comenta, que desde siempre el hombre ha intentado resolver problemas por métodos distintos pero que ya cuando empezaron a funcionar las matemáticas lo hicieron planteando ecuaciones). (98-108)

[6.2.2] Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado. Recapitular y orientar el ejemplo a realizar, una vez que les explica lo que son las matrices input/output. (353-358)

[7.1] Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado. Hacerles notar que el objetivo (conseguir hacer ceros por debajo de la diagonal principal) se ha alcanzado con un solo cambio (que consiste en este caso de dos transformaciones: a) F_2-F_1 y b) F_3-F_1). (161-165)

[7.2] Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado. Hacerles notar lo que tienen hasta el momento (la tabla con la información del problema, es decir, los datos) y lo que piden hacer en el problema (calcular el precio de cada uno de los tres dispositivos solares) para hacerles ver hacia donde irán ahora (a definir las variables). (307-310)

[8.1] Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado. Remarcarles lo que se ha conseguido (hacer ceros por debajo de la diagonal principal) y a lo que se ha llegado (al sistema escalonado) y que de ahí ya sólo falta despejar y sustituir para encontrar los valores de la incógnitas. (29-45)

CC-En36. Saber cómo explicarles la utilidad, aplicación, dirección/orientación del contenido en temas siguientes. [7.1] (51-54), (243-246); [8.4] (467-475).

[7.1] Saber cómo explicarles la utilidad, aplicación, dirección/orientación del contenido. Justificarles para qué van a aplicar esas transformaciones elementales. Les hace notar la utilidad de las transformaciones elementales en matrices (*porque para encontrar el valor de x, y, z debo despejar, y una forma muy fácil de despejar es haciendo un sistema escalonado*). (51-54)

[7.1] Saber cómo explicarles la utilidad, aplicación, dirección/orientación del contenido. Comentarles su punto de vista sobre las ventajas del método, es decir, hablarles sobre la utilidad del método de Gauss (*El método de reducción de Gauss, es muy simple y cómodo que facilita encontrar los valores de las incógnitas de una forma muy rápida*). (243-246)

[8.4] Saber cómo explicarles la utilidad, aplicación, dirección/orientación del contenido. Comentarles la utilidad de "las propiedades de sistemas", es decir, del teorema de Rouché-Frobenius (al escalonar la matriz podrán decir qué tipo de sistema es y por tanto saber cuántas soluciones tiene el sistema). (467-475)

CC-En39. Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último. [7.1] (8-50); [8.2] (115-131).

[7.1] Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último. Relacionar matrices con las matrices del sistema, es decir, relaciona matrices con sistemas de ecuaciones **[**relacionando las transformaciones elementales con matrices (1. Intercambiar una fila por otra, 2. Multiplicar una fila o dividir por un número distinto de cero y 3. A una fila sumarle otra por un número) con las transformaciones de las ecuaciones (1. Al cambiar las ecuaciones no se altera la solución del sistema, 2. Multiplicar o dividir una ecuación por un número distinto de cero, no cambia las soluciones de la ecuación, pues con esas transformaciones el sistema es equivalente. 3. Se pueden sumar las ecuaciones unas con otras y las ecuaciones que resultan son equivalentes, es decir, tienen la misma solución)**]**. (8-50)

[8.2] Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último. Usar la analogía entre un sistema de ecuaciones y fracciones para explicar el significado de *equivalentes*: Los sistemas son equivalentes porque tienen la misma solución y las fracciones por que al hacer la división de cada fracción da el mismo resultado. (115-131)

CC-En40. Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. [6.1] (38-69); [6.2.1] (191-194), [6.2.2] (567-571); [7.1] (55-68), (69-74), (109-110), (123-125), (166-168); [8.4] (476-480), (481-533), (522-525).

[6.1] Saber cómo explicarles la estrategia de solución del ejercicio (aplicar: una matriz y su inversa para proteger una palabra). (38-69)

[6.2.1] Saber cómo explicarles la estrategia para empezar a resolver un problema (comprender el enunciado del problema y pensar cuáles son las incógnitas para plantear las ecuaciones. (191-194)

[6.2.2] Saber cómo explicarles la estrategia para resolver SEL (hacer el planteamiento del problema, luego representarlo en forma matricial y resolverlo), a través de un sistema matricial de las ecuaciones. (567-571)

[7.1] Saber cómo explicarles la estrategia para encontrar la solución en un sistema escalonado (si el sistema ya está escalonado entonces si ya se tiene el valor de z, se sustituye en la segunda ecuación y se obtiene y, finalmente se sustituye el valor de y, z en la primera ecuación y se obtiene el valor de la x). (55-68)

[7.1] Saber cómo explicarles la estrategia para encontrar la solución en un sistema escalonado, lo cual les servirá para cuando resuelvan el sistema con el método de Gauss (*Entonces este método que consiste en escalonar el sistema, si lo aplicamos a las matrices, ¿qué es lo que debemos hacer?, ¿qué queremos conseguir? Que desaparezca la x de la segunda ecuación, y de la tercera ecuación desaparecer la x y la y, es decir, hacer cero la x y la y en la tercera ecuación*). (69-74)

[7.1] Saber cómo explicarles *grosso modo* en qué consiste el método de reducción de Gauss. Comentarles la estrategia de trabajo en el método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales (trabajar con la matriz ampliada y conseguir hacer ceros por debajo de la diagonal principal). (109-110), (123-125)

[7.1] Saber cómo explicarles la estrategia para usar el método de Gauss. Comentarles otra parte del método para continuar hallando la solución del sistema de ecuaciones (*si antes pasábamos de las ecuaciones a la forma matricial, pues ahora de la forma matricial pasaremos al sistema*). (166-168)

[8.4] Saber cómo explicarles la estrategia para poder clasificar un sistema (Emi: "*...planteamos las ecuaciones del problema, pondremos el sistema en forma matricial, aplicaremos las transformaciones elementales sobre la matriz ampliada, para* *conseguir un sistema escalonado y sobre el sistema escalonado hallamos las soluciones y ya vemos de qué tipo es, ¿de acuerdo?"*). (476-480)

[8.4] Saber cómo explicarles la estrategia para escalonar un sistema. Decidir empezar con este ejemplo en el tema de clasificar el sistema y en su caso resolverlo, Emi usa un ejemplo para clasificar qué tipo de sistema es pero suena el timbre y ya no lo terminan, sólo deja indicada la matriz ampliada y les comenta la estrategia a seguir, les deja de tarea terminarlo, hacer transformaciones elementales para escalonarlo y decir qué tipo de sistema es y si es posible hallar la solución. (481-533)

[8.4] Saber cómo explicarles parte de la estrategia a seguir en el ejemplo: localizar la diagonal principal y luego hacer ceros por debajo de la diagonal. Ese ejemplo ya no lo terminaron de hacer porque se terminó la clase pero Emi quiere que los estudiantes intenten terminarlo en casa. (522-525)

CC-En41. Saber qué es lo que hay que repetir y cómo, para aclarar dudas del contenido a los estudiantes o reafirmar algunos aspectos del contenido. (Emi, C7, p6). E4, p11A; o para reafirmar algunos aspectos del contenido. [7.1] (231-240).

[7.1] Saber qué es lo que hay que repetir para aclararle la duda a E5, sobre cómo salió la x, es decir, de dónde se obtuvo que x=1,600. (231-240)

CC-En42. Saber cómo usar la comparación entre algunas formas de hacer un ejercicio o entre varias representaciones, para destacar a los estudiantes los aspectos del contenido en los que se deben fijar. [6.2.1] (320-322); [6.2.2] (325-529); [7.1] (155-159); [8.3] (357-381); [8.4] (415-466)

[6.2.1] Saber cómo usar la comparación entre algunas formas de hacer un ejercicio o entre varias representaciones, para destacar a los estudiantes los aspectos del contenido en los que se deben fijar. Remarcarles que lo que se va a usar para resolver SEL será la técnica matricial, porque es una técnica más avanzada y más eficiente para resolver SEL, en comparación con el método de sustitución y reducción. (320-322)

[6.2.2] Saber cómo usar la comparación entre algunas formas de hacer un ejercicio o entre varias representaciones, para destacar a los estudiantes los aspectos del contenido en los que se deben fijar. En el segundo problema Emi trata de dar una pequeña introducción del problema, tratando de explicarles que dicho problema viene de un modelo (input/output) con una sociedad concreta (1 agricultor, 1 carpintero y 1 sastre), donde se pretende que haya un estado de equilibrio (gastos=ingresos). Para llegar al planteamiento del problema, Emi se apoya de una fotocopia que les preparó, pero además va desarrollando el planteamiento en la pizarra a través de preguntas, Emi se va por partes, primero trata de plantear un lado de la igualdad de las ecuaciones (los gastos) y luego la otra parte (los ingresos), y los compara hasta llegar al planteamiento de las tres ecuaciones, luego aprovecha para tratar de representar las tres ecuaciones en forma matricial. (325-529)

[7.1] Saber cómo usar la comparación entre algunas formas de hacer un ejercicio o entre varias representaciones, para destacar a los estudiantes los aspectos del contenido en los que se deben fijar. Hacerles notar que la fila uno (F_1) ha quedado como estaba y cómo ha quedado la fila dos (F_2), después de aplicarle la transformación F_2-F_1. Luego, al compararlas, Emi aprovecha esto que les ha hecho notar para que se fijen como quedará la tercera fila después de aplicarle la transformación F_3-F_1. (155-159)

[8.3] Saber cómo usar la comparación entre algunas formas de hacer un ejercicio o entre varias representaciones, para destacar a los estudiantes los aspectos del contenido en los que se deben fijar. Emi a través de una comparación entre las distintas matrices que denotó con la representación gráfica para cada sistema anteriormente, trata de hacerles notar/remarcar en qué se tienen que fijar cuando obtengan el sistema escalonado en una matriz ampliada para distinguir un SCD, un SCI y un SI, es decir, que en particular, deben fijarse en la tercera fila del sistema escalonado. (357-381)

[8.4] Saber cómo usar la comparación entre algunas formas de hacer un ejercicio o entre varias representaciones, para destacar a los estudiantes los aspectos del contenido en los que se deben fijar. Emi hace una comparación entre el rango de la matriz de coeficientes y el de la ampliada para deducir el teorema de Rouché-Frobenius que Emi le llama "propiedades de sistemas". (415-466)

CC-En43. Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. [6.2.2] (530-566); [7.1] (87-89); [8.2] (163-170); [8.3] (310-332), (333-345); [8.3] (346-356).

[6.2.2] Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. Aprovechar el poco tiempo que queda para que termine la clase para representar las ecuaciones en forma matricial y que los estudiantes ya se vayan haciendo una imagen de esa representación, aunque eso ya no sea parte del objetivo inicial propiamente, que era llegar al planteamiento de las ecuaciones del problema. (530-566)

[7.1] Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. Usar el esquema ()()=() para mostrar a los estudiantes la forma matricial en la que se puede escribir el sistema de ecuaciones (Emi escribe un paréntesis grande indicando una matriz al lado de la matriz de coeficientes que acaba de escribir, luego el igual y enseguida otros paréntesis grandes indicando que ahí irá otra matriz). (87-89)

[8.3] Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. Escribir la matriz de un SCD ya escalonado usando un esquema gráfico y representarlo. Diferencia la parte de los coeficientes de la parte de los términos independientes, los coeficientes los representa con circulito y a los términos independientes con un cuadro, quedando de la siguiente manera $\left(\begin{array}{ccc|c} \otimes & \otimes & \otimes & \square \\ 0 & \otimes & \otimes & \square \\ 0 & 0 & \otimes & \square \end{array}\right)$ Emi escribe eso a través de preguntas a los estudiantes que muchas de las veces ella misma se contesta. (310-332)

[8.3] Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. Escribir la matriz de un SCI ya escalonado, usando el siguiente esquema gráfico para representarlo $\left(\begin{array}{ccc|c} \otimes & \otimes & \otimes & \square \\ 0 & \otimes & \otimes & \square \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Emi va haciendo preguntas para que los estudiantes se fijen en los elementos que quedan en la última fila al escalonar un sistema que es SCI. (333-345)

[8.3] Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. Escribir la matriz de un SI ya escalonado, usando el siguiente esquema geométrico para representarlo $\left(\begin{array}{ccc|c} \otimes & \otimes & \otimes & \square \\ 0 & \otimes & \otimes & \square \\ 0 & 0 & 0 & \square \end{array}\right)$ Emi va escribiendo la matriz con ayuda de los estudiantes a través de preguntas a los estudiantes. (346-356)

CC-En44. Conocer la potencialidad de los esquemas gráficos para representar un contenido. [7.1] (87-89); [8.3] (310-332), (333-345), (346-356).

[7.1] Conocer la potencialidad de los esquemas gráficos para representar un contenido. Usar el esquema ()()=() para mostrar a los estudiantes la forma matricial en la que se puede escribir el sistema de ecuaciones (Emi escribe un paréntesis grande indicando una matriz al lado de la matriz de coeficientes que acaba de escribir, luego el igual y enseguida otros paréntesis grandes indicando que ahí irá otra matriz). (87-89)

[8.3] Conocer la potencialidad de los esquemas gráficos para representar un contenido. Escribir la matriz de un SCD ya escalonado usando un esquema gráfico y representarlo. Diferencia la parte de los coeficientes de la parte de los términos independientes, los coeficientes los representa con circulito y a los términos independientes con un cuadro, quedando de la siguiente manera $\left(\begin{array}{ccc|c} \otimes & \otimes & \otimes & \square \\ 0 & \otimes & \otimes & \square \\ 0 & 0 & \otimes & \square \end{array}\right)$ Emi escribe eso a través de preguntas a los estudiantes que muchas de las veces ella misma se contesta. (310-332)

[8.3] Conocer la potencialidad de los esquemas gráficos para representar un contenido. Escribir la matriz de un SCI ya escalonado, usando el siguiente esquema gráfico para representarlo $\left(\begin{array}{ccc|c} \otimes & \otimes & \otimes & \square \\ 0 & \otimes & \otimes & \square \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ Emi va haciendo preguntas para que los estudiantes se fijen en los elementos que quedan en la última fila al escalonar un sistema que es SCI. (333-345)

[8.3] Conocer la potencialidad de los esquemas gráficos para representar un contenido. Escribir la matriz de un SI ya escalonado, usando el siguiente esquema geométrico para representarlo $\left(\begin{array}{ccc|c} \otimes & \otimes & \otimes & \square \\ 0 & \otimes & \otimes & \square \\ 0 & 0 & 0 & \square \end{array}\right)$ Emi va escribiendo la matriz con ayuda de los estudiantes a través de preguntas a los estudiantes. (346-356)

CC-En45. Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan "mejor" el contenido que presenta, saber cómo evocar un concepto(s), un ejemplo, ejercicio, problema o procedimiento equivalente visto(s) o hecho(s) anteriormente, para presentar un nuevo concepto o un ejemplo del nuevo concepto, para que los estudiantes traigan a la mente ese contenido o se hagan una idea de cómo se resuelve el nuevo problema. [6.2.1] (306-319); [8.2] (115-131).

[6.2.1] Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan "mejor" el contenido que presenta. Hacerles ver/notar que con las dos primeras ecuaciones se forma un sistema de 2x2 y hacerles recordar los distintos métodos que ya conocen para resolver un sistema de 2x2 (reducción y sustitución). (306-319)

[8.2] Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan "mejor" el contenido que presenta. Usar la analogía entre un sistema de ecuaciones y fracciones para explicar el significado de *equivalentes*: Los sistemas son equivalentes porque tienen la misma solución y las fracciones por que al hacer la división de cada fracción da el mismo resultado. (115-131)

CC-En46. Saber cómo dar más confianza a los estudiantes en el resultado que han obtenido del ejemplo o ejercicio. [7.1] (218-220); [8.1] (44-45).

[7.1] Saber cómo dar más confianza a los estudiantes en el resultado que han obtenido del ejemplo o ejercicio. Comparar la solución que obtuvieron en este ejemplo con la del libro porque eso pudiera dar más confianza a los estudiantes en el resultado que han obtenido. (218-220)

[8.1] Saber cómo dar más confianza a los estudiantes en el resultado que han obtenido del ejemplo o ejercicio. Decirles que las soluciones las tienen en el libro de texto, para que ellos tengan más seguridad, Emi prevé que eso les puede dar seguridad. (44-45)

CC

CC1. Saber qué contenidos aparecen y cómo están organizados en el libro de texto. [6.2.2] (339); [7.1] (218-220).

[6.2.2] Saber los contenidos que vienen en el libro de texto. Saber que este es un ejemplo del libro. (339)

[7.1] Saber que el ejemplo con el que les presenta el método de Gauss, viene resuelto en el libro de texto. (218-220)

CPG

CPG1. Conocer estrategias para controlar la indisciplina o distracción en el aula, para atraer la atención de los estudiantes o llamar la atención a los estudiantes cuando están comportándose de manera impropia para una clase. [6.1] (18-20); [6.2.1] (168-173), (236-239).

[6.1] Controlando la indisciplina. Es una clase en viernes después del recreo, motivo por el cual los estudiantes están más inquietos y les cuesta trabajo estar en silencio, Emi intenta callarlos para poder trabajar. (18-20)

[6.2.1] Mientras Emi busca las fotocopias que les preparó, en la que aparece el planteamiento de este problema paso a paso, intenta mantener la atención de los estudiantes. (168-173)

[6.2.1] Controlando la indisciplina. Es una clase en viernes después del recreo, motivo por el cual los estudiantes están más inquietos y les cuesta trabajo estar en silencio, Emi intenta callarlos para poder trabajar. (236-239)

CPG2. Conocimiento y habilidad discursiva para hacer comentarios para tranquilizar y motivar a los estudiantes cuando los ve agobiados, decepcionados de ellos mismos o preocupados por el trabajo de clase que tienen que hacer; o porque se consideren incapaces de aprender un método para hacer ejercicios o procedimientos. [6.2.1] (93-96).

[6.2.1] Anunciarles que el nuevo tema que iniciarán en esta clase (SEL) vendrá en el siguiente examen (aproximadamente 3 ó 4 semanas después), para que no se presionen tanto pero para que lo tomen en cuenta luego. Esto tras equiparlos de fotocopias que les preparó con ejercicios propuestos y soluciones a ejercicios anteriores, para que practiquen el fin de semana y estudien para el examen que tendrán la siguiente semana. (93-96)

CPG3. Conocimiento y habilidad discursiva para motivar, re-encomendar o exigir a los estudiantes que hagan una demostración, los ejemplos o los ejercicios (para hacer en clase o de deberes). [6.1] (70-79); [7.1] (75-78).

[6.1] Emi sabe que comentarles que ya se aproxima el examen puede motivar a los estudiantes a hacer los ejercicios de ese contenido matemático (matrices). (70-79)

[7.1] Invitarlos a que ellos intenten escribir el sistema en forma matricial (*Bueno, vamos a escribir el sistema matricial con estas ecuaciones, ¿cómo podemos ponerlo en forma matricial?*, *¿qué quedaría?, ¿podéis intentadlo vosotros, la forma matricial?* -Emi pasa a supervisar el trabajo de los estudiantes). (75-78)

CPG4. Conocimiento y habilidad discursiva para preguntarles si les ha quedado claro lo que acaban de hacer, si tienen más dudas; para ver si van entendiendo lo que han visto; para acercarse al lugar de los estudiantes cuando levantan la mano porque tienen alguna duda o porque ponen cara "rara". [7.1] (217), (226), (241).

[7.1] Una forma de preguntarles si les ha quedado claro lo que acaban de hacer (encontrar los valores de las variables a partir del sistema escalonado): *¿Se fijaron cómo salen las cuentas?* (217)

[7.1] Una forma de preguntarles si les quedó claro el método, en particular el ejemplo que acaban de hacer: *¿Entonces qué os parece este método?* (226)

[7.1] Una forma de preguntarles si tienen más dudas: *¿Alguna duda más?* (241)

Emi

Programación Lineal (PL).

De los aspectos del **conocimiento común del contenido,** podemos abstraer los siguientes descriptores en términos más generales:

CCC4. Saber la operatividad, propiedades (en cuanto a su uso), utilidad o aplicación de un concepto. [11.1.2] (264-267); [11.1.3] (316-360); [11.1.4] (413-417); [13.1] (154-162); [13.2] (249-270), (379-381), (415-417).

[11.1.2] Simplificar las sumas y restas de términos semejantes (Emi sólo anota los resultados). (264-267)

[11.1.3] Saber transformar las desigualdades para dejar las incógnitas de lado izquierdo. (316-360)

[11.1.4] Saber lo que es la región factible (región formada por vértices, si es acotada entonces el problema tiene solución y si es abierta entonces el problema no tiene solución). (413-417)

[13.1] Saber que entre las restricciones se pueden juntar algunas inecuaciones, lo cual es válido matemáticamente pero que ahora es mejor dejarlas por separado, tal y como las han escrito, para resolver el problema (por ejemplo, saber que $x \geq 0$, $x \leq 100$ se puede escribir como $0 \leq x \leq 100$ pero que es mejor dejarlas como $x \geq 0$, $x \leq 100$ para solucionar el problema). (154-162)

[13.2] Saber la analogía entre el problema equivalente anterior y el que está presentando, por ser los dos problemas de transporte en PL y que de esa forma se guíen los estudiantes en el procedimiento y solución que tienen del anterior para resolver este. (249-270)

[13.2] Saber que no es lo mismo $8000-(x+y)$ que $(x+y)-8000$ y que de acuerdo al problema debe ser $8000-(x+y)$. (379-381)

[13.2] Saber que hay que simplificar la expresión matemática extensa que han obtenido de la función objetivo. (415-417)

De los aspectos del **conocimiento especializado del contenido,** podemos abstraer los siguientes descriptores en términos más generales:

CEC4. Saber la causa matemática de los errores comunes de los estudiantes. [11.1.2] (146-153); [11.1.3] (325-330); [13.1] (45-46)

[11.1.2] Saber que al definir las variables en un problema, el error de los estudiantes puede provenir del hecho de definir más de dos variables. En este caso, aunque en el problema se pudieran definir seis variables, el hecho de haber unas condiciones de demanda y de producción hace que el problema se pueda resolver con dos variables. Es al profesor al que interesa que los estudiantes se centren en resolver este tipo de problemas de PL centrados en dos variables, más que los estudiantes divaguen en definir 6 variables y no logren resolver el problema. (146-153)

[11.1.3] Saber que al hacer operaciones con desigualdades el error de los estudiantes puede provenir de la extensión de las propiedades para las igualdades a las propiedades de las desigualdades y no tener en cuenta que en una desigualdad cuando se multiplica o se divide por un número negativo, cambia de signo la desigualdad. (325-330)

[13.1] Saber que al escribir matemáticamente, el error de los estudiantes puede provenir de que no saben escribir correctamente lo que están pensando, es decir, que para resolver los problemas propuestos, no basta con pensar sino que además hay que saber escribir correctamente ese pensamiento matemático. (45-46)

CEC5. Conocer aspectos matemáticos de especial importancia para la enseñanza, lo que le permite hacer notar o distinguir la importancia de un aspecto matemático específico para enseñar el contenido matemático. [13.2] (387-391).

[13.2] Saber que el rol de “definir bien las variables” es muy importante para resolver problemas de programación lineal porque parte del éxito o fracaso en la solución el problema depende en cómo son definidas las variables. Esto es, el conocimiento matemático que viene de la reflexión que tiene el profesor a cerca de la importancia de definir bien las variables. (387-391)

De los aspectos del **conocimiento del contenido y estudiantes,** podemos abstraer los siguientes descriptores en términos más generales:

CC-Es1. Saber escuchar e interpretar el conocimiento o pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje (común o en proceso de adquisición del nuevo concepto –mezcla de lenguaje común con matemático). [13.2] (321-324); [11.1.2] (232-233).

[13.2] Saber interpretar el pensamiento matemático de E7, al aclararle que no están anotando en la tabla de distribución el coste del transporte sino sólo el transporte, el movimiento que hay de unos sitios a otros. (321-324)

[11.1.2] Saber interpretar la respuesta de E2 y orientarla a la presentación del contenido (E2 responde que el objetivo en este problema es encontrar el número de cajas que deben enviarse, Emi completa esa respuesta comentando que el número de cajas que deben enviarse pero al menor coste posible). (232-233)

CC-Es2. Saber las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre el contenido matemático. [11.1.1] (12-28).

[11.1.1] Saber las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre ese contenido matemático. En este caso Emi prevé que a E9 por su deficiencia visual le costará mucho trabajo visualizar y entender los problemas de PL, debido a que habrá dibujos y gráficas y que por tanto, E9 necesita un apoyo para entender la explicación, por lo cual Emi tomará como recurso el libro de texto pues E9 tiene ese apoyo en Braille. (12-28)

CC-Es5. Prever (anticipar) que los estudiantes se pueden quedar con una imagen o idea inadecuada del contenido. [11.1.1] (2-11); [13.1] (112-113).

[11.1.1] Prever que los estudiantes pueden tener la imagen de que los problemas de PL son muy difíciles. (2-11)

[13.1] Prever que los estudiantes se pueden quedar con la imagen de que siempre las tablas de distribución deben ser grandes y por eso les aclara que no siempre tiene porque ser así. (112-113)

CC-Es7. Saber que los estudiantes pueden equivocarse al hacer determinado cálculo o de un número o de un signo (más leve), provocado por un despiste al hacer una(s) operación(es)/transformación(es); o por no dominar el contenido que se les está presentando. [11.1.3] (319-323).

[11.1.3] Saber que los estudiantes no distingan la diferencia entre las desigualdades y las igualdades (que en las desigualdades hay ciertas operaciones que transforman la desigualdad y cambian el sentido de la desigualdad). (319-323)

CC-Es10. Saber que a los estudiantes se les puede ocurrir una respuesta intuitiva para resolver un problema. [11.1.2] (112-132), (135-153).

[11.1.2] Saber que se les pudiera ocurrir a los estudiantes esa respuesta intuitiva (que todos los refrescos salgan del supermercado más cercano para que sea más barato) para resolver el problema. (112-132)

[11.1.2] Saber que a algún estudiante se le puede ocurrir utilizar seis variables para resolver el problema, lo cual no es factible en este problema que se resuelve con dos variables. (135-153)

CC-Es11. Prever que los estudiantes no vean que un problema es equivalente a otro; o que no vean que una igualdad la pueden usar en un sentido o en otro. [13.2] (249-252).

[13.2] Prever que los estudiantes no vean que este problema es equivalente a otro problema de transporte que habían hecho anteriormente. (249-252)

CC-Es18. Prever que los estudiantes divaguen definiendo más variables de las que necesitan para resolver un problema. [13.1] (37-40).

[13.1] Prever que los estudiantes divaguen en definir más de dos variables. (37-40)

De los aspectos del **conocimiento del contenido y enseñanza,** podemos abstraer los siguientes descriptores en términos más generales:

Ejemplos

CC-En1. Saber con qué ejemplo o ejercicio empezar, cuándo y cuáles usar para enfatizar, reforzar o generalizar cierta idea. [11.1.3] (29-428).

[11.1.3] Saber con qué ejemplo empezar. Decidir hacer este problema de transporte como primer ejemplo del tema de PL (un ejemplo resuelto del libro de texto). (29-428)

CC-En3. Saber que una de las potencialidades de un ejemplo, en concreto al desarrollarlo, es utilizarlo para destacar los aspectos relevantes del contenido matemático que pretende enseñarles ese día en clase. [11.1.3] (316-360).

[11.1.3] Saber usar el ejemplo para destacar aspectos importantes del contenido. Decidir ir transformando las desigualdades en el primer ejemplo visto del nuevo tema (PL). (316-360)

CC-En6. Saber qué ejercicios dejarles de deberes para que practiquen. [11.1.4] (429-439); [13.2] (426-428).

[11.1.4] Saber qué y hasta dónde dejarles de deberes (sólo reproducir lo que han hecho en esta clase, con otro problema del libro de texto). (429-439)

[13.2] Saber qué ejercicios dejarles de deberes. (426-428)

Ayudas

CC-En7. Saber qué ayudas dar a los estudiantes en situaciones de confusión o dificultad, para que puedan dar solución a un ejercicio o resolver un problema. [11.1.2] (66).

[11.1.2] Saber qué ayudas dar a los estudiantes en situaciones de confusión o dificultad, para que puedan dar solución a un ejercicio o resolver un problema. Comentarles que los puntos de distribución normalmente son los supermercados, para que se familiaricen con el lenguaje de los problemas para escribir la tabla. (66)

CC-En8. Saber que una "buena" estrategia para que los estudiantes comprendan o hagan un ejemplo, ejercicio o problema, consiste en explicarles o hacerles hincapié en lo que quiere que hagan y para qué quiere que lo hagan o simplemente explicarles de lo que trata el ejercicio o problema. [11.1.2] (156-157); [13.1] (172-183); [13.2] (239-246), (296-297), (321-324).

[11.1.2] Saber que es bueno hacerles notar lo que representa la tabla de distribución (el número de cajas que salen de cada fábrica a cada supermercado). (156-157)

[13.1] Saber que es bueno tratar de explicarle a E1 su fallo en el planteamiento y aprovecha para destacarles el hecho de que deben saber distinguir los datos que van en cada una de las etapas y no forzar los datos para ponerlos todos en una etapa, por ejemplo no anotar datos en la tabla de distribución que no sean necesarios. (172-183)

[13.2] Sabe que es bueno hacerles notar lo que tienen (los datos y la tabla de distribución) y qué es lo que tienen que determinar en el problema (las variables), es decir, que los estudiantes vayan pensando cómo definir las variables en este problema. (239-246)

[13.2] Saber que es bueno hacerles notar que sólo ocupan de dos variables para resolver el problema, es decir, que en este caso, daría igual que escojan una ciudad a que escojan otra dado que las otras ciudades quedarían en relación a esas. (296-297)

[13.2] Saber que es bueno aclararle a E7 que no están anotando en la tabla de distribución el coste del transporte sino sólo el transporte, el movimiento que hay de unos sitios a otros. (321-324)

CC-En9. Saber cómo señalar a los estudiantes algún dato del problema que no aparece explícito y que luego se usará para dar solución a un ejercicio o resolver un problema. [11.1.2] (101-111).

[11.1.2] Saber cómo hacerles notar que se puede leer "entre líneas" en los datos del problema, es decir, que aunque no se diga en el problema que tan lejos estén las fábricas de refresco de los supermercados, se puede saber cuál supermercado está más cerca de cada fábrica si se fijan en el coste, pues depende de la distancia es el coste de transporte. (101-111)

Gestión de la participación.
Preguntas
CC-En11. Saber qué preguntas formular, no necesariamente a cierto estudiante, para presentar o mostrar específicamente lo más importante del contenido que está enseñando (algunas veces las contesta ella misma y otras los estudiantes). [11.1.2] (198-221); [13.2] (202), (221-237), (303-386).

[11.1.2] Saber qué preguntas formular para complementar la información de la tabla de distribución, a través de preguntas a los estudiantes (que se responden comparando la producción y la demanda con las variables definidas x, y). (198-221)

[13.2] Saber qué preguntas formular para hacerles preguntas para que identifiquen el tipo de problema del que se trata, pues si identifican de qué tipo es, entonces tienen una idea de cómo se resuelve por ser un problema equivalente. (202)

[13.2] Saber qué preguntas formular para ir anotando ella la tabla de distribución en la pizarra. (221-237)

[13.2] Saber qué preguntas formular para hacerles preguntas a los estudiantes para ir anotando ella la tabla de distribución en la pizarra. (303-386)

Respuestas
CC-En16. Saber qué respuestas de los estudiantes aceptar, cuáles interrumpir, cuáles ignorar o cuáles destacar, para alcanzar los objetivos de la enseñanza del contenido trazados por la profesora para esa clase. [11.1.2] (232-233).

[11.1.2] Saber qué respuestas aceptar. Emi completa la respuesta de E2 y la orienta a la presentación del contenido (E2 responde que el objetivo en este problema es encontrar el número de cajas que deben enviarse, Emi completa esa respuesta comentando que el número de cajas que deben enviarse pero al menor coste posible). (232-233)

CC-En18. Saber cómo aprovechar las respuestas incorrectas de los estudiantes para hacerles ver las consecuencias de éstas en el contenido matemático. [13.1] (141-144); [13.2] (347-352).

[13.1] Saber cómo aprovechar las respuestas incorrectas de los estudiantes para hacerles ver las consecuencias de éstas en el contenido matemático. Tratar de explicarle a E1 porque $x \geq 0$ y no $x \geq 1$. (141-144)

[13.2] Saber cómo aprovechar las respuestas incorrectas de los estudiantes para hacerles ver las consecuencias de éstas en el contenido matemático. Intentar hacer pensar a E15 sobre las consecuencias que pudieran existir si se definen las variables (incorrectas) como él propone. (347-352)

CC-En19. Saber cómo aprovechar la respuesta de un estudiante, corregirla y utilizarla para explicar algún aspecto del contenido. [13.1] (45-52), (81-110), (115-118).

[13.1] Saber cómo aprovechar la respuesta de un estudiante, corregirla y utilizarla para explicar algún aspecto del contenido. Emi aprovecha que no están bien definidas las variables que ha escrito E1 en la pizarra, para hacerles notar que deben definirlas correctamente, dar el significado exacto de cada una de las variables. (45-52)

[13.1] Saber cómo aprovechar la respuesta de un estudiante, corregirla y utilizarla para explicar algún aspecto del contenido. Aclararles lo que E1 ha anotado en la tabla de distribución y aprovechar eso para decirles lo que es correcto, lo que no es necesario y/o que está incorrecto de la tabla de distribución propuesta por E1. (81-110)

[13.1] Saber cómo aprovechar la respuesta de un estudiante, corregirla y utilizarla para explicar algún aspecto del contenido. Comentarles sobre una columna que E1 había escrito y que no es necesaria en la tabla de distribución, es decir, aprovecha para corregir lo que hizo E1 en la pizarra. (115-118)

CC-En20. Saber cómo aprovechar la respuesta de un estudiante, referente al contenido, para corregir la de otro. [13.1] (131-140).

[13.1] Saber cómo aprovechar la respuesta de un estudiante, referente al contenido, para corregir la de otro. Aprovechar la respuesta de E3 para corregir a E1, para hacerle notar que en la primera restricción es x≥0 y no x≥1, además de que y≥0. (131-140)

CC-En21. Saber cómo aprovechar las respuestas de los estudiantes, aportadas en la discusión que se presenta en el grupo para hacerles notar algún aspecto incorrecto del contenido. [13.2] (339-341).

[13.2] Saber cómo aprovechar las respuestas de los estudiantes, aportadas en la discusión que se presenta en el grupo para hacerles notar algún aspecto incorrecto del contenido. Aprovechar la discusión que se presenta con la intervención de los estudiantes para hacerles notar que no están bien definidas las variables. (339-341)

Traducir

CC-En25. Saber usar lenguaje común o más familiar a los estudiantes o una forma más explícita, más detallada, al explicar el contenido matemático para que los estudiantes lo comprendan "mejor". [11.1.1] (30-40); [11.1.3] (304-314); [13.1] (23-31); [13.2] (318-319).

[11.1.1] Saber que los estudiantes entenderán "mejor" en qué consiste el problema de transporte si se los dice en lenguaje común, lenguaje más familiar a los estudiantes. (30-40)
[11.1.1] Saber que los estudiantes entenderán "mejor" en qué consiste el problema si les explica en qué consiste el problema en lenguaje común, más familiar a los estudiantes. (30-40)

[11.1.3] Saber que si les comenta a los estudiantes esa analogía en el proceso de despeje de variables en igualdades y desigualdades, los estudiantes pueden entender "mejor" o hacerse una mejor idea de lo que quiere que hagan en las desigualdades (las variables a la izquierda y los términos independientes a la derecha. (304-314)

[13.1] Saber que los estudiantes entenderán "mejor" el problema al "traducirles" en lenguaje común, "lo que dice" el problema, es decir, desmenuzarles los datos del problema en lenguaje más familiar a los estudiantes. (23-31)

[13.2] Saber que E9 puede necesitar ayuda y acude a ella para ayudarle a identificar los datos del problema en su libro de Braille. (318-319)

Hacer notar/remarcar/destacar

CC-En26. Saber cómo (y cuándo) hacerles notar, remarcar, destacar o aclarar, puntualmente, lo más importante del contenido que está enseñando. [11.1.1] (2-11); [11.1.2] (52-63), (86-89), (222-226), (269-274); [11.1.3] (280-282), (300-302), (325-330), (390-395); [13.1] (45-46), (54-65); [13.2] (271-282), (353-359), (387-391).

[11.1.1] Saber cómo hacerles notar que aunque verán una variedad de problemas en cada uno se tratarán varios aspectos, pero en cuanto al planteamiento y la solución hay similitudes entre ellos. (2-11)

[11.1.2] Saber cómo remarcarles la importancia (para tener claros los datos del problema) de escribir los datos en una tabla como parte fundamental al comienzo del planteamiento. (52-63)

[11.1.2] Saber cómo remarcarles que es importante leer el enunciado del problema un par de veces y entender los datos del problema, antes de hacer otra cosa. Saber que un primer paso para resolver el problema es tener bien claros los datos, es decir, entender de lo que trata el problema y una vez que tengan ese entendimiento, luego intenten avanzar en las siguientes etapas de solución, es decir, resolver el problema. (86-89)

[11.1.2] Saber cómo hacerles notar que sólo con dos variables han conseguido obtener la tabla de distribución y no con seis (lo cual complicaría la resolución). (222-226)

[11.1.2] Saber cómo aclararles (sin que los estudiantes se lo pregunten) porque z se llama función objetivo (porque z es la función coste del transporte, función que depende de las variables x, y; objetivo porque lo que se quiere en el problema es conseguir que ese valor de la z sea mínimo). (269-274)

[11.1.3] Saber cómo aclararles (sin que ellos se lo pregunten) a que se le llama restricciones (a las condiciones que se dan en el problema). (280-282)

[11.1.3] Saber cómo aclararles que en los problemas de transporte, a diferencia de otros problemas de PL hay que definir las condiciones (restricciones) pues en otros problemas las restricciones las indica el mismo enunciado. (300-302)

[11.1.3] Saber cómo hacer notar a los estudiantes lo que pasa en una desigualdad cuando se multiplica o se divide por un número negativo (cambia de signo la desigualdad). (325-330)

[11.1.3] Saber cómo resaltarles algunas características de la región factible que usará luego: región cerrada, vértices y frontera. (390-395)

[13.1] Saber cómo hacerles notar la importancia de escribir adecuadamente el pensamiento matemático, es decir, no sólo pensarlo sino también escribirlo (ese es un aspecto importante en matemáticas), en este caso, saber definir adecuadamente las 2 variables para resolver el problema propuesto. (45-46)

[13.1] Saber cómo remarcarles que (54-65):

1. Se trata de un problema cuyo objetivo es diferente a los anteriores (antes se buscaba el mínimo y ahora el máximo).
2. Independientemente de que la función objetivo consista en buscar el máximo o el mínimo, el procedimiento para resolver el problema es el mismo.
3. La facilidad de identificar la función objetivo (donde diga máximo o donde diga el mínimo en el problema).

[13.2] Saber cómo hacerles notar una pequeña diferencia entre los dos problemas equivalentes, para que los estudiantes se fijen que de Brujas sólo salen lotes de mantenimiento y de Munich lotes de choque. (271-282)

[13.2] Saber cómo remarcarles que se fijen en el problema que han estado comparando con este y vean como está escrita la tabla de distribución. Emi ve que en ese momento los estudiantes se sienten desubicados/desorientados para saber definir las variables y por ello les recomienda fijarse en la tabla de distribución del problema que han estado comparando, de esa forma E2 logra definir adecuadamente las variables. Finalmente Emi les remarca que están bien definidas las variables que ha propuesto E2. (353-359)

[13.2] Saber cómo remarcarles la importancia de definir bien las variables, hacerles notar que normalmente todos los problemas de transporte se resuelven de forma similar y eso les puede servir para que se fijen como se definen las variables en este tipo de problemas de PL. (387-391)

Alertar/Prevenir

CC-En27. Saber cómo plantearles una situación hipotética para prevenirlos de error. [11.1.2] (112-132).

[11.1.2] Saber cómo plantearles una situación hipotética para prevenirlos de error. Presentarles una respuesta intuitiva que pudieran dar los estudiantes al problema (que todos los refrescos salgan del supermercado más cercano para que sea más barato) y comentarles que al dar esa respuesta puede haber varios riesgos: 1. Que la producción no fuese suficiente. 2. Que no se satisficiese la demanda. (112-132)

Forma de presentarlo/representarlo o Estrategia didáctica

CC-En34. Saber cómo remarcarles los aspectos más relevantes del contenido para concluir un ejemplo o la presentación de un tema. [11.1.3] (361-362), (370-428), [13.1] (184-186).

[11.1.3] Saber cómo remarcarles los aspectos más relevantes del contenido para concluir un ejemplo o la presentación de un tema. Cerrar lo de las desigualdades, remarcándoles el conjunto de desigualdades que han obtenido. (361-362)

[11.1.3] Saber cómo remarcarles los aspectos más relevantes del contenido para concluir un ejemplo o la presentación de un tema. Cerrar lo que han hecho hasta el momento, es decir, recapitula lo que se ha hecho (datos, variables, tabla de distribución, función objetivo y restricciones) para luego comentarles lo que falta por hacer (región factible y encontrar el mínimo analíticamente). (370-428)

[13.1] Saber cómo remarcarles los aspectos más relevantes del contenido para concluir un ejemplo o la presentación de un tema. Cerrar el ejemplo diciéndoles las etapas que conforman el planteamiento del problema y comentándoles que ya sólo les faltaría hacer la resolución del problema para terminarlo completamente. (184-186)

CC-En35. Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente. [11.1.2] (252-255); [11.1.3] (370-428); [13.1] (33-36), (184-186).

[11.1.2] Saber cómo remarcarles lo que han hecho hasta el momento, es decir, los sitúa para luego avanzar en la presentación del contenido (les hace notar que en la expresión de la función objetivo tienen lo correspondiente a la fábrica A y que falta considerar lo de la fábrica B). (252-255)

[11.1.3] Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado para orientar el contenido. Cerrar lo que han hecho hasta el momento, es decir, recapitula lo que se ha hecho (datos, variables, tabla de distribución, función objetivo y restricciones) para luego comentarles lo que falta por hacer (región factible y encontrar el mínimo analíticamente). (370-428)

[13.1] Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado para orientar el contenido. Remarcarles lo que han hecho hasta el momento y qué es lo que sigue (que sólo han escrito los datos del problema y lo que sigue es definir las variables). (33-36)

[13.1] Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado para orientar el contenido. Cerrar el ejemplo diciéndoles las etapas que conforman el planteamiento del problema y comentándoles que ya sólo les faltaría hacer la resolución del problema para terminarlo completamente. (184-186)

CC-En39. Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último. [11.1.3] (304-314).

[11.1.3] Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último. Comentarles la analogía en el proceso de despeje de variables en igualdades y desigualdades (las variables a la izquierda y los términos independientes a la derecha). (304-314)

CC-En40. Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. [11.1.2] (66), (86-89), (101-111), (133-134); [11.1.4] (425-428); [13.1] (37-40), (54-65).

[11.1.2] Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. Comentarles que los puntos de distribución normalmente son los supermercados, para que se familiaricen con el lenguaje de los problemas para escribir la tabla. (66)

[11.1.2] Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. Comentarles que es importante leer el enunciado del problema un par de veces y entender los datos del problema, antes de hacer otra cosa. Saber que un primer paso para resolver el problema es tener bien claros los datos, es decir, entender de lo que trata el problema y una vez que tengan ese entendimiento, luego intenten avanzar en las siguientes etapas de solución, es decir, resolver el problema. (86-89)

[11.1.2] Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. Comentarles que se puede leer "entre líneas" en los datos del problema, es decir, que aunque no se diga en el problema que tan lejos estén las fábricas de refresco de los supermercados, se puede saber cuál supermercado está más cerca de cada fábrica si se fijan en el coste, pues depende de la distancia es el coste de transporte. (101-111)

[11.1.2] Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. Comentarles que al solucionar un problema de PL es muy importante entender y mostrar los datos del problema. (133-134)

[11.1.4] Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. Comentarles a los estudiantes la estrategia final para encontrar analíticamente el mínimo, calculando el valor de z en cada uno de los vértices y comparar sus valores, después de escuchar el timbre que indica que la clase ha terminado y tratando de cumplir su objetivo. (425-428)

[13.1] Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. Comentarles que el problema se resuelve definiendo sólo dos variables (para evitar que los estudiantes divaguen en definir más de dos variables). (37-40)

[13.1] Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. Comentarles que (54-65):
1. Se trata de un problema cuyo objetivo es diferente a los anteriores (antes se buscaba el mínimo y ahora el máximo).
2. Independientemente de que la función objetivo consista en buscar el máximo o el mínimo, el procedimiento para resolver el problema es el mismo.
3. La facilidad de identificar la función objetivo (donde diga máximo o donde diga el mínimo en el problema).

CC-En42. Saber cómo usar la comparación entre algunas formas de hacer un ejercicio o entre varias representaciones, para destacar a los estudiantes los aspectos del contenido en los que se deben fijar. [13.2] (271-282), (353-359), (387-391).

[13.2] Saber cómo usar la comparación entre algunas formas de hacer un ejercicio o entre varias representaciones, para destacar a los estudiantes los aspectos del contenido en los que se deben fijar. Hacerles notar una pequeña diferencia entre los dos problemas equivalentes, para que los estudiantes se fijen que de Brujas sólo salen lotes de mantenimiento y de Munich lotes de choque. (271-282)

[13.2] Saber cómo usar la comparación entre algunas formas de hacer un ejercicio o entre varias representaciones, para destacar a los estudiantes los aspectos del contenido en los que se deben fijar. Evocar un ejemplo equivalente anterior. Emi vuelve a remarcarles que se fijen en el problema que han estado comparando con este y vean como está escrita la tabla de distribución. Emi ve que en ese momento los estudiantes se sienten desubicados/desorientados para saber definir las variables y por ello les recomienda fijarse en la tabla de distribución del problema que han estado comparando, de esa forma E2 logra definir adecuadamente las variables. Finalmente Emi les remarca que están bien definidas las variables que ha propuesto E2. (353-359)

[13.2] Saber cómo usar la comparación entre algunas formas de hacer un ejercicio o entre varias representaciones, para destacar a los estudiantes los aspectos del contenido en los que se deben fijar. Remarcarles la importancia de definir bien las variables, hacerles notar que normalmente todos los problemas de transporte se resuelven de forma similar y eso les puede servir para que se fijen como se definen las variables en este tipo de problemas de PL. (387-391)

CC-En43. Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. [11.1.2] (175-187); [11.1.3] (377-385).

[11.1.2] Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. Agregar en la tabla de distribución otra fila y otra columna para que esa presentación de la información ayude a los estudiantes a visualizar la información y completar la tabla de distribución en términos de las variables x, y. (175-187)

[11.1.3] Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. Decidir no resolver el sistema en ese momento, porque lo que quiere es mostrarles el aspecto de un problema de PL, es decir, la estructura de solución del problema y que los estudiantes se hagan una imagen concreta de dicha estructura. Por ello va a suponer que han resuelto las desigualdades para alcanzar a explicarles *grosso modo* lo que falta (región factible y encontrar el mínimo analíticamente). (377-385)

CC-En44. Conocer la potencialidad de los esquemas gráficos para representar un contenido. [11.1.2] (175-187).

[11.1.2] Conocer la potencialidad de los esquemas gráficos para representar un contenido. Agregar en la tabla de distribución otra fila y otra columna para que esa presentación de la información ayude a los estudiantes a visualizar la información y completar la tabla de distribución en términos de las variables x, y. (175-187)

CC-En45. Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan "mejor" el contenido que presenta, saber cómo evocar un concepto(s), un ejemplo, ejercicio, problema o procedimiento equivalente visto(s) o hecho(s) anteriormente, para presentar un nuevo concepto o un ejemplo del nuevo concepto, para que los estudiantes traigan a la mente ese contenido o se hagan una idea de cómo se resuelve el nuevo problema. [13.2] (202), (249-270), (353-359).

[13.2] Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan “mejor” el contenido que presenta. Evocar un problema de transporte que hicieron anteriormente para que identifiquen el tipo de problema del que se trata, pues si identifican de qué tipo es, entonces tienen una idea de cómo se resuelve por ser un problema equivalente. (202)

[13.2] Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan “mejor” el contenido que presenta Evocar un problema equivalente a otro que ya habían resuelto, aunque los estudiantes aparentemente no lo vean tan equivalente al otro, es decir, hacerles una analogía entre este problema y uno que ya habían hecho antes y comparar los datos de ambos problemas, de tal forma que esa comparación les sirva para ir resolviendo este problema de PL. (249-270)

[13.2] Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan “mejor” el contenido que presenta Evocar un ejemplo equivalente anterior. Emi vuelve a remarcarles que se fijen en el problema que han estado comparando con este y vean como está escrita la tabla de distribución. Emi ve que en ese momento los estudiantes se sienten desubicados/desorientados para saber definir las variables y por ello les recomienda fijarse en la tabla de distribución del problema que han estado comparando, de esa forma E2 logra definir adecuadamente las variables. Finalmente Emi les remarca que están bien definidas las variables que ha propuesto E2. (353-359)

De los aspectos del **conocimiento curricular,** podemos abstraer los siguientes descriptores en términos más generales:

CC1. Saber qué contenidos aparecen y cómo están organizados en el libro de texto. [13.1] (15-22).

[13.1] Saber que el ejemplo que hará en clase está en el libro de texto. (15-22)

De los aspectos del **conocimiento pedagógico general,** podemos abstraer los siguientes descriptores en términos más generales:

CPG5. Saber cómo estimular a los estudiantes que sí hicieron sus deberes (tareas). [13.1] (152-153).

[13.1] Tomar en cuenta a E1 porque ella hizo este ejercicio (fue la única que hizo sus deberes). (152-153)

V.1.2.2. Para el caso de Aly

Matrices

Cabe hacer notar que en el tema de matrices, al decidir cuáles clases analizar a profundidad en el segundo acercamiento del análisis, en el caso de Aly, sólo se eligió la clase 4 porque en las otras tres clases referentes a este tema, se obtienen pocos y parecidos descriptores a los de Emi, por ello decidimos analizar a profundidad sólo la clase 4, por tener mayor número y distintos descriptores del CME.

Para este tema en particular, primero escribiremos los descriptores del CME correspondientes a los aspectos detallados de cada subdominio, como se ha venido haciendo, y luego, con miras a contar con suficiente información para explicar posteriormente el caso de Aly (dado que sólo aparecen los referentes a la clase 4), haremos un agregado con subdescriptores, que corresponden a las tres clases correspondientes a este tema, estudiados sólo bajo el primer acercamiento del análisis, que dan evidencia de los descriptores distintos a los obtenidos de la clase 4.

De los aspectos del **conocimiento común del contenido,** podemos abstraer los siguientes descriptores en términos más generales:

CCC4. Saber la operatividad, propiedades (en cuanto a su uso), utilidad o aplicación de un concepto. [4.1] (61-67), (77-79), (80-87); [4.2] (176-191), (222-362), (319-342); [4.3] (422-512), (433), (527-528); [4.4] (582-594).

[4.1] Saber aplicar las propiedades de campo al despejar la X, es decir, saber que 3X-2A+2A=5B+2A luego 3X=5B+2A y que se pueden multiplicar por el escalar 1/3 y entonces X=(5B+2A)/3. (61-67), (77-79)

[4.1] Saber hacer operaciones básicas con matrices (suma, división/multiplicación por un escalar). (80-87)

[4.2] Saber aplicar las propiedades del producto de matrices (asociativa y matriz identidad). (176-191)

[4.2] Saber usar la caracterización de que A por A inversa es igual a la matriz identidad ($AA^{-1}=I$) como primer método para encontrar A inversa. (222-362)

[4.2] Saber hacer la comprobación, una vez que se obtiene la matriz inversa de A, comprobar ese resultado. (319-342)

[4.3] Saber los cambios (un cambio puede tener una o más transformaciones elementales) que necesita realizar y sus respectivas transformaciones elementales para hallar la matriz inversa, en sí, saber el método de Gauss-Jordán. (422-512)

[4.3] Saber que en la notación de una transformación elemental la primera fila que se denote es la que sufre los cambios, por ejemplo en la transformación F_1-F_2, la F_1 es la que se modifica. (433)

[4.3] Saber que dividir una fila de la matriz por 3 es lo mismo que multiplicarla por 1/3 (propiedad del producto de un escalar por una matriz). (527-528)

[4.4] Saber que estas dos propiedades $(A+B)^2$ y (A+B)(A-B) que se cumplen con los reales no se cumplen con las matrices, es decir, que en matrices $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$ y que $(A+B)(A-B) \neq A^2-B^2$. (582-594)

De los aspectos del **conocimiento especializado del contenido,** podemos abstraer los siguientes descriptores en términos más generales:

CEC4. Saber la causa matemática de los errores comunes de los estudiantes. [4.1] (118-123); [4.2] (178-181), (187-191); [4.4] (602-628).

[4.1] Saber que al aplicar la propiedad conmutativa en el producto de matrices, el error de los estudiantes puede provenir de la extensión de la propiedad conmutativa del producto en los números reales al producto en matrices. Aly usa este saber para alertar a los estudiantes de la no conmutatividad en el producto de matrices. (118-123)

[4.2] Saber que al aplicar la propiedad conmutativa y el elemento identidad en el producto de matrices, el error de los estudiantes puede provenir de la extensión de la propiedad conmutativa y elemento identidad del producto en los números reales al producto en matrices. Aly sabe que el producto de matrices no es conmutativo y que el elemento identidad en el producto de matrices no existe para matrices de cualquier orden sino sólo para matrices cuadradas. (178-181), (187-191)

[4.4] Saber que al aplicar la propiedad conmutativa en el producto de matrices, el error de los estudiantes puede provenir de la extensión de la propiedad conmutativa del producto en los números reales al producto en matrices. En este caso, usa ese conocimiento al remarcarles que el conocido desarrollo del cuadrado de un binomio y la diferencia de cuadrados para números reales no se verifica para matrices [$(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$ y $(A+B)(A-B) \neq A^2-B^2$]. (602-628)

De los aspectos del **conocimiento del contenido y estudiantes,** podemos abstraer los siguientes descriptores en términos más generales:

CC-Es7. Saber que los estudiantes pueden equivocarse al hacer determinado cálculo o de un número o de un signo (más leve), provocado por un despiste al hacer una(s) operación(es)/transformación(es); o por no dominar el contenido que se les está presentando. [4.2] (187-191); [4.3] (467-470), (492-498); [4.4] 666-667).

[4.2] Saber que los estudiantes pueden pensar que la matriz identidad en el producto de matrices existe para una matriz de cualquier orden (pero sólo existe para matrices cuadradas). (187-191)

[4.3] Saber que muchas de las veces al hacer la operación 0-1, los estudiantes pueden despistarse con ese cero y fallar en el resultado de la operación, pues ven en una fila el cero y en otra fila el 1 y saben que hay que restar 0 menos 1, pero al ver el cero pueden despistarse y equivocarse en el resultado, escribir 1 en lugar de -1. (467-470)

[4.3] Saber el error que pueden cometer los estudiantes, anticipa que al hacer ceros por debajo y por encima de la diagonal, los estudiantes pueden retroceder en lo que ya se tiene hecho, en lugar de avanzar. (492-498)

[4.4] Saber que los estudiantes pueden equivocarse, es decir que donde más se pueden equivocar es al hacer los cálculos, las operaciones en el procedimiento. (666-667)

CC-Es8. Saber que los estudiantes deben proceder ordenadamente respetando las convenciones matemáticas, para evitar confusiones y errores. [4.2] (306-308).

[4.2] Saber que los estudiantes pueden equivocarse al colocar los valores resultantes de las incógnitas, es decir, que tal vez no tengan cuidado al acomodarlos adecuadamente en la posición inicial, en su posición propuesta al plantear con esas incógnitas los elementos de la matriz inversa. (306-308)

CC-Es19. Saber que los estudiantes pueden resolver fácilmente alguna parte operacional (algún sistema de ecuaciones, alguna ecuación de segundo grado, algún determinante) del procedimiento. [4.2] (299-305).

[4.2] Saber que los estudiantes pueden resolver fácilmente 2 sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas y sin escribir el procedimiento, Aly sólo anota los valores resultantes de las incógnitas, cuyos valores representan la matriz inversa en el ejemplo. (299-305)

De los aspectos del **conocimiento del contenido y enseñanza,** podemos abstraer los siguientes descriptores en términos más generales:

Ejemplos

CC-En1. Saber con qué ejemplo o ejercicio empezar, cuándo y cuáles usar para enfatizar, reforzar o generalizar cierta idea. [4.2] (206-209); [4.4] (573-575).

[4.2] Saber con qué ejemplo presentar el método para calcular la inversa. Decidir presentarles el primer método para calcular la matriz inversa usando un ejemplo que viene resuelto en el libro de texto. (206-209)

[4.4] Saber con qué ejemplo destacar aspectos importantes del contenido. Decidir ver un ejercicio del libro porque sabe que los estudiantes pueden presuponer que se cumplen esas dos propiedades (por herencia de los números reales) y que en matrices no se cumple. Las dos propiedades que no se cumplen en matrices son $(A+B)^2$ y $(A+B)(A-B)$. (573-575)

CC-En3. Saber que una de las potencialidades de un ejemplo, en concreto al desarrollarlo, es utilizarlo para destacar los aspectos relevantes del contenido matemático que pretende enseñarles ese día en clase. [4.2] (162-209); [4.3] (538-547).

[4.2] Saber que es bueno aprovechar el ejemplo que viene resuelto en el libro de texto para hacerles notar en qué consiste el primer método para calcular la matriz inversa (usando la caracterización: $AA^{-1}=I$). (162-209)

[4.3] Saber que es bueno remarcarles la parte final del segundo ejemplo resuelto en la fotocopia para hacerles notar la situación en la que hayan logrado conseguir la diagonal 1, -1, 1 en lugar de 1, 1, 1. Aly intenta que tengan idea de cómo conseguir en la diagonal el 1, 1, 1, es decir, que sepan convertir el -1 en 1, que en ese caso sería multiplicar por -1 toda la fila donde está el -1. (538-547)

CC-En4. Saber usar ejemplos con datos concretos, en lugar de desarrollar propiedades de forma general o con ejemplos genéricos, para explicar el contenido. [4.2] (206-209).

[4.2] Saber usar ejemplos con datos concretos, en lugar de desarrollar propiedades de forma general o con ejemplos genéricos, para explicar el contenido. Decidir presentarles el primer método para calcular la matriz inversa usando un ejemplo que viene resuelto en el libro de texto. (206-209)

Ayudas
CC-En7. Saber qué ayudas dar a los estudiantes en situaciones de confusión o dificultad, para que puedan dar solución a un ejercicio o resolver un problema. [4.4] (654-656).

[4.4] Saber qué ayudas dar a los estudiantes para que puedan dar solución a un ejercicio. Comentarles la estrategia para hacer un ejercicio, les da un "empujoncito", pues ella considera que es lo que ella debe hacer para que los estudiantes empiecen a hacer el ejercicio. (654-656)

CC-En8. Saber que una "buena" estrategia para que los estudiantes comprendan o hagan un ejemplo, ejercicio o problema, consiste en explicarles o hacerles hincapié en lo que quiere que hagan y para qué quiere que lo hagan o simplemente explicarles de lo que trata el ejercicio o problema. [4.4] (641-650).

[4.4] Saber que es bueno explicarles lo que quiere que hagan (que calculen la matriz inversa con el método de Gauss) en el ejercicio y para qué quiere que lo hagan (para que vean los pasos para llegar a eso). (641-650)

Gestión de la participación.
Preguntas
CC-En12. Saber qué preguntas formular para presentar un nuevo concepto, una nueva propiedad o una clasificación. [4.2] (194-209).

[4.2] Saber qué preguntas formular para presentar un método. Aly les plantea la cuestión de existencia de la matriz inversa para introducir el tema (primer método para calcular la inversa). (194-209)

Traducir
CC-En24. Saber cómo "traducir" a los estudiantes la actividad matemática presentada por otro estudiante o cómo "traducir" alguna actividad matemática del libro de texto a su lenguaje usual. [4.1] (35-39).

[4.1] Saber cómo "traducir" a los estudiantes la actividad matemática presentada por otro estudiante o cómo "traducir" alguna actividad matemática del libro de texto a su lenguaje usual. "Traducir" a los estudiantes lo que está haciendo E2, es decir, como lo está resolviendo E2. (35-39)

Hacer notar/remarcar/destacar
CC-En26. Saber cómo (y cuándo) hacerles notar, remarcar, destacar o aclarar, puntualmente, lo más importante del contenido que está enseñando. [4.1] (70), (88-90);

[4.2] (187-191), (201-203), (218-219), (221-228), (299-305), (345-346); [4.3] (382-393), (397-402), (433), (438-439), (538-547); [4.4] (629-631).

[4.1] Saber cómo remarcarles que la dificultad es la misma en la forma que lo hace E2 y en la forma que lo ha hecho ella. (70)

[4.1] Saber cómo hacerles notar que el resultado es el mismo haciendo el ejercicio de la forma que lo hizo E2 y de la forma que lo hizo ella y remarcarles que lo importante es saber hacer el ejercicio. (88-90)

[4.2] Saber cómo destacar, al abordar las propiedades del producto de matrices, los aspectos más importantes de 2 propiedades:

1. Que en el producto de matrices AB es distinto de BA (178-181)
2. Que el elemento neutro en el producto de matrices, es sólo para matrices cuadradas. (187-191)

[4.2] Saber cómo remarcarles que no siempre existe la matriz inversa, es decir, que no todas las matrices, a pesar de ser cuadradas, tienen inversa. (201-203), (218-219)

[4.2] Saber cómo hacerles notar que en matrices, en el caso concreto de $AA^{-1}=A^{-1}A$ sí se da la conmutatividad. (221-228)

[4.2] Saber cómo hacerles notar que se trata de 2 sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas, luego sólo anota los resultados porque quiere optimizar el tiempo y considera que lo pueden resolver fácilmente. (299-305)

[4.2] Saber cómo remarcarles nuevamente la condición que se debe cumplir para que A^{-1} sea la inversa de A (que $AA^{-1}=I$). (345-346)

[4.3] Saber cómo remarcarles constantemente la estrategia para hallar la matriz inversa con el método de Gauss-Jordán mientras va desarrollando el ejemplo, para que los estudiantes no se pierdan cuando ella va haciendo las transformaciones elementales para conseguir la matriz inversa. (382-393), (397-402)

[4.3] Saber cómo remarcarles que en la primera transformación F_1-F_2 la F_1, es decir, la primera fila que se anote es la que sufre las modificaciones. (433)

[4.3] Saber cómo remarcarles que hay que hacer las transformaciones a la fila indicada de manera completa, es decir, incluyendo a la fila correspondiente de la matriz identidad, simultáneamente. (438-439)

[4.3] Saber cómo remarcarles la parte final del segundo ejemplo resuelto en la fotocopia, es decir, saber cómo hacerles notar la situación en la que hayan logrado conseguir la diagonal 1, -1, 1 en lugar de 1, 1, 1. Aly intenta que tengan idea de cómo conseguir en la diagonal el 1, 1, 1, es decir, que sepan convertir el -1 en 1, que en ese caso sería multiplicar por -1 toda la fila donde está el -1. (538-547)

[4.4] Saber cómo remarcarles que esas dos propiedades en general no se cumplen en matrices porque en las matrices el producto no es conmutativo. (629-631)

Alertar/Prevenir
CC-En27. Saber cómo plantearles una situación hipotética para prevenirlos de error. [4.3] (492-498), (520-533).

[4.3] Saber cómo plantearles una situación hipotética para prevenirlos de error. Habilidad para plantearles una situación hipotética para prevenirlos de error. En este caso, suponer que hagan una transformación elemental de manera incorrecta y que en lugar de avanzar retrocedan al diagonalizar la matriz para calcular la matriz inversa. (492-498)

[4.3] Saber cómo plantearles una situación hipotética para prevenirlos de error. Habilidad para plantearles una situación hipotética, adelantándose a una situación que podrían tener los estudiantes en ejercicios posteriores, con el objetivo de que tengan idea de lo que deben hacer ante una situación similar a la que les plantea, Aly les comenta el caso en el que en la diagonal principal obtuvieran 1, 3, 1 en lugar de 1, 1, 1; y que en ese caso sólo habría que multiplicar por 1/3 toda la fila en la que se encuentra el 3. (520-533)

Preparar actividades
CC-En29. Saber cómo prepararles un compendio de actividades a los estudiantes, para que afiancen el contenido matemático que les está enseñando. [4.3] (410-414), (548-571).

[4.3] Saber cómo prepararles un compendio de actividades a los estudiantes, para que afiancen el contenido matemático que les está enseñando. Aly les da una breve descripción de lo que verán en la fotocopia que ella les preparó para abordar la explicación del método de Gauss-Jordán para calcular la matriz inversa. (410-414)

[4.3] Saber cómo prepararles un compendio de actividades a los estudiantes, para que afiancen el contenido matemático que les está enseñando. Aly al observar que en el libro no viene la explicación para calcular la inversa, decide plasmar en una fotocopia el método de Gauss-Jordán, decirles en qué consiste y darles 3 ejemplos resueltos en los que aparecen las transformaciones elementales necesarias hasta llevar a la matriz inversa y finalmente concluye esa parte apoyándose del texto que aparece en el libro respecto a la matriz inversa. (548-571)

Forma de presentarlo/representarlo o Estrategia didáctica
CC-En30. Saber cómo introducir un concepto mediante la relación de conceptos matemáticos vistos anteriormente. [4.2] (139-152), (174-191).

[4.2] Saber cómo introducir un concepto mediante la relación de conceptos matemáticos vistos anteriormente. Antes de empezar a explicar el primer método para calcular la matriz inversa, Aly les enuncia lo que han visto (propiedades de la suma, de un producto por un número, propiedades del producto) para aterrizar en que la que les faltaba ver es la matriz inversa. Primero da un repaso de lo visto en días anteriores (las propiedades de las matrices que habían visto) para aterrizar en que, lo que les falta ver es la matriz inversa. (139-152)

[4.2] Saber cómo introducir un concepto mediante la relación de conceptos matemáticos vistos anteriormente. Aly nuevamente repasa las propiedades pero en particular las del producto de matrices hasta aterrizar en el tema que le interesa dar hoy, la matriz inversa. (174-191)

CC-En34. Saber cómo remarcarles los aspectos más relevantes del contenido para concluir un ejemplo o la presentación de un tema. [4.3] (513-519); [4.4] (632-635).

[4.3] Saber cómo remarcarles los aspectos más relevantes del contenido para concluir un ejemplo o la presentación de un tema. Para concluir la aplicación del método Aly vuelve a remarcarles de manera resumida lo que se hizo en el ejemplo. (513-519)

[4.4] Saber cómo remarcarles los aspectos más relevantes del contenido para concluir un ejemplo o la presentación de un tema. Para concluir, cerrar el ejemplo, Aly les vuelve a remarcarles que tengan cuidado cuando aparezcan esas dos propiedades en las matrices. (632-635)

CC-En35. Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente. [4.2] (139-152), (174-191); [4.3] (446-447), (478-489).

[4.2] Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente. Antes de empezar a explicar el primer método para calcular la matriz inversa, Aly les enuncia lo que han visto (propiedades de la suma, de un producto por un número, propiedades del producto) para aterrizar en que la que les faltaba ver es la matriz inversa. Primero da un repaso de lo visto en días anteriores (las propiedades de las matrices que habían visto) para aterrizar en que, lo que les falta ver es la matriz inversa. (139-152)

[4.2] Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente. Aly nuevamente repasa las propiedades pero en particular las del producto de matrices hasta aterrizar en el tema que le interesa dar hoy, la matriz inversa. (174-191)

[4.3] Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente. Remarcarles lo que se ha hecho, en particular, lo que se ha conseguido con esa transformación elemental. (446-447)

[4.3] Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente. Situarlos, detenerse y hacerles ver que ya va quedando lo deseado (ceros por debajo y por encima de la diagonal principal), además aprovecha para preguntarles cómo conseguir el último cero que falta hacer para terminar el ejemplo. (478-489)

CC-En36. Saber cómo explicarles la utilidad, aplicación, dirección/orientación del contenido en temas siguientes. [4.3] (348-351).

[4.3] Saber cómo explicarles la utilidad, aplicación, dirección/orientación del contenido en temas siguientes. Comentarles la utilidad de un contenido matemático abordado anteriormente, es decir, evocarles ese contenido anterior para que se ubiquen y se hagan una idea de lo que se va a hacer ahora. (348-351)

CC-En40. Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. [4.2] (240-291); [4.3] (374-512); [4.4] (654-656).

[4.2] Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. Comentarles la estrategia para utilizar el primer método para calcular la matriz inversa ($AA^{-1}=I$) (1er. método) (240-291):

1. Anotar la condición $AA^{-1}=I$
2. Denotar como incógnitas a los elementos de la matriz A^{-1}
3. Verificar el orden de cada una de las matrices
4. Calcular $AA^{-1}=I$
5. Plantear la estrategia para encontrar los valores de las incógnitas de la matriz inversa, es decir, resolver el sistema de ecuaciones que se obtienen y de ahí encontrar los valores de A^{-1}.

[4.3] Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. Comentarles la estrategia para utilizar el segundo método para calcular la matriz inversa (Gauss-Jordán) (374-512): (Para ello Aly se basa en lo que aparece en la fotocopia que ella les preparó)

1. Colocar la matriz A y al lado la matriz identidad.
2. Comentarles la estrategia a seguir para encontrar la inversa, es decir, hacer transformaciones elementales para hacer ceros en los elementos por debajo y por encima de la diagonal de la matriz A y lograr hacer unos en la diagonal principal.
3. Realizar los cambios y transformaciones elementales necesarias.

[4.4] Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. Aly les comenta la estrategia para hacer un ejercicio, les da un "empujoncito", pues ella considera que es lo que ella debe hacer para que los estudiantes empiecen a hacer el ejercicio. (654-656)

CC-En42. Saber cómo usar la comparación entre algunas formas de hacer un ejercicio o entre varias representaciones, para destacar a los estudiantes los aspectos del contenido en los que se deben fijar. [4.1] (70), (88-90).

[4.1] Saber cómo usar la comparación entre algunas formas de hacer un ejercicio o entre varias representaciones, para destacar a los estudiantes los aspectos del contenido en los que se deben fijar. Remarcarles que la dificultad es la misma en la forma que lo hace E2 y en la forma que lo ha hecho ella. (70)

[4.1] Saber cómo usar la comparación entre algunas formas de hacer un ejercicio o entre varias representaciones, para destacar a los estudiantes los aspectos del contenido en los que se deben fijar. Hacerles notar que el resultado es el mismo haciendo el ejercicio de la forma que lo hizo E2 y de la forma que lo hizo ella y remarcarles que lo importante es saber hacer el ejercicio. (88-90)

CC-En45. Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan "mejor" el contenido que presenta, saber cómo evocar un concepto(s), un ejemplo, ejercicio, problema o procedimiento equivalente visto(s) o hecho(s) anteriormente, para presentar un nuevo concepto o un ejemplo del nuevo concepto, para que los estudiantes traigan a la mente ese contenido o se hagan una idea de cómo se resuelve el nuevo problema. [4.2] (231-232); [4.3] (460), (489).

[4.2] Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan "mejor" el contenido que presenta. Evocar un ejercicio equivalente, comentarles la analogía del ejercicio a hacer con el ejercicio hecho anteriormente, es decir, les comenta que este ejercicio es parecido a un ejercicio que hicieron anteriormente. (231-232)

[4.3] Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan "mejor" el contenido que presenta. Evocar que hacer transformaciones elementales es algo que ya han estado trabajando anteriormente en clase, para que los estudiantes adquieran mayor seguridad al desarrollar el método. (460), (489)

De los aspectos del **conocimiento curricular,** podemos abstraer los siguientes descriptores en términos más generales:

CC3. Saber qué contenido deben aprender los estudiantes aunque no aparezca en el libro de texto. [4.2] (216); [4.3] (548-571).

[4.2] Saber que el método de Gauss-Jordán no es el más rápido pero hay que verlo porque es parte del currículo. (216)

[4.3] Saber qué contenidos deben aprender los estudiantes aunque no aparezcan en el libro de texto (método de Gauss-Jordán). (548-571)

De los aspectos del **conocimiento pedagógico general,** podemos abstraer los siguientes descriptores en términos más generales:

CPG1. Conocer estrategias para controlar la indisciplina o distracción en el aula, para atraer la atención de los estudiantes o llamar la atención a los estudiantes cuando están comportándose de manera impropia para una clase. [4.4] (595-597).

[4.4] Controlar la indisciplina. Algunos estudiantes están hablando indisciplinadamente y Aly les pregunta ¿qué pasa por ahí? y el estudiante que más hablaba dijo que nada, entonces se callan y Aly continúa con la explicación de la no conmutatividad en el producto de matrices. (595-597)

Agregado de subdescriptores (al menos uno, que da evidencia de los descriptores distintos a los obtenidos de la clase 4), referentes a las tres clases correspondientes al tema de matrices[3].

CCC

CCC1. Saber la definición del concepto, regla, propiedad, teorema o método que está presentando. [1] (11), (143-150), (155-158), (169-172), (246-258), (260-281), (387-390), (450-452).

Saber lo que es una matriz. [1] (11)
Saber la definición de matriz cuadrada. [1] (143-150)
Saber la definición de vector fila y vector columna. [1] (155-158), (169-172)
Saber la definición de igualdad de matrices. [1] (246-258)
Saber la definición de diagonal principal y diagonal secundaria. [1] (260-281)
Saber la definición de matriz simétrica y triangular. [1] (387-390), (450-452)

CCC2. Saber usar términos y notación matemática (que aparece en las definiciones formales). [1] (179-228), (246-258).

Saber la notación matemática para denotar una matriz genérica de orden mxn. [1] (179-228)

Saber la notación matemática para denotar la igualdad de matrices. [1] (246-258)

CC-Es

CC-Es13. Saber que para los estudiantes será más comprensible un tema si lo ven con un ejemplo concreto que aparece en el libro de texto. [2] (9-178), (299-387).

Saber que los estudiantes pueden comprender mejor cómo calcular la traspuesta de una matriz, al hacer el ejercicio con 6 apartados propuesto en el libro de texto. [2] (9-178)

Saber que los estudiantes pueden comprender mejor cómo calcular la matriz E=2A-3B+C-2D (conociendo los valores de la matriz A, B, C y D), al hacer el ejercicio propuesto en el libro de texto. [2] (299-387)

CC-Es14. Saber que los estudiantes entenderán “mejor” el ejemplo si antes de empezar a hacerlo les remarca las principales características del concepto que usará en el ejemplo. [1] (8-13).

---

[3] Se ha realizado un rastreo de las tres restantes clases transcritas de Aly (correspondientes al tema de matrices), buscando evidencia de los descriptores de los que no se poseía evidencia en la clase 4. Se busca la evidencia pero no la frecuencia, con que aparezca una sola vez el descriptor, se hace notar, dado que nuestro objetivo principal es identificar las componentes del CME. En cuanto a estructura en la escritura para el agregado, se continúa con la misma: descriptor y luego subdescriptor.

Saber que los estudiantes entenderán "mejor" el ejemplo si antes de empezar a hacerlo les remarca las principales características del concepto que usará en el ejemplo. Remarcarles la importancia de la posición de los elementos, el orden por filas y por columnas en el concepto de matriz, antes de hacer los ejemplos. [1] (8-13)

CC-En

Ejemplos
CC-En6. Saber qué ejercicios dejarles de deberes para que practiquen. [1] (548-549).

Saber qué dejarles de deberes que hagan un ejercicio parecido al que hicieron en esa clase. [1] (548-549)

Gestión de la participación.
Preguntas
CC-En11. Saber qué preguntas formular, no necesariamente a cierto estudiante, para presentar o mostrar específicamente lo más importante del contenido que está enseñando (algunas veces las contesta ella misma y otras los estudiantes). [3] (50-51).

Saber qué preguntas formular para orientarlas al contenido que quiere presentar, por ejemplo, para explicarles cómo se hace el producto de una matriz fila por una matriz columna. [3] (50-51)

CC-En15. Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático para ir guiando la solución de un ejemplo o ejercicio, resolver un problema o hacer una representación gráfica. [3] (73-161).

Saber qué preguntas formular para ir guiando la solución del ejemplo que ella misma propone, para hacerles notar que el producto de dos matrices no es conmutativo. [3] (73-161)

Respuestas
CC-En16. Saber qué respuestas de los estudiantes aceptar, cuáles interrumpir, cuáles ignorar o cuáles destacar, para alcanzar los objetivos de la enseñanza del contenido trazados por la profesora para esa clase. [1] (52), (117).

Saber qué respuestas aceptar. Aceptar la respuesta de E2 porque da un dato para construir el ejemplo de matrices. [1] (52)

Saber qué respuestas aceptar. Aceptar la respuesta de E2 porque es adecuada para explicar la dimensión de una matriz. [1] (117)

CC-En17. Saber cómo orientar una respuesta correcta a un lenguaje matemático aceptado en la matemática escolar, es decir, atendiendo o enfocado a una convención matemática. [2] (9-13).

Saber cómo orientar la respuesta de E5 a una convención matemática, Aly pregunta de qué orden es la matriz y E5 contesta que es de 2x3 (E5 dice primero el número de columnas y luego el de filas), a lo cual Aly vuelve a preguntar: De 2x3, ¿estás seguro?.

E5 contesta que no, que es de 3x2 (E5 ahora sí dice primero el número de filas y luego el de columnas). [2] (9-13)

CC-En19. Saber cómo aprovechar la respuesta de un estudiante, corregirla y utilizarla para explicar algún aspecto del contenido. [2] (9-13).

Saber cómo aprovechar la respuesta de E5 para hacerles ver que al decir el orden de una matriz es muy importante decir primero el número de filas y luego el de columnas y no al revés, porque no es lo mismo. [2] (9-13)

Traducir
CC-En25. Saber usar lenguaje común o más familiar a los estudiantes o una forma más explícita, más detallada, al explicar el contenido matemático para que los estudiantes lo comprendan "mejor". [1] (11), (143-150), (155-158), (169-172), (246-258), (260-281), (387-390), (450-452).

Saber que los estudiantes pueden comprender mejor la definición de matriz, matriz cuadrada, de vector fila y vector columna, igualdad de matrices, diagonal principal y diagonal secundaria, matriz simétrica y triangular, si se las explica en lenguaje común o de manera detallada. [1] (11), (143-150), (155-158), (169-172), (246-258), (260-281), (387-390), (450-452)

Forma de presentarlo/representarlo o Estrategia didáctica
CC-En32. Saber distintas formas de presentar/representar la definición de un concepto: en forma genérica y no con números concretos. [1] (179-228).

Saber distintas formas de presentar/representar la definición de un concepto: en forma genérica y no con números concretos. Presentar el concepto de matriz con una matriz genérica de orden mxn. [1] (179-228)

CC-En39. Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último. [3] (317-318), (322-329).

Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último. Para presentar las propiedades de la suma en matrices, Aly recurre a la familiaridad que pudieran tener los estudiantes con las propiedades de la suma de los números reales. [3] (317-318), (322-329)

CC-En41. Saber qué es lo que hay que repetir y cómo, para aclarar dudas del contenido a los estudiantes o reafirmar algunos aspectos del contenido. [3] (698-701).

Saber qué es lo que hay que repetir y cómo, para aclarar dudas del contenido a los estudiantes o reafirmar algunos aspectos del contenido. Repetir el procedimiento para explicarle a E9 de dónde salió un elemento de la matriz producto. [3] (698-701)

CC-En43. Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. [1] (260-281).

Saber que si usar un esquema gráfico (cuadrado y rectángulo) para presentarles la definición de diagonal principal y diagonal secundaria, los estudiantes visualizarán mejor esos dos términos. [1] (260-281)

CC-En44. Conocer la potencialidad de los esquemas gráficos para representar un contenido. [1] (260-281).

Conocer la potencialidad de los esquemas gráficos para representar un contenido. Usar un esquema gráfico (cuadrado y rectángulo) para presentarles la definición de diagonal principal y diagonal secundaria. [1] (260-281)

CC

CC1. Saber qué contenidos aparecen y cómo están organizados en el libro de texto. [1] (82), (237).

Comentarles que lo referente a nomenclatura y definiciones de matrices está en el libro de texto. [1] (82), (237)

CPG

CPG3. Conocimiento y habilidad discursiva para motivar, re-encomendar o exigir a los estudiantes que hagan una demostración, los ejemplos o los ejercicios (para hacer en clase o de deberes). [2] (179-182).

Hacerles un comentario a los estudiantes que ni siquiera intentaron hacer los ejercicios que había dejado como deberes (calcular la matriz traspuesta de 6 matrices), decirles: "si en esto que es tan facilito no nos paramos a intentarlo, pues esto ya se va complicando más cada vez". [2] (179-182)

CPG4. Conocimiento y habilidad discursiva para preguntarles si les ha quedado claro lo que acaban de hacer, si tienen más dudas; para ver si van entendiendo lo que han visto; para acercarse al lugar de los estudiantes cuando levantan la mano porque tienen alguna duda o porque ponen cara "rara". [2] (154), (286), (430).

Preguntarles normalmente, cuando terminan de hacer un ejercicio: *¿de acuerdo?* [2] (154), (286), (430)

CPG5. Saber cómo estimular a los estudiantes que sí hicieron sus deberes (tareas). [2] (44-70).

Tomar en cuenta a E7 que hizo sus deberes de calcular la matriz traspuesta (aunque no todos los 6 apartados), al revisar en clase la respuesta. [2] (44-70)

Aly

Determinantes

De los aspectos del **conocimiento común del contenido,** podemos abstraer los siguientes descriptores en términos más generales:

CCC1. Saber la definición del concepto, regla, propiedad, teorema o método que está presentando. [6.2] (62-72); [6.3] (218-222), (278-283), (301-310), (341-342), (355-365), (422-425), (469-471), (505-507), (630-633); [7.3.1] (176-230); [7.3.3] (317-323), (351-366); [7.4] (383-398); [8.1.1] (84-100); (125-127); [8.2.1] (281-283), (306-308), (309-312), (364-373).

[6.2] Saber que el determinante de una matriz se representa con un número. (62-72)

[6.2] Saber la definición del determinante de cualquier matriz cuadrada. (135-140)

[6.3] Saber la primera propiedad de los determinantes, que el determinante de una matriz A coincide con el de su traspuesta. (218-222)

[6.3] Saber la segunda propiedad de los determinantes, si una fila o columna es cero entonces el determinante vale cero. (278-283)

[6.3] Saber la tercera propiedad de los determinantes, si se cambia una fila o columna entonces el determinante cambia de signo. (301-310)

[6.3] Saber la cuarta propiedad de los determinantes, si un determinante tiene dos filas o dos columnas iguales, el determinante vale cero. (341-342)

[6.3] Saber la quinta propiedad de los determinantes, si existe un múltiplo común en toda una fila o columna, ese múltiplo puede salir del determinante y el determinante queda más simplificado (quedaría el número que se saca multiplicado por el determinante simplificado). (355-365)

[6.3] Saber la sexta propiedad de los determinantes, si existe una proporcionalidad entre dos filas o dos columnas, el determinante vale cero. (422-425)

[6.3] Saber la séptima propiedad de los determinantes, si una fila o columna es suma de dos números, su determinante puede descomponerse en la suma de los determinantes de dos matrices. (469-471)

[6.3] Saber la octava propiedad de los determinantes, un determinante formado por dos filas (o dos columnas) es el mismo que si a una de las dos filas (o columnas) le sumo una combinación lineal de la otra. (505-507)

[6.3] Saber la novena propiedad de los determinantes, el determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes. (630-633)

[7.3.1] Saber en qué consiste la regla de Sarrus. (176-230)

[7.3.3] Saber la propiedad de que el determinante de una matriz triangular superior es igual al producto de los tres elementos de la diagonal principal. (317-323)

[7.3.3] Saber la propiedad de que el valor del determinante de una matriz con ceros debajo de la diagonal secundaria, da como resultado: menos el producto de la diagonal secundaria. Esto como deducción de una propiedad anterior (que el determinante de una matriz triangular superior es igual al producto de los tres elementos de la diagonal principal). (351-366)

[7.4] Saber que se puede generalizar una propiedad de los determinantes de orden dos para determinantes de orden tres (de proporcional a combinación lineal) y generalizar esa propiedad. (383-398)

[8.1.1] Saber la propiedad de los determinantes $\begin{vmatrix} a+b & e \\ c+d & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & e \\ d & f \end{vmatrix}$. (84-100)

[8.1.1] Saber la propiedad de que si en un determinante una fila es proporcional a otra, entonces el determinante vale cero. (125-127)

[8.2.1] Saber lo que es un menor. (281-283), (306-308), (309-312)

[8.2.1] Saber la definición de adjunto de un elemento de una matriz cuadrada. (364-373)

CCC2. Saber usar términos y notación matemática (que aparece en las definiciones formales). [6.2] (104); [6.3] (218-222), (278-283), (304-310), (343-346), (355-365), (426-431), (472-480), (508-512); [8.2.1] (302-305); [8.2.2] (526-562).

[6.2] Saber usar la notación matemática para representar el determinante. (104)

[6.3] Saber la notación matemática para representar la primera propiedad de los determinantes (de una matriz cuadrada de orden 2). (218-222)

[6.3] Saber la notación matemática para representar la segunda propiedad de los determinantes (de una matriz cuadrada de orden 2). (278-283)

[6.3] Saber la notación matemática para representar la tercera propiedad de los determinantes (de una matriz cuadrada de orden 2). (304-310)

[6.3] Saber la notación matemática para representar la cuarta propiedad de los determinantes (de una matriz cuadrada de orden 2). (343-346)

[6.3] Saber la notación matemática para representar la quinta propiedad de los determinantes (de una matriz cuadrada de orden 2). (355-365)

[6.3] Saber la notación matemática para representar la sexta propiedad de los determinantes (de una matriz cuadrada de orden 2). (426-431)

[6.3] Saber la notación matemática para representar la séptima propiedad de los determinantes (de una matriz cuadrada de orden 2). (472-480)

[6.3] Saber la notación matemática para representar la octava propiedad de los determinantes (de una matriz cuadrada de orden 2). (508-512)

[8.2.1] Saber la notación de un menor (en este caso, saber que se escriben como determinantes y no como matrices). (302-305)

[8.2.2] Saber la notación para indicar los adjuntos por línea para calcular el determinante de una matriz genérica de orden tres. (526-562)

CCC4. Saber la operatividad, propiedades (en cuanto a su uso), utilidad o aplicación de un concepto. [6.1] (25-33); [6.2] (74-81), (89-90), (97-99), (109), (105-108), (116-123), (124-129), (135-140) (141-157); [6.3] (224-264), (251-264), (272-292), (320-337), (347-352), (366-401), (432-458), (481-499), (517-572), (582-606); [7.1] (16-18), (47-51), (67-74) ; [7.21] (79-84), (118-119); [7.2.2] (131-138), (142-143), (148-158); [7.3.2] (251-252), (289-290); [7.3.3] (337-350); [7.4] (402-416); [7.5] (440-444), (445-448), (451-455); [8.1.1] (14-18), (38-55), (56-75), (101-145); (142); [8.1.2] (185-189), (194-200), (213-217), (250-252), (218-220), (234-236); [8.2.1] (328-361); (407); [8.2.1] (408-426), (439-447), (452-454); [8.2.2] (475-480), (483-486).

[6.1] Saber el rol que juega la matriz y el rango de la matriz para determinar la dependencia o independencia lineal. Saber que si los estudiantes miran la matriz y el rango de la matriz que acaban de obtener, de ahí pueden decidir la dependencia o independencia lineal. (25-33)

[6.2] Saber cómo se obtiene el determinante de una matriz de orden 2x2. (74-81), (105-108), (116-123)

[6.2] Saber que la clasificación de los sistemas de ecuaciones tiene mucho que ver con los elementos de la matriz de coeficientes, saber que para conocer dicha clasificación, hay que hacer el determinante de la matriz de coeficientes y ver si el resultado es cero o distinto de cero. (89-90), (97-99), (109), (124-129)

[6.2] Saber aplicar la definición del determinante a un ejemplo concreto de una matriz de 2x2. (141-157)

[6.3] Saber aplicar la primera propiedad de los determinantes a un ejemplo concreto (de una matriz cuadrada de orden 2). (224-264)

[6.3] Saber que el det A = det A^t por la conmutatividad del producto en los números reales, a pesar de que se haya cambiado el orden de los elementos de la diagonal secundaria. (251-264)

[6.3] Saber aplicar la segunda propiedad de los determinantes a un ejemplo concreto (de una matriz cuadrada de orden 2). (272-292)

[6.3] Saber aplicar la tercera propiedad de los determinantes a un ejemplo concreto (de una matriz cuadrada de orden 2). (320-337)

[6.3] Saber aplicar la cuarta propiedad de los determinantes a un ejemplo concreto (de una matriz cuadrada de orden 2). (347-352)

[6.3] Saber aplicar la quinta propiedad de los determinantes a un ejemplo concreto (de una matriz cuadrada de orden 2). (366-401)

[6.3] Saber aplicar la sexta propiedad de los determinantes a un ejemplo concreto (de una matriz cuadrada de orden 2). (432-458)

[6.3] Saber aplicar la séptima propiedad de los determinantes a un ejemplo concreto (de una matriz cuadrada de orden 2) y proponer ella misma el ejemplo como el que pudiera aparecer en cualquier libro de texto. (481-499)

[6.3] Saber aplicar la octava propiedad de los determinantes a un ejemplo (de una matriz cuadrada de orden 2)) y proponer ella misma el ejemplo como el que pudiera aparecer en cualquier libro de texto. (517-572), (582-606)

[7.1] Saber que no se puede resolver el determinante a partir de lo que está [p q (en la primera fila) y r s (en la segunda fila)] porque se tendría una ecuación con cuatro incógnitas (en el ejercicio dan el dato de que el determinante de p q (en la primera fila) y r s (en la segunda fila) vale cuatro). (16-18)

[7.1] Saber usar la propiedad de los determinantes de que se puede sacar del determinante el término común que exista entre filas o columnas, tantas veces como en filas o columnas aparezca y eso multiplicarlo por el determinante que queda. (47-51)

[7.1] Saber que $|AA^{-1}|=|A||A^{-1}|$, es decir, saber la propiedad del producto de determinantes y saber la propiedad de $AA^{-1}=I$ y entonces usarla para: $|A||A^{-1}|=|I|=1$ y entonces $|A^{-1}|=1/4$. (67-74)

[7.21] Saber que las respuestas a los dos apartados del problema que está haciendo E12 son correctos, es decir, saber calcular el determinante de orden 2. (79-84)

[7.21] Saber que las razones que da E12 para justificar por qué el determinante da cero en el apartado c), d), e) y f) son correctas, es decir, saber aplicar las propiedades de los determinantes. En particular, saber que en el c), el determinante da cero porque hay una columna de ceros; en el apartado d), el determinante da cero porque dos columnas son iguales; en el apartado e), saber que el determinante da cero porque la segunda fila es siete veces la primera. (96-112) Y en el apartado f), saber que el determinante da cero porque la columna 1 es menos 20 veces la columna 2. (118-119)

[7.2.2] Saber que la respuesta de E9 es correcta (que como piden calcular ese determinante que es el mismo que el de partida sólo que con las filas cambiadas, entonces cambia de signo y el resultado es 13). (131-138)

[7.2.2] Saber que $|6A|\neq 6|A|$, en este caso es $6(6)|A|$ pues A es de orden 2x2. (142-143)

[7.2.2] Saber usar la propiedad del determinante (de sacar un término común de una columna del determinante) para saber que es correcta la respuesta de E9. (148-158)

[7.3.2] Saber que entre más ceros haya dentro del determinante mejor, pues los cálculos para encontrar el valor del determinante son más sencillos. (251-252), (289-290)

[7.3.3] Saber que la propiedad se cumple porque el desarrollo de Sarrus siempre es el mismo y entonces eso siempre va a pasar para determinantes de matrices de orden 3 (que el determinante de una matriz triangular superior es igual al producto de los tres elementos de la diagonal principal). (337-350)

[7.4] Saber por qué da cero esa nueva propiedad para determinantes de orden tres o generalización de su equivalente en determinantes de orden dos. Saber que en la nueva propiedad de los determinantes de orden tres (si en un determinante existe una combinación lineal entre las filas entonces el determinante vale cero), el determinante vale cero porque al haber una combinación lineal entre las filas, pueden separar ese determinante como suma de dos determinantes y ver que en cada determinante sumando existe una fila que es proporcional a otra y entonces cada uno de los sumandos es cero. (402-416)

[7.5] Saber por qué el |A|=0 en el apartado a), es decir, saber que es debido a que $F_2=0$ (en toda la fila dos los elementos son cero). (440-444)

[7.5] Saber por qué el |A|=0 en el apartado b), es decir, saber que es debido a que $F_3=-2F_1$. (445-448)

[7.5] Saber por qué el |A|=0 en el apartado c), es decir, saber que es debido a que $F_3=10F_2+F_1$. (451-455)

[8.1.1] Saber aplicar la propiedad de los determinantes en la que si un número está multiplicando a todos los elementos en una fila entonces se puede sacar ese número del determinante, es decir, $\begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$. En el primer apartado (14-18) y en el segundo apartado (27-30), (56-75).

[8.1.1] Saber aplicar el otro sentido de la igualdad, es decir, $a\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$ para terminar el ejercicio. (38-55)

[8.1.1] Saber aplicar la propiedad $\begin{vmatrix} a+b & e \\ c+d & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & e \\ d & f \end{vmatrix}$ para dar respuesta al tercer apartado del ejercicio. (101-145)

[8.1.1] Saber usar la propiedad de que si en un determinante existen dos filas idénticas entonces el determinante vale cero. (142)

[8.1.2] Saber usar la propiedad de que si en un determinante dos filas son iguales entonces el determinante vale cero. (185-189)

[8.1.2] Saber usar la propiedad de que si en un determinante existe una fila o columna en la que todos sus elementos son cero, entonces el determinante vale cero. (194-200)

[8.1.2] Saber usar la propiedad de que si en un determinante una fila o columna es combinación lineal de otra, entonces el determinante vale cero. (213-217), (250-252)

[8.1.2] Saber que todas las propiedades que han visto para determinantes de orden 2 y 3, también se pueden aplicar en general a cualquier determinante, es decir, de cualquier orden. (218-220)

[8.1.2] Saber que las propiedades de los determinantes son importantes sobre todo para calcular determinantes de orden mayor a tres. (234-236)

[8.2.1] Saber cómo encontrar el menor complementario de un elemento. (328-361)

[8.2.1] Saber generalizar todos los menores que pudieran salir de orden 2 (Aly: *Cualquier submatriz de orden 2x2, su determinante, sería un menor*). (407)

[8.2.1] Saber calcular el menor complementario de un elemento (incluye saber aplicar la regla de Sarrus para calcular un determinante de orden 3). (408-426)

[8.2.1] Saber calcular el adjunto de un elemento. (439-447)

[8.2.1] Saber la utilidad de encontrar el adjunto de un elemento (Aly: *Nos sirve para desarrollar determinantes mayores que no sean de orden 3, que sean de orden 4, de orden 5*). (452-454)

[8.2.2] Saber calcular un determinante de orden tres mediante adjuntos eligiendo la primera fila. (475-480)

[8.2.2] Saber cómo se escribiría la solución al calcular un determinante mediante adjuntos. (483-486)

De los aspectos del **conocimiento especializado del contenido,** podemos abstraer los siguientes descriptores en términos más generales:

CEC4. Saber la causa matemática de los errores comunes de los estudiantes. [6.3] (294-300), (314-318); [7.1] (21-46); [7.2.2] (142-143), (144-145); [7.3.1] (169-173); [7.5] (449-450); [8.1.1] (111-116).

[6.3] Saber que al hacer cambio de fila o de columna en un determinante, el error de los estudiantes puede provenir de la analogía de cuando hacían cambio de fila en una matriz bajo una transformación elemental. Si se hace un cambio de fila o de columna en el determinante, el resultado del determinante se verá afectado, a diferencia de cuando hacían cambio de fila en una matriz bajo una transformación elemental. (294-300), (314-318)

[7.1] Saber que al aplicar la quinta propiedad de los determinantes (si existe un múltiplo común en toda una fila o columna, ese múltiplo puede salir del determinante y el determinante queda más simplificado, quedaría el número que se saca multiplicado por el determinante simplificado) de manera recursiva, el error de los estudiantes puede provenir de la igualdad $|\alpha A|=\alpha|A|$, es decir, de la idea matemática de sacar una sola vez el múltiplo común del determinante y no recursivamente. En matrices, si A es una matriz cuadrada de orden 2, entonces $|\alpha A|=\alpha.\alpha|A|\neq|\alpha A|$, es decir, $|\alpha A|\neq\alpha|A|$, pues ahora depende del orden de la matriz cuadrada A, el número de veces que quede multiplicado el múltiplo común por él mismo y todo ello multiplicado por el determinante de la matriz cuadrada A. En este caso $|11A|=11.11|A|\neq 11|A|$, A es una matriz cuadrada de orden 2. (21-46)

[7.2.2] Saber que al aplicar la quinta propiedad de los determinantes (si existe un múltiplo común en toda una fila o columna, ese múltiplo puede salir del determinante y el determinante queda más simplificado, quedaría el número que se saca multiplicado por el determinante simplificado) de manera recursiva, el error de los estudiantes puede provenir de la igualdad $|\alpha A|=\alpha|A|$, es decir, de la idea matemática de sacar una sola vez el múltiplo común del determinante y no recursivamente. En matrices, si A es una matriz cuadrada de orden 2, entonces $|\alpha A|=\alpha.\alpha|A|\neq\alpha|A|$, es decir, $|\alpha A|\neq\alpha|A|$, pues ahora depende del orden de la matriz cuadrada A, el número de veces que quede multiplicado el múltiplo común por él mismo y todo ello multiplicado por el determinante de la matriz cuadrada A. En este caso $|6A|=6.6|A|\neq 6|A|$, A es una matriz cuadrada de orden 2. (142-143)

[7.2.2] Saber que cuando un estudiante escriba 36.-13 para expresar ese producto, debe usar paréntesis y escribirlo como 36(-13). Saber que la notación (saber escribir paréntesis para indicar el producto, sobre todo cuando haya en los factores un número negativo) es muy importante en la matemática, y en particular en la matemática escolar, pues es el profesor el que hace caer en la cuenta de esa notación matemática y plantearse si al hacer la operación 36.-13, el error de los estudiantes puede provenir del hecho de no usar paréntesis y ver la operación como una resta y no como un producto. (144-145)

[7.3.1] Saber que al aplicar la quinta propiedad de los determinantes (si existe un múltiplo común en toda una fila o columna, ese múltiplo puede salir del determinante y el determinante queda más simplificado, quedaría el número que se saca multiplicado por el determinante simplificado) de manera recursiva, el error de los estudiantes puede provenir de la igualdad $|\alpha A| = \alpha|A|$, es decir, de la idea matemática de sacar una sola vez el múltiplo común del determinante y no recursivamente. En matrices, si A es una matriz cuadrada de orden 2, entonces $|\alpha A| = \alpha.\alpha|A| \neq \alpha|A|$, es decir, $|\alpha A| \neq \alpha|A|$, pues ahora depende del orden de la matriz cuadrada A, el número de veces que quede multiplicado el múltiplo común por él mismo y todo ello multiplicado por el determinante de la matriz cuadrada A. En este caso, saber que cuando se les pida calcular el determinante de un número por una matriz (eg |6A|), por cada fila sale siempre el número que este multiplicando la matriz A dentro del determinante, por ejemplo, si la matriz A tuviera 5 filas pues quedaría el 6 cinco veces fuera. (169-173)

[7.5] Saber que al escribir matemáticamente, el error de los estudiantes puede provenir de que no saben escribir correctamente lo que están pensando, es decir, saber que además de saber pensar matemáticamente hay que saber escribir matemáticamente, en este caso, escribir la justificación de por qué un determinante vale cero. (449-450)

[8.1.1] Saber que al aplicar la propiedad $\begin{vmatrix} a+b & e \\ c+d & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & e \\ d & f \end{vmatrix}$ (que se cumple también para filas) cuando en dos filas tienen sumandos, el error de los estudiantes puede provenir de usar la propiedad dos veces al mismo tiempo, en lugar de usar la propiedad primero en una fila y luego en otra, porque la primera vez deben dejar una fila quieta. Saber que no existe propiedad que les diga exactamente que "no deben usar dos veces al mismo tiempo la propiedad", pero es el profesor el que tiene conocimiento de que ese es un error en los estudiantes, es decir, no es asunto propiamente de la matemática en sí, pero sí de la matemática que ocupa el profesor para la enseñanza. En este caso, hay que calcular $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$ sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

Aly (111-116):

Entonces hay que "descomponer" una fila y luego otra, así tenemos que

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x & 2y & 2z \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$$

pero $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x & 2y & 2z \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \;\; pues\, F_2 = 2F_1$

Entonces $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ ("descomponiendo" la tercera fila)

pero $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \, pues\, F_1 = F_3$ y en el ejercicio dan el dato de que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Entonces $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = 1$

CEC5. Conocer aspectos matemáticos de especial importancia para la enseñanza, lo que le permite hacer notar o distinguir la importancia de un aspecto matemático específico para enseñar el contenido matemático. [7.4] (417-420); [8.1.1] (32-37), (42-46).

[7.4] Saber que en un determinante de orden dos se puede hablar de proporcionalidad entre filas pero eso, en un determinante de orden tres se traduce en hablar de combinación lineal, es el profesor a diferencia de otros profesionales, el que cae y hace caer en la cuenta de que en el determinante de orden tres al haber tres filas, una se puede escribir como combinación lineal de las otras (cuando ese sea el caso), a diferencia de un determinante de orden dos que sólo tiene dos filas. (417-420)

[8.1.1] Saber que por la propiedad simétrica: Si a=b entonces b=a. En sí, saber que la igualdad $\begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$ también puede verse como $a\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$. Para otros profesionales $\begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$ puede ser simplemente una propiedad para aplicar, pero es el profesor el que hace caer en la cuenta de que hay dos formas de ver la igualdad de esos determinantes, ya sea de derecha a izquierda o viceversa, es decir, hacerles notar y reforzar que es lo mismo $\begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$ que $a\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$. (32-37), (42-46)

De los aspectos del **conocimiento del contenido y estudiantes,** podemos abstraer los siguientes descriptores en términos más generales:

CC-Es1. Saber escuchar e interpretar el conocimiento o pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje (común o en proceso de adquisición del nuevo concepto –mezcla de lenguaje común con matemático). [6.3] (607-619).

[6.3] Saber escuchar e interpretar el conocimiento/pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje usual, en particular, para escuchar e interpretar la pregunta que hace E1. (607-619)

CC-Es2. Saber las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre el contenido matemático. [8.1.1] (67-73).

[8.1.1] Prever una dificultad de los estudiantes, en este caso, sobre cómo extraer 1/5 de la segunda fila, es decir, de 1, 0, 3/5. (67-73)

CC-Es3. Prever la confusión que pudiera tener el alumno con algún aspecto específico del contenido que se esté viendo en clase. [8.1.1] (32-37); [8.2.1] (374-375).

[8.1.1] Prever que los estudiantes se pueden confundir y creer que en los determinantes hay que multiplicar el 5 por cada elemento del determinante, en la expresión $5\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, pues eso es lo que se hace en el producto de un escalar por una matriz (tema que tienen "fresco" porque lo vieron últimamente). Pero en este caso, ese 5 que está fuera del determinante puede entrar en el determinante pero multiplicando a una fila o a una columna. (32-37)

[8.2.1] Prever que los estudiantes pueden confundir el menor complementario con el adjunto del menor complementario, es decir, prever confusión con dos cosas distintas que acaban de definir. (374-375)

CC-Es5. Prever (anticipar) que los estudiantes se pueden quedar con una imagen o idea inadecuada del contenido. [6.3] (406-413); [7.3.3] (374-378).

[6.3] Prever que los estudiantes se pueden quedar con la imagen de que hay que detallar exhaustivamente los pasos al hacer un ejercicio y por eso Aly les comenta que al hacer los ejercicios, en la práctica, se aplica la propiedad directamente y no es necesario tanto detalle (pues ella escribió detalladamente los pasos en el ejemplo: expresar primero 20 como 5 por 4 y 45 como 5 por 9 y luego al hacer el determinante, escribir todo el proceso detallado para que los estudiantes vean que pueden extraer el 5 como factor común). (406-413)

[7.3.3] Prever que al haber dicho "negativo" [cuando ella dijo que el resultado del valor del determinante era negativo (en el valor del determinante de una matriz con ceros debajo de la diagonal secundaria, da como resultado: el producto de la diagonal secundaria negativo)], los estudiantes se pueden quedar con la imagen incorrecta de que siempre va a quedar en el resultado un número negativo, pero eso no necesariamente tiene porque serlo pues puede quedar como resultado un número positivo, lo único que pasa es que en el resultado de este determinante le antecede un menos al producto de los elementos de la diagonal secundaria. (374-378)

CC-Es7. Saber que los estudiantes pueden equivocarse al hacer determinado cálculo o de un número o de un signo (más leve), provocado por un despiste al hacer una(s) operación(es)/transformación(es); o por no dominar el contenido que se les está presentando. [6.3] (294-300), (314-318); [7.1] (60-66); [7.3.1] (182-186); [7.3.3] (363-366); [8.1.1] (24-31), (93-116).

[6.3] Saber que los estudiantes se pueden equivocar al hacer el cambio de fila o de columna, al no considerar que ahora se verá afectado el resultado del determinante por un signo menos, a diferencia de cuando hacían un cambio de fila en una matriz bajo una transformación elemental. (294-300), (314-318)

[7.1] Saber que los estudiantes se pueden equivocar al calcular el valor del determinante en el que en comparación con el original, las columnas están cambiadas, es decir, prever que los estudiantes pueden no fijarse en este aspecto que difiere entre las matrices y los determinantes; que en los determinantes al cambiar filas o columnas el resultado se altera, mientras que en las matrices podían cambiar filas mediante transformaciones elementales sin cambiar de signo y entonces en los determinantes: si el determinante de p q (en la primera fila), r s (en la segunda fila), vale cuatro, entonces el determinante de q p (en la primera fila), s r (en la segunda fila), vale menos cuatro. (60-66)

[7.3.1] Saber que los estudiantes se pueden equivocar en el signo al calcular el determinante (en ese caso, al calcular el determinante de orden 3). (182-186)

[7.3.3] Saber que los estudiantes se pueden equivocar al aplicar la propiedad: El valor del determinante de una matriz con ceros debajo de la diagonal secundaria, da como resultado menos el producto de la diagonal secundaria), es decir, prever que los estudiantes apliquen esta propiedad incorrectamente, en particular, prever que los estudiantes pueden olvidarse del signo menos al hacer ese cálculo. (363-366)

[8.1.1] Saber que en el segundo apartado del ejercicio hay un 3/5 que puede despistar a los estudiantes para usar una propiedad de los determinantes, el determinante completo que tienen es (24-31):

$$5\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 3/5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

[8.1.1] Saber que los estudiantes pudieran equivocarse si aplican la propiedad dos veces al mismo tiempo, porque en ese determinante aparecen dos filas en las que hay suma en los elementos, no se puede aplicar la propiedad dos veces al mismo tiempo porque la primera vez debe dejar una fila quieta, es decir, deben usar la propiedad primero en una fila y luego en otra. (93-116)

CC-Es11. Prever que los estudiantes no vean que un problema es equivalente a otro; o que no vean que una igualdad la pueden usar en un sentido o en otro. [8.1.1] (32-37).

[8.1.1] Prever que los estudiantes pueden ver la igualdad de una propiedad en un sólo sentido, es decir, ver que $\begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$ pero no ver que $a\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$. (32-37)

CC-Es12. Saber que los estudiantes pueden ponerse a hacer cálculos sin antes fijarse si pueden usar una propiedad. [6.3] (326-333), (368-369); [7.3.2] (240-246).

[6.3] Saber que los estudiantes empiecen a hacer cálculos innecesarios cuando puedan aplicar una propiedad de los determinantes. (326-333), (368-369)

[7.3.2] Saber que los estudiantes pueden ponerse a calcular el determinante sin antes echar un ojito por si se pueden usar una propiedad y terminarlo más rápido, es decir, no necesitarían hacer los cálculos, sólo justificar la propiedad que utilicen. (240-246)

De los aspectos del **conocimiento del contenido y enseñanza,** podemos abstraer los siguientes descriptores en términos más generales:

Ejemplos

CC-En1. Saber con qué ejemplo o ejercicio empezar, cuándo y cuáles usar para enfatizar, reforzar o generalizar cierta idea. [6.2] (141-157); [6.3] (272-293), (622-627); [7.1] (1-126), (52-65); [7.3.3] (337-350); [8.2.1] (294-299).

[6.2] Saber con qué ejemplo empezar. Mediante un ejemplo concreto de una matriz de 2x2, Aly trata de explicar lo que dice la definición del determinante para cualquier matriz cuadrada y luego les reafirma nuevamente que se cumple lo que se menciona en la definición para ese ejemplo. (141-157)

[6.3] Saber con qué ejemplo empezar.Dar un ejemplo antes de decir la segunda propiedad, de hecho su estrategia para presentar la segunda propiedad de los determinantes es:

Dar un ejemplo de cuando una fila sea 0, comentarles lo que dice la propiedad, enseguida un ejemplo de cuando la columna sea cero, nuevamente remarcarles lo que dice la propiedad y finalmente dar un ejemplo concreto en el que una fila sea cero y la otra fila contenga números concretos. (272-293)

[6.3] Saber con qué ejemplo enfatizar las propiedades. Aly presenta la octava propiedad de los determinantes, luego un ejemplo genérico, nuevamente les remarca la octava propiedad, enseguida un ejemplo concreto y finalmente vuelve a remarcarles lo que dice la octava propiedad. (622-627)

[7.1] Saber qué ejercicios proponerles para empezar a aplicar las propiedades de los determinantes de orden dos. En este caso Aly se guía de los primeros ejercicios propuestos por el libro de texto). (1-126)

[7.1] Saber con qué ejemplo destacar aspectos relevantes del contenido. Resolver el ejemplo mediante preguntas a los estudiantes para remarcarles que se fijen en que es un ejemplo en el que en ese determinante en comparación con el original, está cambiado el orden de las columnas. (52-65)

[7.3.3] Saber con qué ejemplo generalizar luego una propiedad. Aprovechar el ejemplo para generalizarlo en una propiedad (que el determinante de una matriz triangular superior es igual al producto de los tres elementos de la diagonal principal). (337-350)

[8.2.1] Saber con qué ejemplo empezar. Darles un ejemplo de un menor de orden 3. (294-299) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 7 & 1 & 10 \end{vmatrix}$

CC-En2. Saber que la aplicación del concepto en un ejemplo le es útil para inducir luego la definición del concepto. [8.2.1] (263-308), (263-287), (327-342).

[8.2.1] Saber que la aplicación del concepto en un ejemplo le es útil para inducir luego la definición del concepto. Para definir un menor, da ejemplos de submatrices que formarían el menor y finalmente define el menor como el valor del determinante de una submatriz. (263-308)

[8.2.1] Saber que la aplicación del concepto en un ejemplo le es útil para inducir luego la definición del concepto. Primero da un ejemplo de un menor de orden 2, luego define un poco las características de la submatriz que forma el menor y después vuelve a hacerles notar el ejemplo del menor que acaban de hacer. (263-287)

[8.2.1] Saber que la aplicación del concepto en un ejemplo le es útil para inducir luego la definición del concepto. Definir el menor complementario auxiliándose de un ejemplo y luego ya lo denota en general por α_{ij}. (327-342)

CC-En3. Saber que una de las potencialidades de un ejemplo, en concreto al desarrollarlo, es utilizarlo para destacar los aspectos relevantes del contenido matemático que pretende enseñarles ese día en clase. [6.3] (492-499), (561-566); [7.3.3] (337-350); [8.2.1] (263-287).

[6.3] Saber que es bueno hacerles notar a través del ejemplo por qué algunas veces interesa separar un determinante en la suma de dos determinantes (pues en ocasiones, al separar en la suma de dos determinantes uno da cero y pueden terminar los cálculos más fácilmente). (486); (492-499)

[6.3] Saber que es bueno hacerles notar en el ejemplo que se puede justificar que el segundo determinante es cero por cualquiera de las dos propiedades anteriores (la sexta o la séptima). En particular, Aly toma en cuenta lo que dice E1 pero al final usa la propiedad que ella tiene en mente. (561-566)

[7.3.3] Saber que es bueno aprovechar el ejemplo para generalizarlo en una propiedad (que el determinante de una matriz triangular superior es igual al producto de los tres elementos de la diagonal principal). (337-350)

[8.2.1] Saber que es bueno primero da un ejemplo de un menor de orden 2, luego definir un poco las características de la submatriz que forma el menor y después vuelve a hacerles notar el ejemplo del menor que acaban de hacer. (263-287)

CC-En4. Saber usar ejemplos con datos concretos, en lugar de desarrollar propiedades de forma general o con ejemplos genéricos, para explicar el contenido. [6.3] (481-499); [7.3.3] (337-350).

[6.3] Saber usar ejemplos con datos concretos, en lugar de desarrollar propiedades de forma general o con ejemplos genéricos, para explicar el contenido. Proponer el ejemplo en la séptima propiedad, es decir, inventárselo, a diferencia de los ejemplos que utiliza en las propiedades de la uno a la seis que los tomó del libro de texto. (481-499)

[7.3.3] Saber usar ejemplos con datos concretos, en lugar de desarrollar propiedades de forma general o con ejemplos genéricos, para explicar el contenido. Aprovechar el ejemplo para generalizarlo en una propiedad (que el determinante de una matriz triangular superior es igual al producto de los tres elementos de la diagonal principal). (337-350)

CC-En6. Saber qué ejercicios dejarles de deberes para que practiquen. [6.3] (636-644); [7.5] (463-464); [8.2.1] (450-451); [8.2.2] (563-569), (570-571).

[6.3] Saber qué ejercicios y ejemplos del libro dejarles de deberes a los estudiantes (ejercicios similares a los hechos en clase). (636-644)

[7.5] Saber qué dejarles de deberes (ejercicios similares a los hechos en clase). (463-464)

[8.2.1] Saber qué dejarles de deberes (que hagan un ejercicio que viene en el libro, parecido al ejemplo que han hecho) una vez que ha terminado de presentarles un primer ejemplo. (450-451)

[8.2.2] Saber qué dejarles de deberes. Comentarles lo que falta por hacer para ver si alguien se atreve a terminarlo en casa y sino ella lo terminará la siguiente clase (ya se terminó la clase y no alcanzó a terminar de hacer la demostración). (563-569)

[8.2.2] Saber qué dejarles deberes. Aly los invita a que terminen lo que faltó por hacer en la demostración (sustituir en la expresión que ya tienen escrita, los adjuntos que acaban de obtener y ver si al hacer el desarrollo obtienen los mismos términos que con la regla de Sarrus, para calcular un determinante genérico de orden tres). (570-571)

Ayudas

CC-En7. Saber qué ayudas dar a los estudiantes en situaciones de confusión o dificultad, para que puedan dar solución a un ejercicio o resolver un problema. [6.3] (226-239).

[6.3] Saber qué ayudas dar a los estudiantes en situaciones de confusión o dificultad, para que puedan dar solución a un ejercicio o resolver un problema. Guiar las respuestas de los estudiantes y darles ayudas explícitas (Aly calcula el primer producto para obtener el determinante de la matriz cuadrada de orden 2). (226-239)

Gestión de la participación.

Preguntas

CC-En11. Saber qué preguntas formular, no necesariamente a cierto estudiante, para presentar o mostrar específicamente lo más importante del contenido que está enseñando (algunas veces las contesta ella misma y otras los estudiantes). [6.3] (517-572); [7.1] (21-46); [8.1.1] (12-18); [8.2.1] (347-361), (415-417), (440-442).

[6.3] Saber qué preguntas formular, no necesariamente a cierto estudiante, para presentar o mostrar específicamente lo más importante del contenido que está enseñando (algunas veces las contesta ella misma y otras los estudiantes). Proponer el ejemplo en la octava propiedad, es decir, inventárselo, lo va construyendo con ciertas preguntas a los estudiantes, a diferencia de los ejemplos que utiliza en las propiedades de la uno a la seis que los toma del libro de texto. (517-572)

[7.1] Saber cuándo y cómo aclarar una idea a los estudiantes. ¿Cuándo? Cuando prevé que los estudiantes se pueden equivocar y ¿cómo? a través de preguntas a los estudiantes. Aly pregunta: ¿puedo decir que $|11A|=11|A|$? Para que a partir de ahí, los estudiantes piensen en esa posible situación. (21-46)

[8.1.1] Saber qué preguntas formular, no necesariamente a cierto estudiante, para presentar o mostrar específicamente lo más importante del contenido que está enseñando (algunas veces las contesta ella misma y otras los estudiantes). Hacer peguntas para ir orientando la respuesta al apartado a) del ejercicio (eg Aly: *Este es muy fácil ¿no?, ¿qué hay que hacer ahí?*). (12-18)

[8.2.1] Saber qué preguntas formular, no necesariamente a cierto estudiante, para presentar o mostrar específicamente lo más importante del contenido que está enseñando (algunas veces las contesta ella misma y otras los estudiantes). Hacerles preguntas como: *¿dónde se encuentra ese elemento?, ¿cuál sería el menor complementario ahí con esa matriz del elemento a sub dos dos, es decir, cuál sería alfa dos dos?* para calcular otro menor complementario y ver si le van entendiendo los estudiantes. El estudiante E2 contesta y ella va remarcando (repitiendo) la respuesta del estudiante y finalmente les remarca nuevamente a todos, cómo han encontrado el menor complementario del elemento a_{22} (de la matriz genérica de orden 3x3). (347-361)

[8.2.1] Saber qué preguntas formular, no necesariamente a cierto estudiante, para presentar o mostrar específicamente lo más importante del contenido que está enseñando (algunas veces las contesta ella misma y otras los estudiantes). Hacerles preguntas para que la vayan siguiendo pero luego ella misma se contesta, eg Aly: *Bueno, ¿qué tengo que hacer entonces para ver cuál es el menor complementario de ese elemento? Pues suprimimos por ende esa columna y esa fila*. (415-417)

[8.2.1] Saber qué preguntas formular, no necesariamente a cierto estudiante, para presentar o mostrar específicamente lo más importante del contenido que está enseñando (algunas veces las contesta ella misma y otras los estudiantes). Hacer una pregunta para que los estudiantes noten la diferencia entre menor complementario y su adjunto (Aly: *¿qué es lo que hay de diferencia entre el menor complementario y el adjunto? El signo*). (440-442)

CC-En12. Saber qué preguntas formular para presentar un nuevo concepto, una nueva propiedad o una clasificación. [6.3] (517-572).

[6.3] Saber qué preguntas formular para presentar un nuevo concepto, una nueva propiedad o una clasificación. Proponer el ejemplo en la octava propiedad, es decir, inventárselo, lo va construyendo con ciertas preguntas a los estudiantes, a diferencia de los ejemplos que utiliza en las propiedades de la uno a la seis que los toma del libro de texto. (517-572)

CC-En15. Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático para ir guiando la solución de un ejemplo o ejercicio, resolver un problema o hacer una representación gráfica. [7.2.1] (105-114).

[7.2.1] Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático para ir guiando la solución de un ejemplo o ejercicio, resolver un problema o hacer una representación gráfica. Hacerle notar a E12 a través de preguntas orientadas por qué da cero el valor del determinante sin necesidad de hacerlo (porque la segunda fila es siete veces la primera). (105-114)

Respuestas

CC-En16. Saber qué respuestas de los estudiantes aceptar, cuáles interrumpir, cuáles ignorar o cuáles destacar, para alcanzar los objetivos de la enseñanza del contenido trazados por la profesora para esa clase. [6.3] (226-239), [6.3] (436-444), (561-566); [7.2.2] (131-138); [7.3.2] (253-262) (263-268); [8.1.2] (207-217), (248-252); [8.2.1] (347-361).

[6.3] Saber qué respuestas de los estudiantes aceptar, cuáles interrumpir, cuáles ignorar o cuáles destacar, para alcanzar los objetivos de la enseñanza del contenido trazados por la profesora para esa clase. Guiar las respuestas de los estudiantes y darles ayudas explícitas (Aly calcula el primer producto para obtener el determinante de la matriz cuadrada de orden 2). (226-239)

[6.3] Saber qué respuestas de los estudiantes aceptar, cuáles interrumpir, cuáles ignorar o cuáles destacar, para alcanzar los objetivos de la enseñanza del contenido trazados por la profesora para esa clase. Interpreta y transfiere lo que está diciendo E2, lo transfiere y lo orienta y aprovecha para remarcarles en este ejemplo el uso de la propiedad anterior. (436-444)

[6.3] Saber qué respuestas de los estudiantes aceptar, cuáles interrumpir, cuáles ignorar o cuáles destacar, para alcanzar los objetivos de la enseñanza del contenido trazados por la profesora para esa clase. Hacerles notar en el ejemplo que se puede justificar que el segundo determinante es cero por cualquiera de las dos propiedades anteriores (la sexta o la séptima). En particular, Aly toma en cuenta lo que dice E1 pero al final usa la propiedad que ella tiene en mente. (561-566)

[7.2.2] Saber qué respuestas de los estudiantes aceptar, cuáles interrumpir, cuáles ignorar o cuáles destacar, para alcanzar los objetivos de la enseñanza del contenido trazados por la profesora para esa clase. Confirmar y reafirmar la respuesta de E9 a ese apartado del ejercicio (que les piden calcular ese determinante que es el mismo que el de partida sólo que con las filas cambiadas, entonces cambia de signo y el resultado es 13). (131-138)

[7.3.2] Saber qué respuestas de los estudiantes aceptar, cuáles interrumpir, cuáles ignorar o cuáles destacar, para alcanzar los objetivos de la enseñanza del contenido trazados por la profesora para esa clase. Destacar la aportación de la respuesta de E1: que al calcular el valor de ese determinante, los sumandos que van en el sentido de la diagonal secundaria se anulan. (253-262)

[7.3.2] Saber qué respuestas de los estudiantes aceptar, cuáles interrumpir, cuáles ignorar o cuáles destacar, para alcanzar los objetivos de la enseñanza del contenido trazados por la profesora para esa clase. Capacidad/habilidad para interrumpir o ignorar la respuesta de E1 (Aly prefiere que también los demás estudiantes intenten resolver el ejercicio, por ello "calla" a E1). (263-268)

[8.1.2] Saber qué respuestas de los estudiantes aceptar, cuáles interrumpir, cuáles ignorar o cuáles destacar, para alcanzar los objetivos de la enseñanza del contenido trazados por la profesora para esa clase. Repetir lo que ha dicho E1 (E1: *La última columna eh* - E1 contesta nervioso- *es la primera multiplicada por 1000 más la segunda por 100 y la tercera por 10*) y refinarlo con el concepto de combinación lineal y con eso justifica por qué el determinante vale cero. (207-217)

[8.1.2] Saber qué respuestas de los estudiantes aceptar, cuáles interrumpir, cuáles ignorar o cuáles destacar, para alcanzar los objetivos de la enseñanza del contenido trazados por la profesora para esa clase. Interpretar la respuesta de E12 (E12: *Que la 3 es 100 veces la 4 más 10 veces la 1 más la 2*) y completarla, para justificar que el determinante vale cero porque la tercera fila es 100 veces la cuarta fila más diez veces la primera fila más la segunda fila. (248-252)

[8.2.1] Saber qué respuestas de los estudiantes aceptar, cuáles interrumpir, cuáles ignorar o cuáles destacar, para alcanzar los objetivos de la enseñanza del contenido trazados por la profesora para esa clase. Hacerles preguntas como: *¿dónde se encuentra ese elemento?, ¿cuál sería el menor complementario ahí con esa matriz del elemento a sub dos dos, es decir, cuál sería alfa dos dos?* para calcular otro menor complementario y ver si le van entendiendo los estudiantes. El estudiante E2 contesta y ella va remarcando (repitiendo) la respuesta del estudiante y finalmente les remarca nuevamente a todos, cómo han encontrado el menor complementario del elemento a_{22} (de la matriz genérica de orden 3x3). (347-361)

CC-En19. Saber cómo aprovechar la respuesta de un estudiante, corregirla y utilizarla para explicar algún aspecto del contenido. [8.1.2] (224-231).

[8.1.2] Saber cómo aprovechar la respuesta de un estudiante, corregirla y utilizarla para explicar algún aspecto del contenido. Aprovechar la respuesta de E12 (E12: *La última columna es combinación lineal de la segunda*), corregirla y la utiliza para explicar e ir corroborando que la cuarta columna es nueve veces la segunda columna, es decir, la cuarta columna es proporcional a la segunda. (224-231)

Preguntas y respuestas

CC-En22. Saber cómo transferir e interpretar la pregunta y/o respuesta de un estudiante y luego contestar a forma de explicación para todos los estudiantes. [6.3] (460-467), (607-619).

[6.3] Saber cómo transferir e interpretar la pregunta y/o respuesta de un estudiante y luego contestar a forma de explicación para todos los estudiantes. Transfiere e interpreta la pregunta de E4 y luego da la respuesta a forma de explicación para todos los estudiantes. E4 pregunta a Aly si puede aplicar la propiedad viendo la igualdad del otro lado (←) y Aly aprovecha para hacerles notar a los estudiantes que lo pueden hacer. (460-467)

[6.3] Saber cómo transferir e interpretar la pregunta y/o respuesta de un estudiante y luego contestar a forma de explicación para todos los estudiantes. Transfiere e interpreta la pregunta de E1 y luego da la respuesta a forma de explicación para todos los estudiantes. E1 pregunta ¿qué pasa si tienen en un determinante a b (en la primera fila) y c c (en la segunda fila)? y Aly le comenta que puede sacar la c como factor común y le quedaría c por el determinante a b (en la primera fila) y 1 1 (en la segunda fila) y aprovecha para hacerles notar a los estudiantes que lo pueden hacer. (607-619)

Traducir

CC-En24. Saber cómo “traducir” a los estudiantes la actividad matemática presentada por otro estudiante o cómo “traducir” alguna actividad matemática del libro de texto a su lenguaje usual. [8.2.1] (309-312), (396-397).

[8.2.1] Saber cómo “traducir” a los estudiantes la actividad matemática presentada por otro estudiante o cómo “traducir” alguna actividad matemática del libro de texto a su lenguaje usual. “Traducir” la definición formal que viene en el libro de texto, combinar tanto lenguaje formal con lenguaje común. (309-312)

[8.2.1] Saber cómo “traducir” a los estudiantes la actividad matemática presentada por otro estudiante o cómo “traducir” alguna actividad matemática del libro de texto a su lenguaje usual. Traducir”, en concreto, lo que piden encontrar en el primer, segundo y tercer apartado del ejemplo (Aly: *Un menor de orden dos de la matriz, luego el menor complementario y luego el adjunto*). (396-397)

CC-En25. Saber usar lenguaje común o más familiar a los estudiantes o una forma más explícita, más detallada, al explicar el contenido matemático para que los estudiantes lo comprendan "mejor". [6.3] (360-365), (402-405), (376-395), (396-401), (508-515), (569-572), (622-627); [7.4] (402-416), (417-423); [7.5] (436-439); [8.1.1] (14-18), (20-79), (64-66); [8.2.1] (427-438); [8.2.2] (473-474) .

[6.3] Saber que los estudiantes pueden comprender "mejor" la quinta propiedad de los determinantes (para una matriz cuadrada de orden 2) si se las dice en lenguaje común. (360-365), (402-405)

[6.3] Saber que los estudiantes pueden comprender "mejor" la quinta propiedad si escribe detalladamente los pasos de la solución y utiliza términos más conocidos para ellos, por ejemplo "factor común". (376-395)

[6.3] Saber que los estudiantes pueden comprender "mejor" la quinta propiedad al remarcarles en el ejemplo que pueden sacar el 5 como factor común y recomendarles que entre más simplifiquen los números del determinante mejor. (396-401)

[6.3] Saber que los estudiantes pueden comprender "mejor" la octava propiedad de los determinantes (para una matriz cuadrada de orden 2) si se las dice en lenguaje común, en lenguaje más cómodo para los estudiantes. (508-515), (569-572)

[6.3] Saber que los estudiantes se harán más fácilmente una idea de la octava propiedad, si les remarca la esencia de esa propiedad (*que el determinante no varía aunque realice por en medio transformaciones elementales*) en términos matemáticos familiares a los estudiantes (pues han estado haciendo transformaciones elementales a matrices, en varias clases anteriores), es decir, saber que de esa forma se les quede más grabada esa propiedad que usarán luego. (622-627)

[7.4] Saber usar lenguaje común o más familiar a los estudiantes o una forma más explícita, más detallada, al explicar el contenido matemático para que los estudiantes lo comprendan "mejor". Aprovechar la propiedad de los determinantes de separar en suma de determinantes, para justificarles porque da cero la propiedad que generalizó (de proporcionalidad a combinación lineal. (402-416)

[7.4] Saber usar lenguaje común o más familiar a los estudiantes o una forma más explícita, más detallada, al explicar el contenido matemático para que los estudiantes lo comprendan "mejor". Explicarles porque antes, en un determinante de orden dos no se podía hablar de combinación lineal sino de proporcionalidad, pues al hablar de combinación lineal con dos filas, no tenía sentido porque sólo tenían dos filas, entonces sólo se podría hablar de proporcionalidad, no de combinación lineal. (417-423)

[7.5] Saber usar lenguaje común o más familiar a los estudiantes o una forma más explícita, más detallada, al explicar el contenido matemático para que los estudiantes lo comprendan "mejor". Saber que si les dice de que trata el ejemplo en lenguaje más común, los estudiantes entenderán "mejor" lo que deben hacer en el ejemplo, "traducirles" lo que "piden" hacer en el ejemplo: *justificar sin desarrollar, porque esos determinantes den cero, es decir, saber las propiedades para justificarlo*. (436-439)

[8.1.1] Saber usar lenguaje común o más familiar a los estudiantes o una forma más explícita, más detallada, al explicar el contenido matemático para que los estudiantes lo comprendan "mejor". Explicar por qué el resultado del primer apartado es 3, Aly utiliza el dato que le dan en el ejercicio y aplica la propiedad de los determinantes en la que si un número está multiplicando a todos los elementos en una fila entonces se puede sacar ese número del determinante, es decir, $\begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$. (14-18)

[8.1.1] Saber usar lenguaje común o más familiar a los estudiantes o una forma más explícita, más detallada, al explicar el contenido matemático para que los estudiantes lo comprendan "mejor". Decidir explicar en la pizarra el segundo apartado del ejercicio a pesar de que E1 ha dicho el resultado correctamente, debido a que considera que es un caso especial en el que se usa una sola propiedad dos veces y al final el resultado del determinante no varía respecto al determinante que se tenía como dato en el ejercicio. (20-79)

[8.1.1] Saber usar lenguaje común o más familiar a los estudiantes o una forma más explícita, más detallada, al explicar el contenido matemático para que los estudiantes lo comprendan "mejor". Decidir explicar a los estudiantes la otra forma de hacer el segundo apartado propuesto por E2 (E2: *sacar el 5 y luego de la segunda fila sacar factor común 1/5 extraerlo fuera del determinante y queda 1, por el 1 que vale el determinante pues es 1*). (64-66)

[8.2.1] Saber usar lenguaje común o más familiar a los estudiantes o una forma más explícita, más detallada, al explicar el contenido matemático para que los estudiantes lo comprendan "mejor". Explicar cómo calculó el determinante de orden 3 con la regla de Sarrus y que se obtiene 198, que es el valor del menor complementario α_{32}. Aly repasa nuevamente cómo calcular el determinante de orden 3 por Sarrus (tema visto hace algunos días). (427-438)

[8.2.2] Saber usar lenguaje común o más familiar a los estudiantes o una forma más explícita, más detallada, al explicar el contenido matemático para que los estudiantes lo comprendan "mejor". Comentarles en lenguaje más familiar cómo calcular el determinante de una matriz de orden mayor o igual a tres (Aly: *Bueno pues el valor del determinante es ir multiplicando los elementos de una fila o columna por sus correspondientes adjuntos*). (473-474)

Hacer notar/remarcar/destacar

CC-En26. Saber cómo (y cuándo) hacerles notar, remarcar, destacar o aclarar, puntualmente, lo más importante del contenido que está enseñando. [6.1] (25-33); [6.2] (51-54), (62-72), (124-129), (133-134); (160-173); [6.3] (194-207), (183-217), (251-264), (293); (312-313), (396-401), (426-430), (449-459), (460-467), (622-627); [7.1] (21-46), (52-65); [7.2.1] (94-95), (105-114); [7.2.2] (144-145), (158-163); [7.3.1] (168); [7.3.2] (251-252), (289-290), (269-270); [7.3.3] (374-378); [8.1.2] (232-233), (241-243), (234-236); [8.2.1] (292-293), (300-301), (322-324), (376-381), (403-405); [8.2.2] (481-482).

[6.1] Saber cómo remarcarles en el examen que se fijen en la matriz, "mirad la matriz", debido a que los estudiantes acababan de obtener el rango de la matriz y de ahí podían decidir la dependencia o independencia lineal. (25-33)

[6.2] Saber cómo hacerles notar que esta parte de los contenidos del curso es muy mecánica pero que aun así, en la parte de sistemas de ecuaciones se complica un poco porque hay muchas operaciones algebraicas y ahí hay que pensar muy bien las operaciones y los cambios de signos. (51-54)

[6.2] Saber cómo remarcarles la idea de que el determinante de una matriz es un número. Para eso, ella se los comenta y luego se los refirma con un trozo de texto que aparece en el libro, en el que se menciona la idea que les remarca. (62-72)

[6.2] Saber cómo remarcarles que posteriormente, para conocer la clasificación de sistemas de ecuaciones, lo importante será hacer el determinante de la matriz de coeficientes y ver si el resultado es cero o distinto de cero. (89-90); (97-99); (109); (124-129)

[6.2] Saber cómo hacerles notar que para poder calcular el determinante de una matriz, ésta debe ser cuadrada. (133-134)

[6.2] Saber cómo hacerles ver que con determinantes de matrices de orden 2x2 no hay mucha complicación pero sí para calcular el determinante (los productos para obtener el determinante) de matrices de orden mucho mayor, por ejemplo para calcular el determinante de una matriz de orden 6x6, y así hacerles notar que para ello se pueden apoyar de las propiedades de los determinantes. (160-173)

[6.3] Saber cómo hacerles notar que se cumple lo que dice la definición del determinante para cualquier matriz cuadrada para el caso de una matriz de orden 2, antes de explicarles las propiedades de los determinantes de matrices cuadradas de orden 2. (194-207)

[6.3] Saber cómo explicarles nuevamente cómo se calcula el determinante para esas matrices y remarcarles que la definición del determinante se cumple para matrices de orden 2, antes de explicar la primera propiedad para determinantes de matrices de orden 2. (183-217)

[6.3] Saber cómo hacerles notar que el det A = det A^t se cumple por la conmutatividad del producto en los números reales, a pesar de que se haya cambiado el orden de los elementos de la diagonal secundaria. (251-264)

[6.3] Saber cómo remarcarles que la fila o columna cero hacen que el valor del determinante sea cero. (293)

[6.3] Saber cómo hacerles notar que la tercera propiedad de los determinantes se cumple para cuando se cambien filas pero también para cuando se cambien columnas. (312-313)

[6.3] Saber cómo remarcarles en el ejemplo para aplicar la quinta propiedad de los determinantes, que pueden sacar el 5 como factor común y recomendarles que entre más simplifiquen los números del determinante mejor. (396-401)

[6.3] Saber cómo hacerles notar el hecho de que la fila dos es una fila que es proporcional a la fila uno, es decir, $F_2=aF_1$. (426-430)

[6.3]Saber cómo hacerles notar en el ejemplo de la sexta propiedad, que esta propiedad se deduce de las dos propiedades anteriores. (449-459)

[6.3] Saber cómo hacerles notar a los estudiantes lo que pueden hacer con una propiedad. Transfiere e interpreta la pregunta de E4 y luego da la respuesta a forma de explicación para todos los estudiantes. E4 pregunta a Aly si puede aplicar la propiedad viendo la igualdad del otro lado (←) y Aly aprovecha para hacerles notar a los estudiantes que lo pueden hacer. (460-467)

[6.3] Saber cómo remarcarles la esencia de la octava propiedad de los determinantes en términos de transformación elemental, es decir, usando un lenguaje matemático familiar a los estudiantes (pues han estado haciendo transformaciones elementales a matrices, en varias clases anteriores). (622-627)

[7.1] Saber cuándo y cómo aclarar una idea a los estudiantes. ¿Cuándo? Cuando prevé que los estudiantes se pueden equivocar y ¿cómo? a través de preguntas a los estudiantes. Aly pregunta: ¿puedo decir que $|11A|=11|A|$? Para que a partir de ahí, los estudiantes piensen en esa posible situación. (21-46)

[7.1] Saber cómo remarcarles, al resolver el ejemplo mediante preguntas a los estudiantes, que se fijen en que es un ejemplo en el que en ese determinante en comparación con el original, está cambiado el orden de las columnas. (52-65)

[7.2.1] Saber cómo remarcarles a los estudiantes este hecho importante al encontrar el valor del determinante: decir que vale cero sin hacer los cálculos, implica justificar por qué vale cero. (94-95)

[7.2.1] Saber cómo hacerle notar a E12 a través de preguntas orientadas porqué da cero el valor del determinante sin necesidad de hacerlo (porque la segunda fila es siete veces la primera). (105-114)

[7.2.2] Saber cómo hacerles notar que es importante escribir adecuadamente en matemáticas, en particular, le hace notar a E9 frente al grupo que use paréntesis, cuando indique el producto de 36 por -13 pues E9 lo había expresado como 36.-13. (144-145)

[7.2.2] Saber cómo hacerles notar/remarcar la propiedad y decirles de dónde se deduce (que se deduce de la definición de matriz inversa y de la propiedad de que el determinante de un producto es el producto de los determinantes) y que por tanto pueden usar luego. (158-163)

[7.3.2] Saber cómo hacerles notar que entre más ceros haya dentro del determinante mejor, pues los cálculos para encontrar el valor del determinante son más sencillos. (251-252), (289-290)

[7.3.2] Saber cómo aclararle a E1 sobre la notación en el libro de texto, es decir, que en un enunciado de un problema, es lo mismo que diga "calcular el determinante" que "halle el valor del determinante". (269-270)

[7.3.3] Saber cómo aclararles que cuando ella dijo que el resultado del valor del determinante era negativo (en el valor del determinante de una matriz con ceros debajo de la diagonal secundaria, da como resultado: el producto de la diagonal secundaria negativo), negativo quiere decir que cambia de signo. (374-378)

[8.1.2] Saber cómo remarcarles el hecho de que "sin tener que hacer cuentas", al usar la propiedad de los determinantes el determinante vale cero. (232-233), (241-243)

[8.1.2] Saber cómo hacerles notar la importancia de las propiedades de los determinantes, sobre todo en determinantes muy grandes. (234-236)

[8.2.1] Saber cómo hacerles notar cómo obtener un menor de orden 4 (Aly: *Sería toda la matriz completa de 4 filas y 4 columnas*). (292-293)

[8.2.1] Saber cómo remarcarles la esencia de los menores de orden 2 y de orden 3 (Aly: *Entonces tenemos los menores que son los de orden 2 y los de orden 3, cruzando filas y columnas, las que me digan o las que necesite, vale*). (300-301)

[8.2.1] Saber cómo remarcar lo que indica el primer y segundo subíndice (cosa que acababan de ver hace algunos días en matrices), (Aly: *el primer subíndice indica la fila y el segundo la columna*). (322-324)

[8.2.1] Saber cómo hacerles notar que el adjunto por la forma en que está definido (en particular: $(-1)^{i+j}$), algunas veces queda positivo y otras negativo. (376-381)

[8.2.1] Saber cómo aclararles este dato (el determinante de la submatriz) que le había faltado decir y que es parte de lo que forma un menor. (403-405)

[8.2.2] Saber cómo aclararles que también pueden calcular el determinante mediante adjuntos eligiendo otra fila. (481-482)

Alertar/Prevenir
CC-En27. Saber cómo plantearles una situación hipotética para prevenirlos de error. [7.1] (21-46), (47-51).

[7.1] Saber cómo plantearles una situación hipotética para prevenirlos de error. Saber cuándo y cómo aclarar una idea a los estudiantes. ¿Cuándo? Cuando prevé que los estudiantes se pueden equivocar y ¿cómo? a través de preguntas a los estudiantes. Aly pregunta: ¿puedo decir que |11A|=11|A|? Para que a partir de ahí, los estudiantes piensen en esa posible situación. (21-46)

[7.1] Saber cómo plantearles una situación hipotética para prevenirlos de error. Alertarlos. Hacerles la recomendación de que tengan cuidado cuando tengan que calcular |11A| con una matriz de orden 3x3 porque en esa situación habría que sacar 3 veces el 11. (47-51)

[7.1] Saber cómo plantearles una situación hipotética para prevenirlos de error. Plantearles una situación hipotética de qué pasaría si tuvieran que calcular |11A| con una matriz A de orden 3x3. Aly usa esa estrategia para prevenir a los estudiantes del error. (47-51)

CC-En28. Saber cómo hacerles señalamientos sobre errores que cometieron algunos estudiantes en el examen, para alertar a los demás sobre los errores que se cometen y de alguna forma prevenirlos de ese error. [6.1] (7-48).

[6.1] Saber cómo hacerles señalamientos sobre errores que cometieron algunos estudiantes en el examen, para alertar a los demás sobre los errores que se cometen y de alguna forma prevenirlos de ese error. Hacer una serie de señalamientos sobre errores que cometieron algunos estudiantes en el primer examen del curso, al decirlo en el grupo puede alertar a los demás sobre los errores que se comenten y de alguna forma prevenirlos del error. (7-48)

Preparar actividades
CC-En29. Saber cómo prepararles un compendio de actividades a los estudiantes, para que afiancen el contenido matemático que les está enseñando. [6.1] (1)

[6.1] Saber cómo prepararles un compendio de actividades a los estudiantes, para que afiancen el contenido matemático que les está enseñando. Darles una fotocopia que ella les preparó con las soluciones a los ejercicios del examen para que los estudiantes revisen cómo se resuelve. (1)

Forma de presentarlo/representarlo

CC-En34. Saber cómo remarcarles los aspectos más relevantes del contenido para concluir un ejemplo o la presentación de un tema. [6.3] (569-572); [7.3.3] (367-373); [8.1.1] (78-79); [8.2.1] (306-308).

[6.3] Saber cómo remarcarles los aspectos más relevantes del contenido para concluir un ejemplo o la presentación de un tema. Para cerrar el ejemplo de la octava propiedad de los determinantes, Aly vuelve a remarcarles lo que dice esa propiedad en lenguaje común. (569-572)

[7.3.3] Saber cómo remarcarles los aspectos más relevantes del contenido para concluir un ejemplo o la presentación de un tema. Recapitular las propiedades obtenidas a raíz del ejercicio. Remarcarles nuevamente las dos propiedades (1. Que el determinante de una matriz triangular superior es igual al producto de los tres elementos de la diagonal principal. 2. Que el valor del determinante de una matriz con ceros debajo de la diagonal secundaria, da como resultado: menos el producto de la diagonal secundaria) deducidas del apartado b) del ejercicio dos. (367-373)

[8.1.1] Saber cómo remarcarles los aspectos más relevantes del contenido para concluir un ejemplo o la presentación de un tema. A forma de cierre de ese apartado, remarcarles en resumen las dos formas de resolver ese apartado del ejercicio (Aly: *...se puede extraer dos veces, de dos filas un numerito o extraer el 5 y volver a ponerlo dentro del determinante, vale*). (78-79)

[8.2.1] Saber cómo remarcarles los aspectos más relevantes del contenido para concluir un ejemplo o la presentación de un tema. Cerrar los ejemplos anteriores haciéndoles ver que todo lo que han visto es para llegar a la definición de menor. (306-308)

CC-En35. Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente. [6.3] (406-413), (418-420); [7.3.3] (367-373); [8.1.1] (84-92).

[6.3] Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente. Comentarles que al hacer los ejercicios, en la práctica, se aplica la propiedad directamente y no es necesario tanto detalle (pues ella escribió detalladamente los pasos en el ejemplo). (406-413)

[6.3] Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente. Anunciarles que en los ejercicios “tipo” que harán posteriormente, serán de tipo teórico, en el que comúnmente les den el valor de un determinante y con base en ese les pidan calcular otro determinante, para que los estudiantes se vayan haciendo una idea de los ejercicios que harán. (418-420)

[7.3.3] Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente. Recapitular las propiedades obtenidas a raíz del ejercicio. Remarcarles nuevamente las dos propiedades (1. Que el determinante de una matriz triangular superior es igual al producto de los tres elementos de la diagonal principal. 2. Que el valor del determinante de una matriz con ceros debajo de la diagonal secundaria, da como resultado: menos el producto de la diagonal secundaria) deducidas del apartado b) del ejercicio dos. (367-373)

[8.1.1] Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente. Remarcarles, antes de empezar a hacer el tercer apartado del ejercicio, Aly quiere recordarles la propiedad que se usará en este apartado, es decir, la propiedad $\begin{vmatrix} a+b & e \\ c+d & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & e \\ d & f \end{vmatrix}$. (84-92)

CC-En36. Saber cómo explicarles la utilidad, aplicación, dirección/orientación del contenido en temas siguientes. [6.2] (124-129); [6.3] (406-413); [8.2.1] (382-384), (452-454), (466-469).

[6.2] Saber cómo explicarles la utilidad, aplicación, dirección/orientación del contenido en temas siguientes. Utilidad. Remarcarles que posteriormente, para conocer la clasificación de sistemas de ecuaciones, lo importante será hacer el determinante de la matriz de coeficientes y ver si el resultado es cero o distinto de cero. (89-90); (97-99); (109); (124-129)

[6.3] Saber cómo explicarles la utilidad, aplicación, dirección/orientación del contenido en temas siguientes. Comentarles que al hacer los ejercicios, en la práctica, se aplica la propiedad directamente y no es necesario tanto detalle (pues ella escribió detalladamente los pasos en el ejemplo). (406-413)

[8.2.1] Saber cómo explicarles la utilidad, aplicación, dirección/orientación del contenido en temas siguientes. Comentarles la aplicación que tienen los adjuntos de los menores complementarios, es decir, decirles para qué les va a servir (Aly: *...esto la aplicación que tiene es para desarrollar determinantes mayores eh, determinantes de orden superior*). (382-384)

[8.2.1] Saber cómo explicarles la utilidad, aplicación, dirección/orientación del contenido en temas siguientes. Decirles para qué sirve lo que han hecho en el ejemplo y por tanto, en general, lo que han visto hasta llegar al adjunto, es decir: menor, menor complementario y adjunto. Comentarles la utilidad de esos tres conceptos: *para desarrollar determinantes mayores que no sean de orden 3, que sean de orden 4, de orden 5*. (452-454)

[8.2.2] Saber cómo explicarles la utilidad, aplicación, dirección/orientación del contenido en temas siguientes. Comentarles que esta propiedad (para calcular determinantes mediante adjuntos) que van a ver, se puede aplicar para calcular determinantes de orden tres o más y que ella escribirá la propiedad para el caso de una matriz cuadrada de orden tres. (466-469)

CC-En40. Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. [7.3.1] (183-185); [8.1.1] (103-105); [8.1.2] (181-182); [8.2.2] (516-523), (535-536).

[7.3.1] Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. Comentarles la estrategia para calcular el determinante de orden 3, haciendo alusión a la definición de determinante (que se obtiene haciendo todos los productos posibles dentro de los nueve elementos de la matriz, de manera que en esos productos aparezca siempre un elemento por cada fila y por cada columna). (183-185)

[8.1.1] Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. Remarcarles nuevamente lo que no pueden hacer (descomponer al mismo tiempo la segunda y tercera fila en la que aparecen los sumandos) y darles la estrategia para resolverlo (descomponer primero una y luego otra). (103-105)

[8.1.2] Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. Comentarles la estrategia para calcular esos determinantes de orden mayor que 3 (Aly: *hay que buscar ahí entre las filas y las columnas alguna relación, alguna proporcionalidad, combinación lineal, algo*). (181-182)

[8.2.2] Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. Comentar la estrategia de la demostración (Aly: *Si en esto* –Aly señala los adjuntos que había escrito para calcular el determinante de A con la primera fila- *nos ponemos a* *escribir quién es el adjunto A_{11}, A_{12}, A_{13} van a ver que lo que nos va a quedar es el desarrollo por la regla de Sarrus*). (516-523)

[8.2.2] Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. Comentarles su estrategia para escribir los resultados (Aly: *...primero voy a ir haciendo cada uno de los adjuntos y luego ya los anotamos todos juntos, nos va a salir una fórmula muy grande*). (535-536)

CC-En41. Saber qué es lo que hay que repetir y cómo, para aclarar dudas del contenido a los estudiantes o reafirmar algunos aspectos del contenido. [6.3] (396-401); [8.2.1] (427-438).

[6.3] Saber qué es lo que hay que repetir y cómo, para aclarar dudas del contenido a los estudiantes o reafirmar algunos aspectos del contenido. Repetir el proceso utilizado en el ejemplo para aplicar la quinta propiedad de los determinantes, que pueden sacar el 5 como factor común y recomendarles que entre más simplifiquen los números del determinante mejor. (396-401)

[8.2.1] Saber qué es lo que hay que repetir y cómo, para aclarar dudas del contenido a los estudiantes o reafirmar algunos aspectos del contenido. Explicar cómo calculó el determinante de orden 3 con la regla de Sarrus y que se obtiene 198, que es el valor del menor complementario α_{32}. Aly repasa nuevamente cómo calcular el determinante de orden 3 por Sarrus (tema visto hace algunos días). (427-438)

CC-En42. Saber cómo usar la comparación entre algunas formas de hacer un ejercicio o entre varias representaciones, para destacar a los estudiantes los aspectos del contenido en los que se deben fijar. [7.3.1] (187-230), (232-236); [8.1.1] (24-77); [8.2.2] (491-510).

[7.3.1] Saber cómo usar la comparación entre algunas formas de hacer un ejercicio o entre varias representaciones, para destacar a los estudiantes los aspectos del contenido en los que se deben fijar. Comentarles la comparación entre la forma de presentarlo/representarlo entre ella y el libro (que en el libro aparece un dibujo en el que se indica sólo la trayectoria que hay que seguir para hacer la multiplicación de los elementos mientras que ella usa otro esquema gráfico, el cual, en el caso en que los elementos a multiplicar no estén en la diagonal principal o secundaria, Aly forma un triángulo en el cual cada elemento sería un vértice, primero los triángulos que se forman dentro del determinante en orientación a la diagonal principal y luego los que se forman dentro del determinante en orientación a la diagonal secundaria). (187-230), (232-236)

[8.1.1] Saber cómo usar la comparación entre algunas formas de hacer un ejercicio o entre varias representaciones, para destacar a los estudiantes los aspectos del contenido en los que se deben fijar. Hacer el mismo ejercicio (el mismo apartado de un ejercicio) de dos formas, primero ella propone una forma de hacerlo, luego E2 propone otra forma y Aly decide explicar esa otra forma de hacerlo en la pizarra para que los demás estudiantes vean esa otra forma de hacerlo y que de cualquier manera el resultado es el mismo. (24-77)

[8.2.2] Saber cómo usar la comparación entre algunas formas de hacer un ejercicio o entre varias representaciones, para destacar a los estudiantes los aspectos del contenido en los que se deben fijar. Darles y explicarles otra forma de escribir (representar) cómo calcular un determinante mediante adjuntos. Aly lo escribe de forma compacta $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$ con *i* fijo. (491-510)

CC-En43. Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. [7.3.1] (187-230), (232-236); [7.3.2] (271-277); [7.3.3] (337-350); [8.1.1] (107), (209).

[7.3.1] Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán “mejor” algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. Indicar con flechas los elementos que hay que ir multiplicando para explicar la regla de Sarrus. En el caso en que los elementos a multiplicar no estén en la diagonal principal o secundaria, Aly forma un triángulo en el cual cada elemento sería un vértice, primero los triángulos que se forman dentro del determinante en orientación a la diagonal principal y luego los que se forman dentro del determinante en orientación a la diagonal secundaria, comentarles la comparación entre la forma de presentarlo/representarlo entre ella y el libro (que en el libro aparece un dibujo en el que se indica sólo la trayectoria que hay que seguir para hacer la multiplicación de los elementos mientras que ella usa otro esquema gráfico, el cual, en el caso en que los elementos a multiplicar no estén en la diagonal principal o secundaria). (187-230), (232-236)

[7.3.2] Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán “mejor” algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. Atender (responder) y explicar la duda de E11. E11 pregunta: ¿cuáles son los que van con el signo negativo? (qué productos van precedidos del signo menos al aplicar la regla de Sarrus para calcular el valor del determinante de orden 3). Aly le responde a forma de explicación en la pizarra, que los que van en dirección de la diagonal secundaria. (271-277)

[7.3.3] Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán “mejor” algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. Representar la generalización de la propiedad usando un esquema geométrico. Aly escribe un determinante y dentro de él dibuja un triángulo de la diagonal principal hacia arriba y debajo del triángulo escribe un cero grande. (337-350)

[8.1.1] Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán “mejor” algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. Usar un esquema gráfico para que se fijen (para visualizar) cuál es la fila a la que van a aplicar la propiedad y por tanto las otras dos filas quedan “quietas” (Aly encierra en un círculo la segunda fila). (107)

[8.1.1] Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán “mejor” algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. Explicarles que 2y es 2y+0 para que lo visualicen más fácilmente los estudiantes cuando apliquen la propiedad. (209)

CC-En44. Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán “mejor” algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. [7.3.1] (187-230), (232-236); [7.3.3] (337-350); [8.1.1] (107).

[7.3.1] Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán “mejor” algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. Indicar con flechas los elementos que hay que ir multiplicando para explicar la regla de Sarrus. En el caso en que los elementos a multiplicar no estén en la diagonal principal o secundaria, Aly forma un triángulo en el cual cada elemento sería un vértice, primero los triángulos que se forman dentro del determinante en orientación a la diagonal principal y luego los que se forman dentro del determinante en orientación a la diagonal secundaria. Usa un esquema gráfico. (187-230)

[7.3.1] Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán “mejor” algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. Comentarles la comparación entre la forma de presentarlo/representarlo entre ella y el libro (que en el libro aparece un dibujo en el que se indica sólo la trayectoria que hay que seguir para hacer la multiplicación de los elementos mientras que ella usa otro esquema gráfico, el cual, en el caso en que los elementos a multiplicar no estén en la diagonal principal o secundaria, Aly forma un triángulo en el cual cada elemento sería un vértice, primero los triángulos que se forman dentro del determinante en orientación a la diagonal principal y luego los que se forman dentro del determinante en orientación a la diagonal secundaria). (187-230), (232-236)

[7.3.3] Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán “mejor” algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. Representar la generalización de la propiedad usando un esquema geométrico. Aly escribe un determinante y dentro de él dibuja un triángulo de la diagonal principal hacia arriba y debajo del triángulo escribe un cero grande. (337-350)

[8.1.1] Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. Usar un esquema gráfico para que se fijen (para visualizar) cuál es la fila a la que van a aplicar la propiedad y por tanto las otras dos filas quedan "quietas" (Aly encierra en un círculo la segunda fila). (107)

CC-En45. Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan "mejor" el contenido que presenta, saber cómo evocar un concepto(s), un ejemplo, ejercicio, problema o procedimiento equivalente visto(s) o hecho(s) anteriormente, para presentar un nuevo concepto o un ejemplo del nuevo concepto, para que los estudiantes traigan a la mente ese contenido o se hagan una idea de cómo se resuelve el nuevo problema. [6.3] (589-591); [7.2.2] (139-141).

[6.3] Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan "mejor" el contenido que presenta. Evocar ejercicios equivalentes que han hecho anteriormente en clase. (589-591)

[7.2.2] Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan "mejor" el contenido que presenta. Hacer referencia a un ejercicio equivalente anterior a este, para que los estudiantes ubiquen el ejercicio en la propiedad correspondiente más rápidamente. (139-141)

De los aspectos del **conocimiento curricular,** podemos abstraer los siguientes descriptores en términos más generales:

CC1. Saber qué contenidos aparecen y cómo están organizados en el libro de texto. [6.3] (266-271), (573); [7.3.1] (176-177), (232-236); [7.4] (424-425); [8.2.2] (514-515).

[6.3] Saber los contenidos que están en el libro de texto. (266-271)

[6.3] Saber los contenidos que están en el libro de texto. (573)

[7.3.1] Saber que la regla de Sarrus está en el libro de texto. (176-177)

[7.3.1] Saber que la regla de Sarrus está en el libro de texto (un dibujo en el libro en el que se indica sólo la trayectoria que hay que seguir para hacer la multiplicación de los elementos). (232-236)

[7.4] Comentarles que esta nueva propiedad (de proporcionalidad a combinación lineal) está en el su libro te texto como propiedad 9. (424-425)

[8.2.2] Saber que ese contenido está en el libro de texto. (514-515)

CC2. Saber qué temas se deben ver posteriormente en el curso. [6.2] (97-99).

[6.2] Saber los contenidos que deben aprender y la orientación de éstos, pues el tema que está presentando es determinantes pero sabe que eso se ocupará luego cuando explique la clasificación de sistemas. (97-99)

De los aspectos del **conocimiento pedagógico general,** podemos abstraer los siguientes descriptores en términos más generales:

CPG1. Conocer estrategias para controlar la indisciplina o distracción en el aula, para atraer la atención de los estudiantes o llamar la atención a los estudiantes cuando están comportándose de manera impropia para una clase. [8.1.2] (192-193).

[8.1.2] Control de la indisciplina. Aly: *E3 por qué no atiendes hoy mejor, y copias en casa, porque aquí si vienen a copiar es perder tiempo*. (192-193)

CPG3. Conocimiento y habilidad discursiva para motivar, re-encomendar o exigir a los estudiantes que hagan una demostración, los ejemplos o los ejercicios (para hacer en clase o de deberes). [6.2] (58-60).

[6.2] Motivación: Animarlos a que hagan los deberes. (58-60)

CPG4. Conocimiento y habilidad discursiva para preguntarles si les ha quedado claro lo que acaban de hacer, si tienen más dudas; para ver si van entendiendo lo que han visto; para acercarse al lugar de los estudiantes cuando levantan la mano porque tienen alguna duda o porque ponen cara “rara”. [7.2.2] (152-153); [7.3.2] (278-284), (300), (309-310); [8.2.1] (288-291), (449).

[7.2.2] Acercarse al lugar de los estudiantes cuando levantan su mano porque tienen dudas y preguntarles: *¿alguna duda?* (152-153)

[7.3.2] Una forma de acercarse a los estudiantes para ver si tienen alguna duda y luego explicársela: Aly primero pregunta a E7 si ha entendido lo que debe hacer para resolver el problema, al ver que E7 no le responde y observar a Aly, como esperando que le explique lo que debe hacer, Aly empieza a explicarle lo que hay que hacer, luego le pregunta si ahora si ya sabe lo que hay que hacer para continuar resolviendo el problema, E7 contesta que sí. (278-284)

[7.3.2] Una forma de decirles que si no entienden algo pues le pregunten (Aly dice: *“bueno si alguien no se entera de algo que me llame, ¿vale?”*). (300)

[7.3.2] Una forma de acercarse a los estudiantes para saber si tienen dudas, preguntándoles a algunos estudiantes: ¿tú cómo vas? (309-310)

[8.2.1] Preguntarles para saber si van entendiendo (Aly: *Otro menor de esta matriz, ¿quién me lo dice? Un menor de orden 3 ¿cómo podríamos hacer o encontrar un menor de orden 3 de ahí?*). (288-291)

[8.2.1] Una forma de preguntarles si entienden lo que se ha hecho (Aly: *Se entiende ¿no?).* (449)

CPG6. Conocer cómo controlar al estudiante que sí hizo sus deberes (tareas) para que también trabajen y participen otros estudiantes, al hacer o revisar los deberes en clase. [7.3.2] (263-268).

[7.3.2] Controlar al estudiante que si hizo sus deberes, para que también trabajen los otros (Aly interrumpe e ignora la respuesta de E1, Aly prefiere que también los demás estudiantes intenten resolver el ejercicio, por ello “calla” a E1. (263-268)

CPG7. Conocimiento y habilidad para acercarse a revisar lo que han hecho los estudiantes y cómo lo han hecho. [7.3.2] (304-312).

[7.3.2] Una forma de acercarse a revisar lo que han hecho los estudiantes y cómo lo han hecho, preguntándoles qué resultados han obtenido ellos, después de que E10 ha calculado el determinante en la pizarra. (304-312)

Aly

Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales

De los aspectos del **conocimiento común del contenido,** podemos abstraer los siguientes descriptores en términos más generales:

CCC1. Saber la definición del concepto, regla, propiedad, teorema o método que está presentando. [11.1] (55-64), (95-99), (99-107), (121-128), (171-175), (178-179); [11.2.1] (188-207), (214-220), (237-295); [11.2.2] (372-416), (405-416), (420-428); [12.2] (231-236); [14.1] (26-30), (147-148); [14.2] (316-338); [14.3] (534-537), (552-558); [15.1] (84-86), (87-89); [15.2] (252-265).

[11.1] Saber el teorema de Rouché-Frobenius (que si el rango máximo encontrado coincide con el número de incógnitas entonces el sistema es compatible determinado). (55-64)

[11.1] Saber la regla de Sarrus para calcular un determinante de 3x3. (95-99), (171-175)

[11.1] Saber el Teorema de Rouché-Frobenius. (99-107), (178-179)

[11.1] Saber la definición del determinante de una matriz. (121-128)

[11.2.1] Saber el Teorema de Rouché-Frobenius. (188-207)

[11.2.1] Saber la relación entre un sistema de Cramer y los rangos (considerando que un sistema será de Cramer cuando el número de ecuaciones sea igual al número de incógnitas y además eso sea igual al rango de la matriz de coeficientes e igual al rango de la matriz ampliada, es decir, todos coinciden). (214-220)

[11.2.1] Saber la definición de la regla de Cramer para un sistema genérico de 4x4. (237-295)

[11.2.2] Saber en qué consiste la propiedad de los determinantes de que si todos los elementos de una fila o columna están formados por dos sumandos, dicho determinante se descompone en la suma de dos determinantes. (372-416)

[11.2.2] Saber en qué consiste la propiedad de los determinantes de que el $|A|=0$ si una fila o columna es proporcional a otra. (405-416)

[11.2.2] Saber en qué consiste la propiedad de los determinantes de que si se multiplica un determinante por un número real, queda multiplicado por dicho número cualquier fila o columna, pero sólo una. (420-428)

[12.2] Saber el teorema de Rouché-Frobenius. (231-236)

[14.1] Saber el Teorema de Rouché-Frobenius. (26-30)

[14.1] Saber el teorema de Rouché-Frobenius. (147-148)

[14.2] Saber en qué consiste un sistema en forma matricial. (316-338)

[14.3] Saber que hay que estudiar el rango para saber si el SH es determinado o indeterminado. (534-537)

[14.3] Saber el Teorema de Rouché-Frobenius, que si el Rango A = Rango A ampliada = Rango máximo entonces es un Sistema Compatible Determinado y entonces el sistema tiene solución trivial. (552-558)

[15.1] Saber que si el rango de la matriz A no es el rango máximo, es decir, el rango A < número de incógnitas, eso no significa que el sistema sea incompatible. (84-86)

[15.1] Saber que en un sistema homogéneo el rango de A = rango de la matriz ampliada y entonces siempre será un sistema compatible y entonces lo que tienen que ver es si es determinado o indeterminado. (87-89)

[15.2] Saber que puede usar la regla de Cramer para resolver este SCD, es decir, que se cumplen las condiciones para aplicar esa regla. (252-265)

CCC2. Saber usar términos y notación matemática (que aparece en las definiciones formales). [11.2.1] (238-249); [12.1] (63-72), (72-82), (83-93); [12.2] (175-178), (216-217).

[11.2.1] Saber escribir el sistema de 4x4 de forma genérica. (238-249)

[12.1] Saber indicar $|A_x|$, $|A_y|$ y $|A_z|$ y simplificar lo que queda en $x=|A_x|/|A|$, $y=|A_y|/|A|$, $z=|A_z|/|A|$. (63-72), (72-82), (83-93), respectivamente.

[12.2] Saber usar términos adecuados en la explicación, pues no es lo mismo decir “eliminamos una columna” de la matriz que decir “a efectos del rango eliminamos una columna” de la matriz. (175-178), (216-217)

CCC4. Saber la operatividad, propiedades (en cuanto a su uso), utilidad o aplicación de un concepto. [11.1] (26-31), (32-36), (41-45), (51-54), (77-83), (84-88), (89-105), (116-158), (147-153), (159-177); [11.2.1] (258-260), (263-275), (278-288), (289-291), (293); [11.2.2] (448-458); [11.2.3] (477), (481-487), (542-554); [12.1] (16-18), (37-39), (63-72), (72-82), (83-93); [12.2] (98-107), (130-225), (270-277)U(302-355), (311-313), (369-374); [12.3] (406-414) (415-420); [14.1] (35-40), (41-43), (118-145), (135-137), (159-163), (164-174), (175-181), (201-202), (211-215), (216-219), (220-225), (233-243), (244-246); [14.2] (304-315), (349-362), (366-368), (369-374), (375-381), (386-392), (386-464), (465-491), (501-507); [14.3] (538-552); [15.1] (1-14), (46-52), (56-71), (84-86), (95-109), (143-155), (160-173), (177-188), (192-197), (198-204); [15.2] (223-248), (270-283), (284-288), (289-293), (339-346), (362-365), (381-387).

[11.1] Saber estudiar el rango de una matriz:
Estudiar el rango de la matriz de coeficientes, es decir, en el apartado a) saber si existe o no rango 1, rango 2 ó rango 3. (26-31). *Idem* en el apartado b) del ejercicio (84-88). *Idem* en el apartado c). (116-158)
Estudiar el rango de la matriz ampliada:
En el apartado a), aprovechar que ya se sabe que mínimo existe rango 2 (porque la matriz de coeficientes tiene rango 2) y para ver si la matriz ampliada tiene rango 3 basta con calcular el determinante de ésta. (32-36) Saber que el rango de la ampliada es 2

porque el determinante de la ampliada es 0, entonces el máximo menor encontrado fue de orden 2. (51-54)
En el apartado b), saber que el rango de la ampliada es 3 porque el máximo menor encontrado es de orden 3. (89-105)
En el apartado c), saber que el rango de la ampliada es 3 porque el máximo menor encontrado es de orden 3. (159-177)

[11.1] Saber que la última columna es combinación lineal de las anteriores (C_3=C_1-C_2). (41-45)

[11.1] Saber que de la escritura de la matriz ampliada pueden ir analizando el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada (para no escribir primero la matriz de coeficientes y luego la ampliada, es decir, para escribir sólo la ampliada y de ahí analizar el rango de ambas). (77-83)

[11.1] Saber que en el sistema de 3x4 al ampliar la matriz de coeficientes con la cuarta columna, el determinante del menor de orden 3 vale cero, porque existe una combinación lineal en las columnas (C_3=C_1-C_2). (147-153)

[11.2.1] Saber cómo calcular x según la regla de Cramer ($x=|A_x|/|A|$). (258-260)

[11.2.1] Saber cómo se calcula el $|A_x|$. (263-275)

[11.2.1] Saber cómo calcular y según la regla de Cramer ($y=|A_y|/|A|$). (278-288)

[11.2.1] Saber cómo calcular z según la regla de Cramer ($z=|A_z|/|A|$). (289-291)

[11.2.1] Saber cómo calcular t según la regla de Cramer ($t=|A_t|/|A|$). (293)

[11.2.2] Saber la estrategia para encontrar $y=|A_y|/|A|$ partiendo del $|A_y|$. (448-458)

[11.2.3] Saber que en una fracción el denominador tiene que ser $\neq 0$ para que esté definida (determinada). (477)

[11.2.3] Saber calcular el rango de la matriz de coeficientes (incluye saber determinar el menor de orden 1, 2 y 3, es decir, hacer los respectivos determinantes). (481-487)

[11.2.3] Saber cómo hacer la comprobación de la respuesta (los valores obtenidos de x, y, z) en el sistema. (542-554)

[12.1] Saber calcular determinantes de 3x3 usando la regla de Sarrus. (16-18)

[12.1] Saber que es imposible que la ampliada tenga rango 4, porque A tiene a lo más tres filas y entonces aunque la ampliada tenga 4 columnas, el rango de la matriz de la ampliada a lo más puede ser 3, es decir, imposible que el rango de la ampliada sea 4. (37-39)

[12.1] Saber encontrar el valor de x, y, z. (63-72), (72-82), (83-93).

[12.2] Saber usar la regla de Cramer para un SCI. (98-107)

[12.2] Saber calcular el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada. (130-225)

[12.2] Saber aplicar (usar) la regla de Cramer para resolver un SCI. (270-277)U(302-355)

[12.2] Saber la estrategia para indicar los determinantes $|A_x|$, $|A_y|$ y $|A_z|$ para encontrar el valor de x, y, z con la regla de Cramer: siempre los términos independientes se colocan en la primera, en la segunda o en la tercera columna dependiendo de la incógnita que se busque. (311-313)

[12.2] Saber resolver un SCI. (369-374)

[12.3] Saber calcular el rango de la matriz de coeficientes. (406-414)

[12.3] Saber parte de la estrategia para resolver SCI (Aly: ... *las incógnitas que van a quedar, son las que están en esa submatriz, es decir, que la última ecuación la eliminamos, entonces ¿ahora qué hacemos con la z? Pues en este caso nuestras incógnitas van a ser x, y, y la z pasa a ser un parámetro, la vamos a llamar λ*). (415-420)

[14.1] Saber que existe rango 1 y rango 2 en la matriz de coeficientes. (35-40)

[14.1] Saber calcular el determinante de orden 3. (41-43)

[14.1] Saber que el rango de A es dos y el rango de la ampliada es tres (cuando a=1). (118-145)

[14.1] Saber que un sistema es incompatible si por un lado se tiene que x+y+z=0 y que x+y+z=1, porque la misma ecuación no puede ser igual a 0 e igual a 1 simultáneamente. (135-137)

[14.1] Saber que el rango de A es dos cuando a=2. (159-163)

[14.1] Saber que el rango de la matriz ampliada es dos cuando a=2. (164-174)

[14.1] Saber lo que dice el Teorema de Rouché-Frobenius y por lo tanto deducir que con a=2 el sistema es un Sistema Compatible Indeterminado. (175-181)

[14.1] Saber que si la solución del sistema queda por ejemplo en términos de la expresión z/2, entonces es conveniente hacer z=2λ y no z=λ para que la expresión quede más sencilla. (201-202)

[14.1] Saber que puede quitar la tercera ecuación del sistema (porque el rango de la matriz de coeficientes no es tres sino dos, entonces deja las dos ecuaciones con las que obtuvo rango dos). (211-215), (216-219) y (porque una fila es combinación lineal de las otras dos). (220-225)

[14.1] Saber que si el sistema de 3x3 tiene a lo más rango dos, lo importante es quedarse con las ecuaciones del menor de orden dos cuyo determinante es distinto de cero, independientemente del orden, es decir, de si es la primera y la segunda ecuación o la segunda y la tercera ecuación. (233-243)

[14.1] Saber que en un sistema de 3x3, si queda rango uno pues habría una incógnita y dos parámetros, si queda rango dos entonces dos incógnitas y un parámetro. (244-246)

[14.2] Saber escribir el sistema del ejemplo en forma matricial AX=C. (304-315)

[14.2] Saber despejar la X de la ecuación matricial AX=C, es decir, saber que $X= A^{-1}C$. (349-362)

[14.2] Saber la analogía entre el elemento neutro de los números reales y la matriz identidad en las matrices y su funcionalidad (que al multiplicar un elemento del mismo conjunto por el elemento neutro o la matriz identidad, en los números reales o en matrices respectivamente, lo/la deja invariante). (366-368)

[14.2] Saber que $X=A^{-1}C$ es otra forma de calcular el valor de las incógnitas y que para usar esa forma, el sistema debe ser cuadrado (de 2x2, 3x3, etc.). (369-374)

[14.2] Saber las condiciones para aplicar $X=A^{-1}C$ y encontrar el valor de x, y, z: el sistema debe ser cuadrado, es decir, igual número de ecuaciones que de incógnitas y existir A^{-1}, es decir, resolver el sistema de forma matricial. (375-381)

[14.2] Saber que como el determinante de A es distinto de cero entonces existe A^{-1}. (386-392)

[14.2] Saber calcular la matriz inversa con la expresión $A^{-1}=(AdjA)^t/|A|$, incluye saber calcular cada parte de esa expresión (AdjA, $(AdjA)^t$ y |A|). (386-464)

[14.2] Saber encontrar el valor de x, y, z una vez que tiene A^{-1}, es decir, obtener X del producto $A^{-1}C$ y con ello saber el valor de x, y, z. (465-491)

[14.2] Saber cuál método puede ser más rápido y por qué (*por Cramer puede ser más rápido pero depende de la dificultad de la matriz, si hay ceros en la matriz pues es mejor hacerlo por Cramer, pero si piden hacerlo con la forma matricial pues entonces hay que hacerlo con esa forma*). (501-507)

[14.3] Saber que en el ejemplo de SH existe rango 1, rango2 y rango 3 (incluye saber calcular los determinantes de orden 2 y 3). (538-552)

[15.1] Saber en el apartado b) del ejercicio (1-14):
1. Que existe rango1 y rango 2.
2. Que no existe rango 3 (saber la regla de Sarrus y calcular el determinante de la matriz A de orden 3x3).

[15.1] Saber que en el apartado c) existe rango 1, rango 2 y rango 3. (46-52)

[15.1] Saber que el rango de A = 3 por más que se agreguen filas porque el orden de A es 4x3, entonces el rango máximo que puede tener es 3. (56-71)

[15.1] Saber que si el rango de la matriz A no es el rango máximo, es decir, el rango A < número de incógnitas, eso no significa que el sistema sea incompatible. (84-86)

[15.1] Saber que en el apartado d) existe rango 1, rango 2 y rango 3. (95-109)

[15.1] Saber que se puede usar la regla de Cramer para resolver el SCI. (143-155)

[15.1] Saber calcular $x=|A_x|/|A|$, claramente incluye saber calcular $|A_x|$ y $|A|$. (160-173)

[15.1] Saber calcular $y=|A_y|/|A|$, claramente incluye saber calcular $|A_y|$ y $|A|$. (177-188)

[15.1] Saber calcular $z=|A_z|/|A|$, claramente incluye saber calcular $|A_z|$ y $|A|$. (192-197)

[15.1] Saber (198-204):

1. Expresar la solución en términos del parámetro λ.
2. Saber escoger el λ adecuado para que la solución no quede expresada en fracción, es decir, que quede como solución: (λ, - λ, 0, 2λ), λ cualquier número real. En este caso conviene llamar a t=2λ para que la solución sea (λ, - λ, 0, 2λ), λ cualquier número real; de lo contrario, si t=λ entonces la solución es (λ/2, -λ/2, 0, λ), λ cualquier número real.

[15.2] Saber que existe rango 1, rango 2 y en qué casos rango 3 (dependiendo de los valores del parámetro *a*). (223-248)

[15.2] Saber calcular $x=|A_x|/|A|$, claramente incluye saber calcular $|A_x|$ y $|A|$. (270-283)

[15.2] Saber calcular $y=|A_y|/|A|$, claramente incluye saber calcular $|A_y|$ y $|A|$. (284-288)

[15.2] Saber calcular $z=|A_z|/|A|$, claramente incluye saber calcular $|A_z|$ y $|A|$. (289-293)

[15.2] Saber (339-346):

1. Que el rango de la ampliada es 3.
2. Que como el rango de A = 2 ≠ rango de la ampliada = 3, entonces el sistema es incompatible y entonces no existe solución.

[15.2] Saber que con a=-3/4 la matriz A tiene rango 2. (362-365)

[15.2] Saber que (381-387):

1. El rango de la ampliada es 3.
2. Si el rango A = 2 ≠ rango de la ampliada = 3, entonces el sistema es incompatible y entonces no existe solución.

CCC5. Saber hacer la demostración de un teorema o regla. [11.2.2] (299-302).

[11.2.2] Saber hacer la demostración de la regla de Cramer. (299-460)

De los aspectos del **conocimiento especializado del contenido,** podemos abstraer los siguientes descriptores en términos más generales:

CEC1. Saber el significado de los conceptos. [14.1] (254-262).

[14.1] Saber el significado del parámetro en la solución de un sistema compatible indeterminado, saber que al dar soluciones a ese sistema con distinto valor del parámetro, en el conjunto de infinitas soluciones la solución será la misma (seleccionen el menor que seleccionen siempre y cuando elijan el menor de forma correcta –que el determinante sea distinto de cero). Es el profesor a diferencia de otros profesionales, el encargado de explicar a los estudiantes (sobre todo cuando es la primera vez que ven eso los estudiantes) que aunque aparentemente vean que las soluciones son distintas (con distinto valor del parámetro) en el conjunto de infinitas soluciones es la misma. (254-262)

CEC4. Saber la causa matemática de los errores comunes de los estudiantes. [14.2] (349-362).

[14.2] Saber que al aplicar la propiedad conmutativa en matrices, el error de los estudiantes puede provenir de la extensión de la propiedad conmutativa del producto en los números reales al producto en matrices, de tal manera que cuando despejan X de la ecuación matricial AX=C, deben tener cuidado al multiplicar A^{-1} por la izquierda en ambos términos de la igualdad, especialmente en la segunda parte de la igualdad (en $A^{-1}C$), pues en las matrices el producto no es conmutativo y entonces $A^{-1}C \neq CA^{-1}$. Es el profesor a diferencia de otros profesionales, el que se plantea la causa matemática del error de los estudiantes al enfrentarse con la propiedad no conmutativa en el producto de matrices. (349-362)

CEC5. Conocer aspectos matemáticos de especial importancia para la enseñanza, lo que le permite hacer notar o distinguir la importancia de un aspecto matemático específico para enseñar el contenido matemático. [14.1] (44-56).

[14.1] Saber que si el valor del determinante se expresa como una ecuación de segundo grado, entonces se pueden aplicar propiedades de los números reales en la ecuación. Es decir, cambiar de signo al término -a2 y, por lo tanto a todos los términos de la ecuación. Aly hace notar a los estudiantes que el valor del determinante no puede cambiar de signo, pero la ecuación de segundo grado en si misma sí (aplicando propiedades de campo de los números reales). E1 ha dicho: "Una pregunta, si el valor del determinante fuera, en particular, a=0, tendríamos que igualar eso a 0, pero también se podría cambiar de signo a la a al cuadrado". La expresión del determinante de la matriz es -a2+3a-2, la ecuación sería expresada como -a2+3a-2=0. (44-56)

De los aspectos del **conocimiento del contenido y estudiantes,** podemos abstraer los siguientes descriptores en términos más generales:

CC-Es1. Saber escuchar e interpretar el conocimiento o pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje (común o en proceso de adquisición del nuevo concepto –mezcla de lenguaje común con matemático). [14.1] (135-148); [15.1] (90-92).

[14.1] Saber escuchar e interpretar el conocimiento/pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje usual. En este caso, interpretar que lo que E4 quiere decir es que un sistema es incompatible si por un lado se tiene que x+y+z=0 y que x+y+z=1, es decir, la misma ecuación no puede ser igual a 0 e igual a 1 simultáneamente. (135-148)

[15.1] Saber que le permite interpretar el pensamiento de E1 y responderle. En este caso E1 pregunta que si el sistema homogéneo es incompatible, pero al justificar E1 su respuesta (E1 dice que es incompatible porque el rango de A va a ser menor que el número de incógnitas), Aly interpreta que E1 lo que intenta decir es que el sistema homogéneo va a salir compatible indeterminado. (90-92)

CC-Es3. Prever la confusión que pudiera tener el alumno con algún aspecto específico del contenido que se esté viendo en clase. [11.2.2] (339-340); [12.1] (32-34); [12.2] (260-269); [15.2] (368-373).

[11.2.2] Prever que puede ser más complicado o producir confusión a los estudiantes trabajar con x_1, x_2, x_3, x_4, por eso al hacer la demostración de la regla de Cramer para un sistema de 4x4 usa la notación x, y, z, t en lugar de x_1, x_2, x_3, x_4. (339-340)

[12.1] Prever que los estudiantes se pueden confundir al tener poca experiencia en estudiar el rango (rango 1, rango 2 y rango 3). (32-34)

[12.2] Prever que los estudiantes se pueden confundir con la z y la t que ahora son parámetros, por tanto, mejor les dará nombre de parámetro λ y μ, respectivamente. (260-269)

[15.2] Prever que al tomar ahora otro menor distinto al que toman comúnmente puede confundir a los estudiantes, al estudiar este sistema. (368-373)

CC-Es5. Prever (anticipar) que los estudiantes se pueden quedar con una imagen o idea inadecuada del contenido. [11.1] (121-128); [11.2.3] (467); [14.1] (44-56), (281-282).

[11.1] Prever que los estudiantes se pueden quedar con una imagen inadecuada del contenido y por ello luego siente la necesidad de hacer una aclaración o comentario, es decir, prever que los estudiantes no tomen en cuenta que la matriz debe ser cuadrada para calcular su determinante, pues el determinante de una matriz que no sea cuadrada no está definido. (121-128)

[11.2.3] Prever que los estudiantes se pueden quedar con la imagen de que no necesitan hacer todo el procedimiento para obtener los valores de x, y, z, debido a lo que acaban de ver en la estrategia de la demostración de la regla de Cramer, pues al hacer la demostración, Aly hizo el desarrollo del procedimiento completo para encontrar el valor de x pero para encontrar el valor de y y de z no hizo el procedimiento completo sino que sólo les comentó la estrategia para calcularlos. (467)

[14.1] Prever que al cambiar de signo a la ecuación que representa el valor del determinante, los estudiantes pueden hacerse una imagen inadecuada y cometer el error de cambiar de signo el valor del determinante, es decir, hacerlo mecánicamente sin saber lo que están haciendo. (44-56)

[14.1] Prever que se pueden quedar con la idea incorrecta de que resolvieron el problema completo y por ello les aclara que sólo lo han resuelto para a=2. (281-282)

CC-Es7. Saber que los estudiantes pueden equivocarse al hacer determinado cálculo o de un número o de un signo (más leve), provocado por un despiste al hacer una(s) operación(es)/transformación(es); o por no dominar el contenido que se les está presentando. [14.2] (413-416).

[14.2] Saber que pueden equivocarse en el signo, al escribir sólo el valor del adjunto, sin escribir todos los cálculos, es decir, al hacerlo directamente. (413-416)

CC-Es9. Saber que los estudiantes podrían hacer cálculos mecánicamente sin saber realmente lo que están haciendo. [14.1] (44-56), (349-362).

[14.1] Saber que al cambiar de signo a la ecuación que representa el valor del determinante, los estudiantes pueden cometer el error de cambiar de signo el valor del determinante, es decir, hacerlo mecánicamente sin saber lo que están haciendo. (44-56)

[14.2] Saber que los estudiantes pudieran equivocarse al multiplicar por A^{-1} sin considerar si debe ser por la derecha o por la izquierda (para despejar X de AX=C). (349-362)

CC-Es11. Prever que los estudiantes no vean que un problema es equivalente a otro; o que no vean que una igualdad la pueden usar en un sentido o en otro. [11.2.2] (333-337).

[11.2.2] Prever que los estudiantes no ven fácilmente el otro sentido de la igualdad (←, en este caso particular, en la expresión $a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}t=C_1$, no ven que esa expresión también se puede ver como $C1=a11x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}t$). (333-337)

CC-Es12. Saber que los estudiantes pueden ponerse a hacer cálculos sin antes fijarse si pueden usar una propiedad. [11.1] (38-40), (91-92), (133-134), (168-169); [12.2] (155,158), (164-167).

[11.1] Saber que los estudiantes pueden ponerse a hacer cálculos sin antes fijarse si pueden usar una propiedad, es decir, sin ver si existe alguna relación entre las filas o las columnas para ver si se puede aplicar una propiedad de los determinantes y no hacer todo el cálculo. En el apartado a) (38-40); en el apartado b) (91-92); en el apartado c) (133-134), (168-169)

[12.2] Saber que no se fijen si existe alguna relación entre filas o columnas y terminar más rápido el determinante justificando la propiedad que utilicen. (155,158), (164-167)

CC-Es13. Saber que para los estudiantes será más comprensible un tema si lo ven con un ejemplo concreto que aparece en el libro de texto. [12.2] (110-112).

[12.2] Saber que para los estudiantes será más comprensible el subtema: "Uso de la regla de Cramer en un SCI" si lo ven con un ejemplo concreto que aparece resuelto en el libro de texto. (110-112)

CC-Es14. Saber que los estudiantes entenderán "mejor" el ejemplo si antes de empezar a hacerlo les remarca las principales características del concepto que usará en el ejemplo. [14.3] (513-529).

[14.3] Saber que si les destaca a los estudiantes las principales características de un SH antes de hacer el ejemplo, entenderán "mejor", "más rápido" y "bien" el ejemplo de SH que les va a presentar. (513-529)

CC-Es15. Saber que los estudiantes pueden atascarse en algunos detalles de la solución del problema y perder el sentido del problema. [15.1] (21-23).

[15.1] Saber que puede haber estudiantes que les preocupe o les sea más importante ver cuál sería esa dependencia lineal y pierdan el sentido del problema, es decir, prever que este dato puede despistar a los estudiantes, estancarse ahí (en este caso el determinante de orden 3 da 0 y no se ve tan fácilmente la dependencia línea entre filas o columnas), y no terminar de resolver el sistema de ecuaciones. (21-23)

CC-Es16. Saber que a los estudiantes les puede parecer extraño usar la primera vez un método/regla que estaba diseñado para otro caso/situación del contenido. [15.1] (150-155).

[15.1] Saber que a los estudiantes les puede parecer extraño usar la regla de Cramer en un SCI y que por ello no la utilicen a pesar de que se cumplan las condiciones para aplicar la regla de Cramer. (150-155)

CC-Es17. Saber que los estudiantes, al resolver problemas extensos, pueden olvidar algún cálculo que ya habían hecho al inicio y no aprovecharlo cuando se utilice nuevamente para solucionar el mismo problema. [15.2] (301-328).

[15.2] Saber que los estudiantes pueden no apreciar que cuando calcularon el determinante de la matriz A y vieron para qué valores ese determinante vale cero, precisamente encontraron que uno de esos valores es a=2, entonces A no puede tener rango 3. Es decir, saber que los estudiantes pueden cometer el error de volver a calcular el determinante de A y "estudiar desde cero" el rango de A. (301-328)

CC-Es19. Saber que los estudiantes pueden resolver fácilmente alguna parte operacional (algún sistema de ecuaciones, alguna ecuación de segundo grado, algún determinante) del procedimiento. [15.2] (235-236); [11.2.3] (503-505), (506-515), (516-535); [12.1] (63-69), (73-79), (84-90).

[15.2] Saber que los estudiantes pueden resolver fácilmente una ecuación de segundo grado y por ello sólo anotar el resultado de esas operaciones. Aly no resuelve la ecuación de segundo grado sólo anota los valores que da, en este caso a=2 y a=-3/4. (235-236)

[11.2.3] Saber que los estudiantes ya saben calcular determinantes. Aly sólo anota lo que da el $|A_x|$, es decir, no lo resuelve, sólo lo indica y anota el valor de x. Similarmente lo hace con el $|A_y|$, lo indica y no lo resuelve en clase, sólo anota el resultado de y. Para z, indica el $|A_z|$ y les pide que ellos lo calculen. (503-505), (506-515), (516-535)

[12.1] Saber que ya saben calcular determinantes. Indicarles el determinante A_x y comentarles que se resuelve con Sarrus y sólo anotar el resultado. (63-69). Indicar nuevamente el determinante de A_y y sólo anotar el resultado, es decir, no escribir ni explicar el procedimiento de Sarrus para calcularlo. (73-79). Similarmente al anterior, indicar el determinante A_z y sólo anota el resultado. (84-90)

De los aspectos del **conocimiento del contenido y enseñanza,** podemos abstraer los siguientes descriptores en términos más generales:

Ejemplos

CC-En1. Saber con qué ejemplo o ejercicio empezar, cuándo y cuáles usar para enfatizar, reforzar o generalizar cierta idea. [12.2] (110-112); [12.3] (375-383); [14.1] (226-232); [15.1] (1-205).

[12.2] Saber con qué ejemplo empezar. Decidir con qué ejemplo empezar a abordar este tema (con el primer ejemplo de este tema que aparece resuelto en el libro de texto). (110-112)

[12.3] Saber con qué ejemplo reforzar el contenido. Ponerlos a hacer un ejercicio parecido al que acaban de hacer, justo después de hacer uno similar a ese para que practiquen lo enseñado. (375-383)

[14.1] Saber con qué ejemplo reforzar el contenido. Usar un ejemplo para hacer ver que en un sistema de 3x3 que tiene a lo más rango dos (y no rango tres), no se puede quitar cualquier fila (cualquier ecuación de sistema) para resolverlo, se tendría que quitar la que no garantice rango tres, es decir, dejar las dos ecuaciones que garanticen rango dos. (226-232)

[15.1] Saber con qué ejemplo reforzar el contenido. Decidir revisar este ejercicio con sus tres apartados porque permite practicar y repasar los últimos temas vistos en clase, es un 3 en 1, es decir, 3 casos distintos en un solo ejercicio. (1-205)

CC-En6. Saber qué ejercicios dejarles de deberes para que practiquen. [12.3] (429-432); [14.3] (560-561); [15.2] (398-401).

[12.3] Saber qué dejarles de deberes terminar: el ejemplo que no dio tiempo a terminar en la clase (resolver el sistema por reducción). (429-432)

[14.3] Saber qué dejarles de deberes (ejercicios sobre temas que han visto, para que practiquen y repasen los últimos temas vistos en clase). (560-561)

[15.2] Saber qué dejarles de deberes (ejercicios sobre temas que han visto, para que practiquen y repasen los últimos temas vistos en clase). (398-401)

Ayudas
CC-En8. Saber que una "buena" estrategia para que los estudiantes comprendan o hagan un ejemplo, ejercicio o problema, consiste en explicarles o hacerles hincapié en lo que quiere que hagan y para qué quiere que lo hagan o simplemente explicarles de lo que trata el ejercicio o problema. [14.1] (100-101); [14.2] (451-452); [15.1] (115-118).

[14.1] Saber que es bueno remarcarles que no pierdan el verdadero objetivo del problema: Discutir el sistema según los valores de *a* y clasificarlo. (100-101)

[14.2] Saber que es bueno orientarlos sobre lo que tienen (la Adj A) y lo que hay que hacer para continuar el proceso para calcular A^{-1} (calcular $(AdjA)^t$ y después $(AdjA)^t/|A|$). (451-452)

[15.1] Saber que es bueno hacerles notar que en este ejercicio (sistema homogéneo) se trata de un SCI con un parámetro para que los estudiantes tengan una idea de cómo se va a solucionar ese sistema. (115-118)

CC-En9. Saber cómo señalar a los estudiantes algún dato del problema que no aparece explícito y que luego se usará para dar solución a un ejercicio o resolver un problema. [14.1] (168-169).

[14.1] Saber cómo señalar a los estudiantes algún dato del problema que no aparece explícito y que luego se usará para dar solución a un ejercicio o resolver un problema. Hacer notar el hecho de que en la matriz ampliada la primera columna y la tercera son iguales (pues de ser así, el determinante de la ampliada es cero y entonces el rango de la ampliada es dos). (168-169)

Gestión de la participación.
Respuestas
CC-En16. Saber qué respuestas de los estudiantes aceptar, cuáles interrumpir, cuáles ignorar o cuáles destacar, para alcanzar los objetivos de la enseñanza del contenido trazados por la profesora para esa clase. [11.1] (10-17); [11.2.1] (282-283); [12.1] (51-54); [12.2] (186-187), (201-225).

[11.1] Saber qué respuestas de los estudiantes aceptar, cuáles interrumpir, cuáles ignorar o cuáles destacar, para alcanzar los objetivos de la enseñanza del contenido trazados por la profesora para esa clase. Transferir y orientar la respuesta del estudiante para conducir dicha respuesta a lo que el profesor explicará posteriormente. (10-17)

[11.2.1] Saber cuáles respuestas de los estudiantes aceptar ignorar para alcanzar los objetivos de la enseñanza del contenido trazados por la profesora para esa clase. Ignorar la respuesta de E8 que es incorrecta y que no aporta nada a la explicación que Aly está dando. (282-283)

[12.1] Saber qué respuestas de los estudiantes aceptar, cuáles interrumpir, cuáles ignorar o cuáles destacar, para alcanzar los objetivos de la enseñanza del contenido trazados por la profesora para esa clase. Interpretar y completar la respuesta de E1 (En este caso, acaban de indicar cómo encontrar el valor de x usando Cramer y Aly pregunta: *De la misma forma y, ¿a qué será igual?*, E1: *Al A sub y partido por A*, Aly: *y sería igual al determinante de A sub y partido por el determinante de A*). (51-54)

[12.2] Saber qué respuestas de los estudiantes aceptar, cuáles interrumpir, cuáles ignorar o cuáles destacar, para alcanzar los objetivos de la enseñanza del contenido trazados por la profesora para esa clase. Aly calla a E1 pues su respuesta no es correcta y además no aporta nada a la respuesta correcta del ejercicio (E1 dice que el sistema entonces no es compatible pero se trata de un SCI). (186-187)

[12.2] Saber cuándo ignorar o retomar una respuesta de los estudiantes. En esta ocasión la respuesta de E1 es correcta (que el rango de la matriz de coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada), pero Aly la ignora para hacer el ejercicio. Posteriormente, al escuchar Aly la justificación de la respuesta de E1 (que la columna de los términos independientes es igual a la anterior cambiada de signo, lo cual hace que el rango de la matriz de coeficientes sea igual al de la ampliada) que ella ignoró por un momento, la acepta y la retoma para mostrarles a todo el grupo por qué el rango de la matriz de coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada. (201-225)

CC-En17. Saber cómo orientar una respuesta correcta a un lenguaje matemático aceptado en la matemática escolar, es decir, atendiendo o enfocado a una convención matemática. [11.1] (10-16).

[11.1] Saber cómo orientar una respuesta correcta a un lenguaje matemático aceptado en la matemática escolar, es decir, atendiendo o enfocado a una convención matemática. Transferir y orientar la respuesta del estudiante (E5) a una convención matemática del contenido, es decir, E5 dice el orden de la matriz de coeficientes pero primero dice las columnas y luego las filas (2x3), entonces Aly acomoda la respuesta y remarca que el orden es de 3x2. (10-16)

CC-En19. Saber cómo aprovechar la respuesta de un estudiante, corregirla y utilizarla para explicar algún aspecto del contenido. [11.2.3] (524-532); [15.1] (90-92).

[11.2.3] Saber cómo orientar una respuesta correcta a un lenguaje matemático aceptado en la matemática escolar, es decir, atendiendo o enfocado a una convención matemática. Corregir la idea equivocada del estudiante E3, E3 pensaba que no era necesario hacer el $|A_z|$, porque daba 0, idea errónea de E3 que justificaba que debido a que en la demostración de la regla de Cramer había un paso (para llegar a la expresión $|A_x|=x|A|$) en el que varios determinantes daban 0 (porque existía proporcionalidad entre dos columnas) entonces el $|A_z|=0$. (524-532)

[15.1] Saber cómo orientar una respuesta correcta a un lenguaje matemático aceptado en la matemática escolar, es decir, atendiendo o enfocado a una convención matemática. Traducir/interpretar lo que está pensando E1, corregir y explicarlo. En este caso E1 pregunta que si el sistema homogéneo es incompatible, pero al justificar E1 su respuesta (E1 dice que es incompatible porque el rango de A va a ser menor que el número de incógnitas), Aly interpreta que E1 lo que intenta decir es que el sistema homogéneo va a salir compatible indeterminado, pero que compatible indeterminado es distinto de incompatible. (90-92)

CC-En21. Saber cómo aprovechar las respuestas de los estudiantes, aportadas en la discusión que se presenta en el grupo para hacerles notar algún aspecto incorrecto del contenido. [12.2] (159-161).

[12.2] Saber cómo aprovechar las respuestas de los estudiantes, aportadas en la discusión que se presenta en el grupo para hacerles notar algún aspecto incorrecto del contenido. Corregir el lenguaje matemático de los estudiantes (E1 ha dicho que una columna es inversa de otra y Aly le comenta que no inversa sino opuesta, en este caso $C_3=-C_2$). (159-161)

Preguntas y respuestas

CC-En22. Saber cómo transferir e interpretar la pregunta y/o respuesta de un estudiante y luego contestar a forma de explicación para todos los estudiantes. [12.2] (278-284); [14.1] (135-148), (211-215), (216-219), (233-243); [14.2] (413-416); [15.1] (90-92).

[12.2] Saber cómo transferir e interpretar la pregunta y/o respuesta de un estudiante y luego contestar a forma de explicación para todos los estudiantes. Interpretar las preguntas y respuestas de E1, pues E1 pregunta si ese SCI se puede resolver con una reducción, pero en su primera intervención, pregunta si lo puede resolver por Gauss pero posteriormente al responder a Aly, Aly transfiere su lenguaje común, es decir, su pensamiento matemático a lenguaje matemático (E1: *Una pregunta, si por ejemplo se* *suma o yo lo quisiera resolver por Gauss ¿se puede?*, Aly: *Claro, lo hemos hecho ¿no?*, E1: *Si pero me refiero por ejemplo a x-y, a la primera fila y la segunda fila*. Aly: *Ah tú dices aplicar una reducción*. E1: *Sí, si*.). (278-284)

[14.1] Saber cómo transferir e interpretar la pregunta y/o respuesta de un estudiante y luego contestar a forma de explicación para todos los estudiantes. Capacidad para transferir e interpretar la pregunta de los estudiantes y luego dar la respuesta a forma de explicación. En este caso, Aly interpreta lo que dice E4 y luego responde explicando porque el sistema es incompatible (porque el rango de la matriz A es distinto del rango de la matriz ampliada). (135-148)

[14.1] Saber cómo transferir e interpretar la pregunta y/o respuesta de un estudiante y luego contestar a forma de explicación para todos los estudiantes. Capacidad para transferir e interpretar la pregunta de los estudiantes y luego dar la respuesta a forma de explicación. Explicarles porque quita la tercera ecuación del sistema (porque el rango de la matriz de coeficientes no es tres sino dos, entonces deja las dos ecuaciones con las que obtuvo rango dos). (211-215), (216-219)

[14.1] Saber cómo transferir e interpretar la pregunta y/o respuesta de un estudiante y luego contestar a forma de explicación para todos los estudiantes. Capacidad para transferir e interpretar la pregunta de los estudiantes y luego dar la respuesta a forma de explicación. Explicarles la condición para quitar una ecuación del sistema de 3x3 para resolverlo (garantizar que no existe rango tres y quedarse con las dos ecuaciones con las que se obtuvo rango dos). (216-219)

[14.1] Saber cómo transferir e interpretar la pregunta y/o respuesta de un estudiante y luego contestar a forma de explicación para todos los estudiantes. Capacidad para transferir e interpretar la pregunta de los estudiantes y luego dar la respuesta a forma de explicación. Explicarles que si el sistema de 3x3 tiene a lo más rango dos, lo importante es quedarse con las ecuaciones del menor de orden dos cuyo determinante es distinto de cero, independientemente del orden, es decir, no importa si es la primera y la segunda ecuación o la segunda y la tercera ecuación. (233-243)

[14.2] Saber cómo transferir e interpretar la pregunta y/o respuesta de un estudiante y luego contestar a forma de explicación para todos los estudiantes. (Contestando a la pregunta de E2) Comentarles que pueden escribir sólo el valor del adjunto, si no desean escribir todos los cálculos, pero que se fijen bien en el signo que queda. (413-416)

[15.1] Saber cómo transferir e interpretar la pregunta y/o respuesta de un estudiante y luego contestar a forma de explicación para todos los estudiantes. Traducir/interpretar lo que está pensando E1 y responderle. En este caso E1 pregunta que si el sistema homogéneo es incompatible, pero al justificar E1 su respuesta (E1 dice que es incompatible porque el rango de A va a ser menor que el número de incógnitas), Aly interpreta que E1 lo que intenta decir es que el sistema homogéneo va a salir compatible indeterminado. (90-92)

Para que hagan los ejercicios
CC-En23. Saber cómo gestionar la participación de los estudiantes para que participen activamente y hagan el ejercicio o problema y que no sólo copien lo que ella hace. [11.2.3] (520).

[11.2.3] Saber cómo gestionar la participación de los estudiantes para que participen activamente y hagan el ejercicio o problema y que no sólo copien lo que ella hace. Saber que los estudiantes también deben participar activamente en clase y no sólo copiar lo que ella escribe en la pizarra. Aly los invita a que calculen el $|A_z|$ que ya ha indicado, para que los estudiantes también hagan algo y no sólo copien lo que anota ella. (520)

Traducir

CC-En25. Saber usar lenguaje común o más familiar a los estudiantes o una forma más explícita, más detallada, al explicar el contenido matemático para que los estudiantes lo comprendan "mejor". [11.2.1] (221-223); [14.1] (26-30).

[11.2.1] Saber que los estudiantes entenderán "mejor" la definición de un sistema de Cramer si se las dice en lenguaje más familiar a los estudiantes. (221-223)

[14.1] Saber que si les dice el Teorema de Rouché-Frobenius en lenguaje más familiar para ellos, entenderán "mejor" lo que dice el teorema. (26-30)

Hacer notar/remarcar/destacar

CC-En26. Saber cómo (y cuándo) hacerles notar, remarcar, destacar o aclarar, puntualmente, lo más importante del contenido que está enseñando. [11.1] (38-40), (99-101), (175-176), (185); [11.2.1] (209-210); [11.2.2] (321-324), (365-370), (405-419), (420-428), (462-464); [11.2.3] (472-474), (475-477), (491-493); [12.2] (181-183), (237-239), (296-299); [12.3] (415-420); [14.1] (35-40), (44-56), (76), (85-91), (121-124), (159-163), (239-243), (244-246), (254-262), (281-282); [14.2] (474-482), (492-496); [14.3] (534-537); [15.1] (19-20), (21-23), (43-45), (53-55), (74-76), (84-86), (87-89), (129-140), (143-155); [15.2] (224-228), (270-274), (301-328), (368-373), (390-397).

[11.1] Saber cómo remarcarles a los estudiantes que observen primero el problema, que se detengan un momentito antes de hacer nada y vean si existe alguna relación entre las filas o las columnas para ver si se puede aplicar una propiedad de los determinantes y no hacer todo el cálculo, pues de existir una combinación lineal entre filas o columnas el determinante vale 0. (38-40)

[11.1] Saber cómo hacerles hincapié en que no importa tanto el valor exacto del determinante sino el hecho de que de cero o distinto de cero. (99-101), (175-176), (185)

[11.2.1] Saber cómo remarcarles a los estudiantes que la regla de Cramer es el método más práctico y más eficaz para resolver un sistema. (209-210)

[11.2.2] Saber cómo hacerles notar parte de la estrategia para la demostración de la regla de Cramer. Remarcarles que en el primer elemento de la primera columna sólo han escrito lo que vale C_1 en términos de la ecuación (pues $a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}t=C_1$), es decir, les hace notar que ha escrito a C_1 como combinación lineal, lo cual es el punto clave en el $|A_x|$. (321-324)

[11.2.2] Saber cómo remarcarles que en matemáticas es mejor demostrar cosas "largas" (extensas) con cuidado que las cortas, porque en una afirmación corta se tienen tan pocas cosas, tan pocos datos para trabajar que es más difícil, y no como las afirmaciones largas. En concreto, comentarles que no hay que asustarse al tener que resolver un problema que en apariencia es extenso. (365-370)

[11.2.2] Saber cómo hacerles notar la proporcionalidad entre dos columnas del determinante para ver que entonces ese determinante vale 0 y que lo mismo pasa con los siguientes dos determinantes, de tal forma que hay tres determinantes que dan 0 y del determinante principal $|A_x|$ que tenían inicialmente ya sólo les queda un determinante menos extenso. (405-419)

[11.2.2] Saber cómo hacerles notar que el término común que existe en la primera columna y que por tanto pueden usar una propiedad de los determinantes para sacar el término común (x) del determinante (si se multiplica un determinante por un número real, queda multiplicado por dicho número cualquier fila o columna, pero sólo una). (420-428)

[11.2.2] Saber cómo hacerles notar que una cosa es hacer una demostración y otra hacer ejemplos concretos (con números específicos). (462-464)

[11.2.3] Saber cómo remarcarles cuándo un sistema es sistema de Cramer, antes de empezar a hacer el ejemplo, es decir, les remarca eso para tener claro lo que hay que hacer en el ejemplo. (472-474)

[11.2.3] Saber cómo hacerles notar que primero hay que ver que el $|A|\neq 0$ porque el $|A|$ aparece en el denominador de las expresiones $x=|A_x|/|A|$, $y=|A_y|/|A|$, $z=|A_z|/|A|$, es decir, para poder encontrar los valores de x, y, z respectivamente. (475-477)

[11.2.3] Saber cómo hacerles notar por qué el ejemplo es un sistema de Cramer (que el número de ecuaciones coincide con el número de incógnitas y eso es igual al rango de la matriz de coeficientes e igual al rango de la ampliada). Es decir, remarcarles eso antes de hacer propiamente el ejemplo. (491-493)

[12.2] Saber cómo remarcarles lo útil que puede ser si primero buscan relaciones entre filas o columnas antes de empezar a hacer operaciones (Aly: *... todo lo que veamos así* - relaciones - *es muy bueno porque nos evita hacer muchas operaciones del determinante, vale*). (181-183)

[12.2] Saber cómo hacerles notar la ventaja de que puede resultar más fácil resolver el sistema si el rango es dos y el número de ecuaciones y de incógnitas es cuatro. (237-239)

[12.2] Saber cómo remarcarles que siempre tienen ahí (como reserva) el método de reducción (que se ve comúnmente en secundaria) para cuando lo quieran usar (cuando lo consideren útil). (296-299)

[12.3] Saber cómo remarcarles que las incógnitas que van a quedar son las que están en la submatriz cuyo determinante es distinto de 0 y por tanto en este caso, eliminar la tercera ecuación y con ello la z pasa a ser parámetro. (415-420)

[14.1] Saber cómo hacerles notar que este ejercicio no es diferente a los que han hecho en clase (como decía E5). (35-40)

[14.1] Saber cómo remarcarles que es muy importante lo que les comenta, que en el valor del determinante no pueden cambiar el signo, pero cuando está igualada a cero la ecuación que representa el valor del determinante entonces sí. (44-56)

[14.1] Saber cómo hacer notar a E2 que no es conveniente usar la regla de Rufini para resolver ecuaciones de segundo grado y menos cuando las soluciones son fracciones o raíces. (76), (85-91)

[14.1] Saber cómo hacer énfasis en que es distinto que dos filas sean iguales a que sean linealmente dependientes. En este caso si a=1 entonces la primera y la tercera fila son iguales. (121-124)

[14.1] Saber cómo hacerles notar que el rango de A es dos porque precisamente obtuvieron el valor de a=2 cuando igualaron el valor del determinante a cero para ver para qué valores se hacía cero ese determinante), por tanto, como *a* es uno de los valores para el cual el determinante de A es cero, entonces el rango de A es dos. (159-163)

[14.1] Saber cómo remarcarles que en un sistema de 3x3 que tiene a lo más rango dos, independientemente de que con las dos ecuaciones que se queden sea la primera y la segunda o la segunda y la tercera (siempre y cuando garanticen el rango dos), la solución del sistema debe ser la misma. (239-243)

[14.1] Saber cómo hacerles notar la importancia de estudiar el rango (en un sistema de 3x3, si queda rango uno pues habría una incógnita y dos parámetros, si queda rango dos entonces dos incógnitas y un parámetro). (244-246)

[14.1] Saber cómo remarcarles que en un sistema compatible indeterminado, el conjunto de infinitas soluciones les debe dar la misma solución (seleccionen el menor que seleccionen siempre y cuando elijan el menor de forma correcta –que el determinante sea distinto de cero). (254-262)

[14.1] Saber cómo aclararles que no resolvieron el problema completo sino que sólo lo han resuelto para *a*=2. (281-282)

[14.2] Saber cómo remarcarles la importancia del orden de las matrices para poder multiplicarlas. Además les hace notar el orden (3x1) del que quedará la matriz resultante del producto $A^{-1}C$ en el ejemplo. (474-482)

[14.2] Saber cómo remarcarles la importancia de identificar en un enunciado cómo les piden resolver un sistema, saber si hay que resolverlo de forma matricial o si es por Cramer, pues con base en eso podrían saber qué método hay que usar. Comentarles que será de forma matricial, si dice resuelve el sistema de forma matricial, entonces hay que hacerlo de la forma AX=C, encontrar X= $A^{-1}C$ y de ahí obtener los valores de x, y, z. (492-496)

[14.3] Saber cómo hacerles notar que hay que estudiar el rango para saber si el SH es determinado o indeterminado. (534-537)

[15.1] Saber cómo remarcarles que es importante que se fijen en tomar el menor de orden dos que garantiza el rango dos, una vez que saben que se trata de un SCI y que tiene rango 2. (19-20)

[15.1] Saber cómo hacerles notar que aunque no se vea fácilmente la dependencia lineal que existe entre las filas o las columnas, lo que importa es que el determinante de orden tres da cero. (21-23)

[15.1] Saber cómo aclararles que no se puede hablar de determinante de A, porque A no es una matriz cuadrada, pero que van a calcular el determinante de la submatriz de A de orden tres para estudiar el rango de A (A es de orden 4x3). (43-45)

[15.1] Saber cómo hacerles notar que como A no es una matriz cuadrada (A es de orden 4x3), entonces no está hablando en este caso del determinante de A, sino del determinante de la submatriz de A de orden 3. (53-55)

[15.1] Saber cómo hacerles notar que ahora (el apartado d) del ejercicio) se trata de un sistema homogéneo de 3x4, para que noten que el orden de este sistema es contrario al del anterior (4x3). (74-76)

[15.1] Saber cómo aclararle a E1 que si el rango de la matriz A no es el rango máximo, es decir, el rango A < número de incógnitas, eso no significa que el sistema sea incompatible. (84-86)

[15.1] Saber cómo aclararle a E1 que un sistema homogéneo nunca va a ser incompatible y que lo que tienen que ver es si es determinado o indeterminado. (87-89)

[15.1] Saber cómo hacerles notar que ahora se trata de resolver un sistema con tres incógnitas y un parámetro y les comenta a la vez que ya saben también el valor del determinante, para luego preguntarles qué método será conveniente usar para resolver el sistema. Aly quiere escuchar Cramer pero no le contestan eso, Aly insiste para ver si le dicen Cramer pero nada. (129-140)

[15.1] Saber cómo hacerles notar que a pesar de que se trata de un SCI, al pasar la t como parámetro queda un sistema de 3x3 con determinante distinto de 0 y entonces se puede usar la regla de Cramer. (143-155)

[15.2] Saber cómo hacerles notar que existe rango 2 aunque en otro menor de una submatriz que no habían tomado anteriormente en clase (Aly: *... con la submatriz de orden 2 formada por los 2 últimos elementos de la segunda y tercera fila y de la segunda y tercera columna vemos que hay rango 2 ¿os fijáis?*). Comúnmente en los ejercicios anteriores obtenían rango dos con la submatriz formada por los dos primeros elementos de la primera y segunda fila y columna. (224-228)

[15.2] Saber cómo hacerles notar que les quedará la solución en forma genérica, es decir, en términos del parámetro *a* (pues normalmente, al dar la solución de un SCD los estudiantes están acostumbrando a que les quede un número concreto). (270-274)

[15.2] Saber cómo hacerles notar que cuando calcularon el determinante de la matriz A y vieron para qué valores ese determinante vale cero, precisamente encontraron que uno de esos valores es a=2, entonces A no puede tener rango 3 pero si rango 2, lo cual se puede ver con el determinante de la submatriz de orden 2 formada por los dos primeros elementos de las dos primeras filas y columnas, que es distinto de 0. Y que por tanto lo que hay que averiguar es el rango de la ampliada. (301-328)

[15.2] Saber cómo hacerles notar que también podrían trabajar con el menor que comúnmente han trabajado en ejercicios anteriores pero que ahora tomará otro menor. En este caso Aly, a diferencia de otras ocasiones, toma una submatriz diferente, normalmente siempre toma la submatriz de orden 2 formada por las primeras dos filas y columnas y ahora tomó la submatriz de orden 2 formada por los dos elementos de la segunda y tercera filas y columnas. (368-373)

[15.2] Saber cómo hacerles notar que pueden tomar un menor u otro para estudiar el rango de la matriz (siempre y cuando el menor cumpla que su determinante sea distinto de cero), pero lo importante es estudiar el rango. (390-397)

Forma de presentarlo/representarlo o Estrategia didáctica

CC-En34. Saber cómo remarcarles los aspectos más relevantes del contenido para concluir un ejemplo o la presentación de un tema. [11.1] (180-181); [11.2.2] (459-460); [12.2] (226-229).

[11.1] Saber cómo remarcarles los aspectos más relevantes del contenido para concluir un ejemplo o la presentación de un tema. Cerrar el ejercicio de los tres apartados (a), b) y c)) remarcándoles la utilidad del Teorema de Rouché-Frobenius. (180-181)

[11.2.2] Saber cómo remarcarles los aspectos más relevantes del contenido para concluir un ejemplo o la presentación de un tema. A forma de cierre de la demostración de la regla de Cramer, comentarles que la estrategia para calcular $|A_z|$, sería similar a la anterior (para calcular $|A_y|$) pero ahora se obtendría $z=|A_z|/|A|$. (459-460)

[12.2] Saber cómo remarcarles los aspectos más relevantes del contenido para concluir un ejemplo o la presentación de un tema. Resumirles lo que han hecho, a lo que han llegado hasta ahora y lo que falta por hacer en este ejemplo (apenas han estudiado el rango de la matriz de coeficientes y de la ampliada y falta decir con base a eso qué tipo de sistema es y en su caso resolverlo). (226-229)

[14.2] Saber cómo remarcarles lo que han obtenido hasta el momento (369-374):

1. Que la $X=A^{-1}C$.
2. Que $X=A^{-1}C$ es otra forma de calcular el valor de las incógnitas.
3. Que para usar la forma $X=A^{-1}C$, el sistema debe ser cuadrado (de 2x2, 3x3, etc.).

[14.2] Saber cómo resumirles lo más importante de lo que han obtenido (las condiciones para aplicar $X=A^{-1}C$ y encontrar el valor de x, y, z: el sistema debe ser cuadrado, es decir, igual número de ecuaciones que de incógnitas y existir A^{-1}). (375-381)

[14.2] Saber cómo comentarles la estrategia a seguir para resolver el problema (calcular A^{-1} para calcular $X=A^{-1}C$). (393-394)

CC-En35. Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente. [11.2.2] (434-435); [12.2] (226-229); [14.1] (151-153); [15.2] (294-297).

[11.2.2] Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente. Remarcarles a lo que han llegado con lo realizado hasta el momento (a que $|A_x|=x|A|$). (434-435)

[12.2] Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente. Resumirles lo que han hecho, a lo que han llegado hasta ahora lo que falta por hacer en este ejemplo (apenas han estudiado el rango de la matriz de coeficientes y de la ampliada y falta decir con base a eso qué tipo de sistema es y en su caso resolverlo). (226-229)

[14.1] Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente. Recapitular brevemente lo que han visto y lo que falta por ver (que han visto si *a* es distinto de uno y de dos, que son los valores que anulan el determinante, luego si *a* es igual a uno y a continuación van a estudiar lo que pasa si *a* es igual a dos). (151-153)

[14.2] Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente. Remarcarles lo que han obtenido hasta el momento (369-374):

1. Que la $X=A^{-1}C$.
2. Que $X=A^{-1}C$ es otra forma de calcular el valor de las incógnitas.
3. Que para usar la forma $X=A^{-1}C$, el sistema debe ser cuadrado (de 2x2, 3x3, etc.).

[14.2] Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente. Resumirles lo más importante de lo que han obtenido (las condiciones para aplicar $X=A^{-1}C$ y encontrar el valor de x, y, z: el sistema debe ser cuadrado, es decir, igual número de ecuaciones que de incógnitas y existir A^{-1}). (375-381)

[14.2] Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente. Comentarles la estrategia a seguir para resolver el problema (calcular A^{-1} para calcular $X=A^{-1}C$). (393-394)

[14.2] Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente. Retomar el objetivo del problema del ejemplo: resolver el sistema. Por lo tanto recapitula lo que se ha hecho hasta el momento (obtener A^{-1}) y lo que falta por hacer para resolver el sistema (hacer el producto $A^{-1}C$ para obtener el valor de x, y, z). (465-470)

[15.2] Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente. Hacerles notar lo que han hecho y lo que van a hacer ahora (situarlos para luego continuar), (Aly: *Entonces ya tenemos la solución para el caso en que $a\neq 2$ y $a\neq -3/4$. Bueno y ¿qué vamos a hacer ahora? Pues vamos a estudiar qué pasa si a vale 2*). (294-297)

CC-En36. Saber cómo explicarles la utilidad, aplicación, dirección/orientación del contenido en temas siguientes. [12.2] (98-107).

[12.2] Saber cómo explicarles la utilidad, aplicación, dirección/orientación del contenido en temas siguientes. Comentarles que se puede usar la regla de Cramer para un SCI. (98-107)

CC-En37. Saber, tras la digresión en su discurso, rescatar la idea del contenido matemático que esté presentando. [14.2] (340-342).

[14.2] Saber, tras la digresión en su discurso, rescatar la idea del contenido matemático que esté presentando. Después de mostrarles, paso a paso, que el sistema se puede escribir como AX=C, Aly retoma la idea principal del ejemplo: escribir el sistema en forma matricial AX=C para resolver el sistema. (340-342)

CC-En39. Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último. [14.2] (366-368).

[14.2] Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último. Hacerles notar la analogía del elemento neutro de los números reales y la matriz identidad en las matrices, aprovecha que los estudiantes tienen más trabajado el elemento neutro en los números reales. (366-368)

CC-En40. Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. [11.1] (22-25); [11.2.2] (321-324), (329-331), (448-458), (459-460); [12.2] (119-123), (276-277), (311-313), (369-374); [12.3] (380-383); [14.1] (35-40); [14.2] (393-394); [15.1] (94-95), (119-122); [15.2] (232-234), (244-250), (376-380).

[11.1] Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. Comentarles la estrategia de “solución” del ejercicio (tienen la matriz de coeficientes y la matriz ampliada, lo que tienen que hacer únicamente es estudiar el rango de ellas y ver si los rangos de ellas coinciden porque entonces el sistema es compatible). (22-25)

[11.2.2] Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. Hacerles notar parte de la estrategia para la demostración de la regla de Cramer. Remarcarles que en el primer elemento de la primera columna sólo han escrito lo que vale C_1 en términos de la ecuación (pues $a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}t=C_1$), es decir, les hace notar que ha escrito a C_1 como combinación lineal, lo cual es el punto clave en el $|A_x|$. (321-324)

[11.2.2] Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. Comentarles la estrategia o parte de ella para hacer la demostración de la regla de Cramer, usar las propiedades de los determinantes (en particular: 1. Separar en sumas de determinantes la columna expresada en términos de combinaciones lineales. 2. Usar la propiedad de proporcionalidad entre columnas y 3. Usar la propiedad de sacar término común). (329-331)

[11.2.2] Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. Comentarles la estrategia para calcular $|A_y|$, que sería similar a la anterior (para calcular $|A_x|$) pero ahora se obtendría $|A_y|=y|A|$ entonces $y=|A_y|/|A|$. (448-458)

[11.2.2] Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. A forma de cierre de la demostración de la regla de Cramer, comentarles que la estrategia para calcular $|A_z|$, sería similar a la anterior (para calcular $|A_y|$) pero ahora se obtendría $z=|A_z|/|A|$. (459-460)

[12.2] Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. Comentarles la estrategia de solución en ejercicios de sistemas: primero hay que saber de qué tipo es el sistema al comparar el rango de la matriz de coeficientes con el de la ampliada. (119-123)

[12.2] Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. Empezar a decirles la estrategia para usar Cramer, calcular el valor de x que es igual al $|A_x|/|A|$. (276-277)

[12.2] Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. Remarcarles la estrategia (siempre los términos independientes se colocan en la primera, en la segunda o en la tercera columna dependiendo de la incógnita que se busque), para indicar los determinantes que aparecen en los numeradores, para encontrar el valor de x, y, z con la regla de Cramer, es decir, para indicar los determinantes $|A_x|$, $|A_y|$ y $|A_z|$. (311-313)

[12.2] Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. Remarcarles lo que se debe hacer, la estrategia a utilizar cuando los estudiantes tengan que resolver un procedimiento de ese tipo, en este caso, saber escribir el sistema compatible indeterminado, saber explicar cuáles ecuaciones no participan en ese menor, que ha dado distinto de 0, quitar las ecuaciones que sobran y obtener las incógnitas, pasar las incógnitas que van a ser parámetros a la derecha y terminar el sistema como si fuera uno de orden 2. (369-374)

[12.3] Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. Comentarles en lo que se deben de fijar, tipo estrategia, al hacer un ejercicio sobre sistemas de ecuaciones lineales (Aly: ... *primero estudiar el rango es muy importante saber con qué menor distinto de 0 nos quedamos, ver las incógnitas que participan en ese menor, pues son las que verdaderamente nos van a quedan en el sistema*). (380-383)

[14.1] Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. Decirles la estrategia, lo que tienen que hacer para resolver el problema (estudiar el rango de la matriz y en su caso ver para que valores da cero el determinante de la matriz). (35-40)

[14.2] Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. Comentarles la estrategia a seguir para resolver el problema (calcular A^{-1} para calcular $X=A^{-1}C$). (393-394)

[15.1] Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. Decirles la estrategia de solución, pues ya han hecho varios ejercicios equivalentes (básicamente tienen una estrategia de solución similar a este). Decirles: *Bueno pues lo mismo de siempre, empezamos a estudiar el rango de la matriz de coeficientes*. (94-95)

[15.1] Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. Comentarles otra parte de la estrategia de solución (quedarse con las ecuaciones del menor que garantiza rango 3 y desplazar la t a la derecha). (119-122)

[15.2] Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. Decirles parte de la estrategia a seguir al hacer este tipo de ejercicios, una vez que se tiene el valor del determinante en términos del parámetro, hay que ver para qué valores ese determinante se hace cero. (232-234)

[15.2] Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. Decirles la estrategia para solucionar el problema. Analizar a) Si $a\neq 2$ y $a\neq -3/4$, b) Si $a=2$ y c) Si $a=-3/4$. (244-250)

[15.2] Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. Decirles esta estrategia de solución: *si me da que va a tener rango 3* –la matriz ampliada- *pues sería incompatible pues el* *rango de A es 2, que no, pues entonces hay que resolver*. Es decir, Aly les comenta lo que hay que hacer para dar respuesta a ese ejercicio. (376-380)

CC-En41. Saber qué es lo que hay que repetir y cómo, para aclarar dudas del contenido a los estudiantes o reafirmar algunos aspectos del contenido. [14.2] (386-464).

[14.2] Saber qué es lo que hay que repetir y cómo, para aclarar dudas del contenido a los estudiantes o reafirmar algunos aspectos del contenido. Repetir el proceso de calcular la inversa por adjuntos. Aly decide repetir el proceso por los estudiantes que no asistieron la clase anterior, escribiendo paso a paso el procedimiento para calcular la matriz inversa con la expresión $A^{-1}= (AdjA)^t/|A|$. (386-464)

CC-En42. Saber cómo usar la comparación entre algunas formas de hacer un ejercicio o entre varias representaciones, para destacar a los estudiantes los aspectos del contenido en los que se deben fijar. [12.2] (300-301); [14.1] (63-68); [15.1] (174-176).

[12.2] Saber cómo usar la comparación entre algunas formas de hacer un ejercicio o entre varias representaciones, para destacar a los estudiantes los aspectos del contenido en los que se deben fijar. Decidir resolver el sistema por el método de reducción y por Cramer para que se fijen que tienen dos alternativas para resolverlo. Aly inicialmente pensaba resolverlo sólo por Cramer pero debido a la intervención de E1 (que comenta que se puede hacer una reducción –método que hasta el momento los estudiantes tienen más trabajado-), decide hacerlo también por reducción simple. (300-301)

[14.1] Saber cómo usar la comparación entre algunas formas de hacer un ejercicio o entre varias representaciones, para destacar a los estudiantes los aspectos del contenido en los que se deben fijar. Comentarles que pueden usar un “truco” para resolver la ecuación de segundo grado sin necesidad de usar la fórmula general, pero que si se sienten perdidos pues entonces usen la fórmula general, es decir, les da dos alternativas de solución. (63-68)

[15.1] Saber cómo usar la comparación entre algunas formas de hacer un ejercicio o entre varias representaciones, para destacar a los estudiantes los aspectos del contenido en los que se deben fijar. Hacerles notar que en ejercicios anteriores les quedan sistemas de 2x2 que eran fáciles de resolver por reducción, pero que ahora hay que usar otro método. Aly trata de promocionar los métodos para resolver sistemas que han visto en este bloque de Álgebra y que vean que éstos pueden ser más “cómodos”, es decir, más prácticos para resolver sistemas de ecuaciones, por ejemplo, la regla de Cramer. (174-176)

CC-En45. Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan “mejor” el contenido que presenta, saber cómo evocar un concepto(s), un ejemplo, ejercicio, problema o procedimiento equivalente visto(s) o hecho(s) anteriormente, para presentar un nuevo concepto o un ejemplo del nuevo concepto, para que los estudiantes traigan a la mente ese contenido o se hagan una idea de cómo se resuelve el nuevo problema. [12.2] (241-242); [14.2] (366-368); [15.2] (349-350).

[12.2] Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan “mejor” el contenido que presenta. Evocarles un tema equivalente (SCI que resolvieron con el método de Gauss) para que ellos comprendan mejor lo que les acaba de decir (que se trata de resolver un SCI como los que habían resuelto antes por Gauss). (241-242)

[14.2] Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan "mejor" el contenido que presenta. Prever que los estudiantes tienen más trabajado el elemento neutro en los números reales y entonces al comentarles la analogía entre el elemento neutro de los números reales y la matriz identidad en las matrices, los estudiantes entenderán "mejor" la funcionalidad de la matriz identidad en las matrices. (366-368)

[15.2] Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan "mejor" el contenido que presenta. Comentarles lo que van a hacer, evocando a lo que acaban de hacer (con a=2), es decir, evocando al procedimiento equivalente para que los estudiantes tengan una idea de lo que van a hacer ahora. (Aly: *Bueno si a=-3/4, vamos a empezar a hacer lo mismo, vamos a empezar con la matriz ampliada*). (349-350)

De los aspectos del **conocimiento curricular,** podemos abstraer los siguientes descriptores en términos más generales:

CC1. Saber qué contenidos aparecen y cómo están organizados en el libro de texto. [11.2.1] (214-220); [12.2] (110-112), (137-140).

[11.2.1] Saber los contenidos que están en el libro de texto. Saber que la regla de Cramer viene en el libro de texto, en la página 102. (214-220)

[12.2] Saber los contenidos que están en el libro de texto. En este caso, saber que este tema (Uso de la regla de Cramer en un SCI) viene en el libro de texto. (110-112)

[12.2] Saber que el significado de orlar en una matriz, está en el libro de texto. (137-140)

De los aspectos del **conocimiento pedagógico general,** podemos abstraer los siguientes descriptores en términos más generales:

CPG3. Conocimiento y habilidad discursiva para motivar, re-encomendar o exigir a los estudiantes que hagan una demostración, los ejemplos o los ejercicios (para hacer en clase o de deberes). [11.1] (72-73); [11.2.2] (329-331), (370), (417-419), (441-442); [14.1] (264-267); [15.1] (124-126), (189-191); [15.2] (398-401).

[11.1] Incitarlos a que hagan los deberes y así no tengan tanto problema cuando hagan el examen. (72-73)

[11.2.2] Animarlos a que en la demostración de la regla de Cramer, aunque vean que en apariencia tienen que calcular un determinante muy amplio ($|A_x|$ expresado en la primera columna con combinaciones lineales), cuentan con propiedades de los determinantes para calcularlos más rápido. (329-331)

[11.2.2] Animarlos a seguir haciendo la demostración, que no se espanten porque en apariencia vean que el determinante que está quedando $|A_x|$ es muy amplio. (370)

[11.2.2] Animarlos al hacerles ver que en un principio es largo de escribir el $|A_x|$, pero luego hay tres determinantes que dan 0 y entonces sólo les queda uno menos extenso. (417-419)

[11.2.2] Nuevamente animándolos para que hagan la demostración de la regla de Cramer. (Aly: *Sé que no es lo más agradable* –hacer la demostración- *pero porque veáis esto no pasa nada, no.* Aly 11, p.10). (441-442)

[14.1] Invitarlos a que practiquen y hagan los ejercicios. Aly un poco molesta de tanta pregunta les pide que en lugar de hablar y hablar, de preguntar y preguntar qué pasaría si… y qué pasaría si..., se pongan a hacer los ejercicios (a practicar), es decir, menos hablar y más hacer. (264-267)

[15.1] Una forma de motivar a los estudiantes a hacer un ejercicio (Aly: … *ese es el sistema que nos queda para resolver, ¿cómo se resuelve esto ahora?, de estos no hemos hecho ninguno*). (124-126)

[15.1] Hacerles ese comentario, puede ser una motivación para que los estudiantes vean que este apartado del ejercicio es interesante (Aly: *¿Este ejercicio nadie lo ha terminado verdad?*, Es: *No*, Aly: *Pues este es interesante ¡eh!*). (189-191)

[15.2] Invitarlos a que no sólo vean los ejercicios sino que los hagan. Los motiva invitándolos a que los hagan para que se equivoquen y así aprendan. (398-401)

CPG4. Conocimiento y habilidad discursiva para preguntarles si les ha quedado claro lo que acaban de hacer, si tienen más dudas; para ver si van entendiendo lo que han visto; para acercarse al lugar de los estudiantes cuando levantan la mano porque tienen alguna duda o porque ponen cara "rara". [11.2.2] (332); [15.2] (237), (311).

[11.2.2] Preguntarles a los estudiantes ¿qué pasa? cuando los ve con cara de duda. (332)

[15.2] Forma de preguntar sus dudas a los estudiantes (Aly: *¿Queda claro esto?*). (237)

[15.2] Forma de preguntar sus dudas a los estudiantes (Aly: *¿Esto lo entendéis todos?*). (311)

CPG7. Conocimiento y habilidad para acercarse a revisar lo que han hecho los estudiantes y cómo lo han hecho. [14.1] (6-282); [15.1] (1-218), [15.2] (219-401).

[14.1] Estrategia para trabajar en el aula: Aly hace algunas preguntas a los estudiantes para saber los procedimientos que ellos usaron y los resultados que ellos obtuvieron en los dos apartados de ese problema. (6-282)

[15.1] Estrategia para trabajar en el aula: Aly hace algunas preguntas a los estudiantes para mantener la atención de los estudiantes y saber los procedimientos que ellos usaron y los resultados que ellos obtuvieron en los dos apartados de ese problema. Y al ir explicando la "solución" a cada apartado del ejercicio 1, va destacando aspectos relevantes a ese contenido. (1-218)

[15.2] Estrategia para trabajar en el aula: Aly hace algunas preguntas a los estudiantes para mantener la atención de los estudiantes y saber los procedimientos que ellos usaron y los resultados que ellos obtuvieron en el primer apartado de este ejercicio. Y al ir explicando la "solución" a ese apartado, va destacando aspectos relevantes a ese contenido. (219-401)

V.1.3. Concentrado de los descriptores de cada subdominio del CME por subtema, para el caso de Emi y posteriormente para el caso de Aly

V.1.3.1. Para el caso de Emi

Concentrado de los descriptores evidenciados por Emi en el tema de **Matrices**:

CCC

CCC1. Saber la definición del concepto, regla, propiedad, teorema o método que presenta *(saber la definición de matriz de mxn, matriz cuadrada, nula, triangular superior e inferior, escalar, unidad, diagonal, identidad, matriz fila, matriz columna y saber las principales propiedades de las operaciones con matrices).* [1.1] (1-231); [1.2] (258-364), (284-287), (288-302), (309-313), (316-323), (351-356); [1.3] (391-394), (444-446), (447-463), (464-472), (483-486), (511-528), (539-548), (559-561), (581-582), (609-610), (612-613); [3.1] (12-49); (186-188); [4.3] (122-133), (164-165); [4.4] (483-485).

CCC2. Saber usar términos y notación matemática (que aparece en las definiciones formales) *(Saber cómo se denota una matriz y sus elementos, saber representar en forma genérica los distintos tipos de matrices, saber la fórmula abreviada del producto de matrices usando el símbolo Σ y saber la notación matemática para denotar las transformaciones elementales).* [1.1] (1-231), (284-287), (288-302), (309-313), (316-323), [1.3] (416-428), (447-463), (464-472), (511-528); [4.4] (305-316); [4.5] (579-583); (590-591), (635-638).

CCC3. Saber que la notación es muy importante en matemáticas *(saber que en una matriz a diferencia de una tabla, es mejor decir elementos que datos y que la matriz se denota con paréntesis).* [1.2] (234-235), (241-244).

CCC4. Saber la operatividad, propiedades (en cuanto a su uso), utilidad o aplicación de un concepto *(saber multiplicar matrices, aunque Emi tuvo dos despistes numéricos, lo cual ocasionó error numérico; saber hacer operaciones con matrices: suma, producto y cálculo de inversa; saber de la aplicación de las matrices en Sociología y Criptografía; saber usar las principales propiedades de las operaciones de matrices; saber aplicar transformaciones elementales a las matrices; saber aplicar el método de Gauss-Jordán para obtener la matriz inversa de otra y saber la utilidad de las transformaciones elementales: para hallar la matriz inversa, determinar el rango de una matriz o resolver sistemas de ecuaciones).* [1.1.1] (94-102); [1.1.1] (120-125); [1.1.2] (35-231); [1.2] (357-387); [3.1] (55-96), (153-171), (186-188), (202-218); [3.2] (359-381); [4.2] (46-59), (66-74), (79-88), (100-109); [4.3] (143-146); [4.4] (195-346), (389-396), (435-439), (486-488), (534-539); [4.5] (576-577), (596-598), (585-594), (600-609), (613-615), (616-626), (628-634), (641-661), (735-784), (799-809), (834-843), (850-851).

CEC

CEC4. Saber la causa matemática de los errores comunes de los estudiantes *(saber que al expresar el lenguaje matemático, el error de los estudiantes puede provenir de la falta de precisión en el lenguaje en la matemática escolar y saber que al calcular la matriz inversa, el error de los estudiantes puede provenir de la extensión del inverso multiplicativo en los números reales a la matriz inversa).* [1.2] (234-235); [4.4] (556-562).

CEC2. Saber los pasos ocultos: conocer la procedencia y las razones matemáticas por las que funcionan los procedimientos *(saber que hay algunas propiedades de los números reales que se trasmiten al producto de matrices y otras no por la propia forma en que están definidas las operaciones con matrices).* [4.4] (350-366).

CEC1. Saber el significado de los conceptos *(saber el significado de la propiedad asociativa en la multiplicación de matrices: saber que es una operación binaria y por ello no hay forma de multiplicar tres matrices simultáneamente).* [4.4] (411-419).

HM

HM1. Conocer las similitudes (las relaciones) entre varios conceptos matemáticos de un mismo tema o unidad *(capacidad para relacionar varios conceptos matemáticos hasta llegar al deseado, Álgebra → Sistemas de ecuaciones → Matrices → Tipos de ejercicios → Problemas→ Grafos → Matriz).* [1.1.1] (13-34).

HM2. Saber cómo un contenido está relacionado con otro más general (incluso aunque no aborde esa forma más general en ese grupo porque el programa no lo incluye) *(saber que las propiedades de las matrices están relacionadas con el de "estructuras algebraicas", que no se ve en esta especialidad de bachillerato - Ciencias Sociales - pero sí en el Científico Tecnológico).* [4.3] (169-187).

CC-Es

CC-Es1. Saber escuchar e interpretar el conocimiento o pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje (común o en proceso de adquisición del nuevo concepto –mezcla de lenguaje común con matemático) *(saber escuchar e interpretar el pensamiento que expresa E1 en lenguaje usual respecto a organizar los datos de un problema en una tabla e interpretar las respuestas de los estudiantes y guiarlas para llegar a las palabras que la profesora desea).* [1.1.1] (1-12); [1.2] (232-239).

CC-Es2. Saber las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre el contenido matemático *(Saber las necesidades y dificultades de E9 para entender y seguir lo que va explicando, por ello se acerca a E9 y la va guiando con su ayuda).* [1.2] (348-350); [1.3] (434-439), (585-589).

CC-Es3. Prever la confusión que pudiera tener el alumno con algún aspecto específico del contenido que se esté viendo en clase *(prever que los estudiantes se pueden confundir de fila y de columna al hacer el producto de dos matrices y prever que los estudiantes se pueden confundir si Emi anota el orden de cada una de las matrices, al anotar las propiedades del producto de matrices, por ello no lo anota y les aclara que se supone que las matrices tienen el orden necesario para efectuar el producto).* [3.2] (400-406); [4.4] (423-427).

CC-Es4. Prever (anticipar) que los estudiantes no saben o no recuerdan un concepto o propiedad matemática *(prever que algún estudiante no sepa o no recuerde en qué consiste la propiedad conmutativa en los números reales).* [4.4] (430-434).

CC-Es5. Prever (anticipar) que los estudiantes se pueden quedar con una imagen o idea inadecuada del contenido *(prever que los estudiantes se puedan hacer o quedar con la imagen inadecuada de que en el producto de matrices la conmutatividad no se da porque su orden no permite hacer el producto al conmutarlos y por ello, Emi les comenta que aún y cuando las matrices sean cuadradas, aunque el orden permita hacer el producto de las matrices conmutadas, en general el resultado será distinto y prever que los estudiantes podrían pensar por analogía entre el inverso multiplicativo en los números reales y la matriz inversa, que sólo la matriz nula no tiene inversa, pero en las matrices, además de la matriz nula (que sería similar al cero en los reales), habrá otras matrices que no tengan inversa)*. [4.4] (461-479), (556-562).

CC-Es6. Saber lo que a los estudiantes les parecerá cansado y aburrido de un contenido matemático específico *(Saber que la teoría cansa y aburre a los estudiantes)*. [4.5] (568-569)

CC-Es7. Saber que los estudiantes pueden equivocarse al hacer determinado cálculo o de un número o de un signo (más leve), provocado por un despiste al hacer una(s) operación(es)/transformación(es), o por no dominar el contenido que se les está presentando *(saber que los estudiantes comúnmente se equivocan al hacer el producto de dos matrices porque multiplican mal o suman mal; saber que los estudiantes pueden equivocarse al hacer la transformación elemental de sumar a una fila otra multiplicada por un número, es decir, que no se fijen bien en cuál es la fila que van a cambiar y saber que se pueden equivocar al hacer las transformaciones elementales para calcular la matriz inversa al realizar las transformaciones elementales a las dos matrices (A|I) simultáneamente, por ejemplo, si cambian la fila de A entonces hay que cambiar la fila completa, incluyendo la fila correspondiente de I)*. [3.2] (400-406), [4.5] (642-646), (730-732); (744-746).

CC-En

Ejemplos

CC-En1. Saber con qué ejemplo o ejercicio empezar, cuándo y cuáles usar para enfatizar, reforzar o generalizar cierta idea *(saber qué ejemplos usar para enfocar el concepto de matriz; para hacer notar aspectos importantes de una matriz: orden, fila, columna, significado de los subíndices; para que visualicen la forma que tiene una matriz cuadrada, nula, diagonal, escalar, traspuesta; para proponerles ejercicios para que practiquen las operaciones con matrices o para mostrar fácilmente sin necesidad de hacer una demostración formal que no se cumple la propiedad conmutativa en el producto de matrices).* [1.1] (35-231); [1.2] (303-309); [1.3] (400-428), (483-489), (562-569), (582-584), (649-683); [3.1] (55-62), (104-236); [3.2] (243-267); [4.4] (442-454); [4.5] (625-626), (699-722).

CC-En2. Saber que la aplicación del concepto en un ejemplo le es útil para inducir luego la definición del concepto *(Saber que la aplicación de matrices en el ejemplo de Criptografía y en el de estudios sociológicos le es útil para introducir luego la definición de matriz).* [1.1.1] (35-125); [1.1.2] (136-223).

CC-En3. Saber que una de las potencialidades de un ejemplo, en concreto al desarrollarlo, es utilizarlo para destacar los aspectos relevantes del contenido matemático que pretende enseñarles ese día en clase *(saber usar al ejemplo como instrumento para hacerles notar el número de filas y columnas que tiene esa matriz; que los elementos de la matriz pueden ser enteros o fraccionarios; que para localizar un elemento en la matriz sólo hay que contar la fila y la columna para conocer su posición; que en las matrices cuadradas no se hablará de orden mxn sino que sólo se dirá de orden n; para hacer énfasis en la notación, en la forma genérica en la que están dispuestos los elementos de una matriz y en lo que significan los subíndices; para destacar que al trasponer una matriz el orden de la matriz se invierte; para hacerles notar la no conmutatividad (que simplemente al cambiar el orden de las matrices ya no es posible hacer el producto) o que al hacer una transformación elemental de multiplicar toda una fila por un mismo número, afecta sólo a esa fila y a la otra no le pasa nada; o para remarcarles que tienen que realizar las transformaciones elementales a las dos matrices (A|I) simultáneamente, por ejemplo, si cambian la fila de A entonces hay que cambiar la fila completa, incluyendo la fila correspondiente de I).* [1.2] (357-387); [1.3] (395-399), (400-428), (649-683); [4.4] (442-454); [4.5] (625-626), (730-732); (744-746).

CC-En4. Saber usar ejemplos con datos concretos, en lugar de desarrollar propiedades de forma general o con ejemplos genéricos, para explicar el contenido *(saber que a los estudiantes les puede quedar más clara la idea de que no se cumple la conmutatividad en el producto de matrices, simplemente usando un ejemplo concreto en el que a partir del orden se ve que no se cumple, más que ponerse a desarrollar una demostración formal; inventarse un ejemplo con una matriz con valores concretos y no con la matriz genérica, para que con el ejemplo les quede más claro a los estudiantes cómo trasponer una matriz; hacerles notar en un ejemplo concreto que al hacer la transformación elemental de multiplicar toda una fila por un mismo número, afecta sólo a esa fila, o utilizar un ejemplo para describir la estrategia para calcular la matriz inversa con el método de Gauss-Jordán).* [1.3] (649-683); [4.4] (442-454); [4.5] (625-626), (699-722).

CC-En5. Saber que al explicar un ejemplo o un ejercicio, es importante que los estudiantes vean que los resultados obtenidos del ejemplo o ejercicio tienen un significado concreto *(saber que al explicar el ejemplo que ella (Emi) se inventó para el producto de dos matrices, es importante que los estudiantes vean que lo que obtuvieron significa el número de combinaciones de Sevilla a Nueva York).* [3.1] (149-152), (237-241).

CC-En6. Saber qué ejercicios dejarles de deberes para que practiquen *(Saber que puede dejarles unos similares a los hechos en clase, más fáciles o más difíciles desde el punto de vista del profesor).* [3.2] (464-466); [4.5] (882-887).

Ayudas

CC-En7. Saber qué ayudas dar a los estudiantes en situaciones de confusión o dificultad, para que puedan dar solución a un ejercicio o resolver un problema (en situaciones de confusión o dificultad para los estudiantes) *(Saber qué ayudas darles, eg. indicarles paso a paso lo que deben realizar para hacer el ejercicio que ella misma se inventa sobre el producto de una matriz fila por una matriz columna; apoyar a los estudiantes que le piden ayuda para poder empezar a hacer el ejercicio, e indicarles* *algunas pautas a seguir o para terminarle el ejercicio a E13 en su cuaderno, tras la segunda equivocación de E13).* [3.1] (104-236); [3.2] (268-274), (275-281), (368-381).

CC-En8. Saber que una "buena" estrategia para que los estudiantes comprendan o hagan un ejemplo, ejercicio o problema, consiste en explicarles o hacerles hincapié en lo que quiere que hagan y para qué quiere que lo hagan o simplemente explicarles de lo que trata el ejercicio o problema *(saber que es bueno decirles primero lo que quiere que hagan en este ejemplo para que los estudiantes se pongan a hacerlo (Emi: "... tenéis que calcular A por B y después de calcular A por B, [...] quiero que me digan qué significado tiene el producto")).* [3.1] (129-132).

Gestión de la participación.
Preguntas
CC-En10. Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático, para hacer ver a los estudiantes que la respuesta de un estudiante es equivocada y orientar la pregunta a la respuesta que el profesor(a) quiere escuchar *(Emi habla de que una matriz tiene dimensión mxn y les pregunta qué tipo de números serán m y n, E3 contesta que son enteros y entonces Emi les pregunta si tendrá sentido que m y n fueran números negativos o decimales, a lo cual E8 contesta que son naturales y Emi le confirma a E8 que en efecto son naturales).* [1.2] (258-264).

CC-En11. Saber qué preguntas formular, no necesariamente a cierto estudiante, para presentar o mostrar específicamente lo más importante del contenido que está enseñando (algunas veces las contesta ella misma y otras los estudiantes) *(saber hacer preguntas a los estudiantes para ir definiendo y representando los distintos tipos de matrices; para transferir la respuesta de los estudiantes y orientarla a lo que el profesor considera pertinente del contenido que presenta; para presentarles las propiedades de las operaciones con matrices; para mostrarles algunas diferencias entre conceptos o para alertarlos de algún aspecto que deben tener en cuenta para no caer en error).* [1.1.1] (1-12); [1.2] (234-235), (268-275), (332-346); [1.3] (391-394), (464-472), (492-507), (624-648); [4.3] (119-133); [4.4] (350-366), (492-499), (517-533), (541-555), (556-562); [4.5] (642-646).

CC-En12. Saber qué preguntas formular para presentar un nuevo concepto, una nueva propiedad o una clasificación *(saber qué preguntas formular para introducir los distintos tipos de matrices, para presentarles las propiedades de las matrices y cómo calcular la matriz inversa o para describirles la estrategia para hacer un ejercicio).* [1.3] (685-713); [4.1] (13-17); [4.2] (46-65), (66-74), (79-88), (100-106); [4.3] (147-150); [4.4] (375-387), (500-502), (508-533); [4.5] (699-722).

CC-En13. Saber qué preguntas formular sobre el contenido para involucrar a estudiantes pasivos *(dirigirse a un estudiante en específico con preguntas para que calcule cada elemento de la matriz producto; para preguntarles respuestas sobre los ejercicios que les propuso para hacer en clase o de deberes)*. [3.1] (67-96), (104-236), (139-148).

Respuestas
CC-En16. Saber qué respuestas de los estudiantes aceptar, cuáles interrumpir, cuáles ignorar o cuáles destacar, para alcanzar los objetivos de la enseñanza del contenido trazados por la profesora para esa clase *(saber qué respuestas aceptar para dar una*

definición o para presentar una propiedad o una idea matemática que ella tiene en mente). [1.1.1] (1-12); [1.2] (234-235), (268-275); [1.3] (391-394), (624-648), (701-713); [4.3] (119-133).

CC-En17. Saber cómo orientar una respuesta correcta a un lenguaje matemático aceptado en la matemática escolar, es decir, atendiendo o enfocado a una convención matemática *(E3 da una respuesta correcta respecto a la ubicación del elemento de la matriz con subíndices 2 y 3, E3 responde que ese elemento estaría en la tercera columna, segunda fila, pero Emi orienta esa respuesta para que se vayan acostumbrando a decir primero el número de filas y luego el número de columna en concordancia con esa convención matemática. Además les hace hincapié en que se acostumbren a localizar/ubicar un elemento de una matriz: indicando la posición exacta diciendo fila y columna y que sea en ese orden, primero la fila y luego la columna).* [1.2] (332-335); [3.2] (388-395).

CC-En18. Saber cómo aprovechar las respuestas incorrectas de los estudiantes para hacerles ver las consecuencias de éstas en el contenido matemático *(Emi toma en cuenta la respuesta de E3 a pesar de que no es correcta a lo que ella pregunta, pero aprovecha para hacer ver qué pasaría en el caso que plantea E3, es decir, que si en la diagonal principal de una matriz escalar en lugar de unos fueran ceros entonces sería la matriz nula).* [1.3] (599-608).

Traducir
CC-En25. Saber usar lenguaje común o más familiar a los estudiantes o una forma más explícita, más detallada, al explicar el contenido matemático para que los estudiantes lo comprendan "mejor" *(saber usar lenguaje común para que comprendan "mejor" lo que significa dimensión de una matriz, diagonal principal de una matriz; para localizar un elemento de la matriz sabiendo los subíndices; para hacerles notar la caracterización de una matriz triangular superior, matriz escalar, matriz traspuesta; para explicarles la definición del producto de un número real por una matriz, de la matriz identidad; o para explicarles la propiedad distributiva de matrices).* [1.2] (247-268), (380-387); [1.3] (441-446), (529-538), (570-577), (585-589), (624-648); [4.3] (119-133), (132-133), (138-140), (161-163); [4.4] (397-399), (483-485).

Hacer notar/remarcar/destacar
CC-En26. Saber cómo (y cuándo) hacerles notar, remarcar, destacar o aclarar, puntualmente, lo más importante del contenido que está enseñando *(saber cómo hacerles notar la aplicación de las matrices en otras áreas, el tipo de números que son los elementos de la matriz, algún aspecto característico del tipo de matriz, de las operaciones con matrices o del método de Gauss-Jordán para calcular la matriz inversa).* [1.1.2] (221-226); [1.2] (288-302), (351-356); [1.3] (395-399), (400-413), (483-489); [3.1] (5-11), (63-66), (104-236), (153-171), (186-201); [3.2] (295-297), (403-406), (441-458); [4.3] (134-137); [4.4] (195-208), (423-427), (428-434), (457-460), (534-539); [4.5] (576-577), (613-615), (683-686), (730-732); (744-746).

Forma de presentarlo/representarlo o Estrategia didáctica
CC-En30. Saber cómo introducir un concepto mediante la relación de conceptos matemáticos vistos anteriormente *(saber cómo introducir el concepto de matriz: Emi hace un recorrido deductivo, es decir, parte de lo general a lo particular, relacionando varios conceptos matemáticos familiares a los estudiantes, ella empieza por*

comentarles que el Álgebra es una parte de las matemáticas que durante muchos siglos se ocupaba de resolver ecuaciones hasta aterrizar en que a un grafo se le puede asociar una matriz (Álgebra → Sistemas de ecuaciones → Matrices → Tipos de ejercicios → Problemas→ Grafos → Matriz)). [1.1.1] (13-34).

CC-En31. Conocer diferentes formas para introducir un tópico matemático con algún dato histórico o breve reseña histórica de ese contenido matemático o saber dar una breve reseña/anécdota histórica para contextualizar un tópico *(conocer diferentes formas para introducir el método de Gauss-Jordán para calcular la matriz inversa Emi les comenta una breve reseña histórica sobre Gauss).* [4.5] (689-695).

CC-En32. Saber distintas formas de presentar/representar la definición de un concepto: en forma genérica y no con números concretos *(saber representar la definición de matriz triangular superior en forma genérica y usar como imagen la figura geométrica del triángulo, presentar la fórmula abreviada para multiplicar dos matrices).* [1.3] (511-548); [4.4] (350-366).

CC-En33. Conocer la estrategia de pregunta-respuesta para relacionar unos conceptos con otros hasta llegar al deseado *(conocer la estrategia pregunta-respuesta para relacionar los siguientes conceptos: Álgebra→ Sistemas de ecuaciones → Matrices → Utilización de las matrices → Tipos de ejercicios → Problemas → Grafos → Matriz).* [1.1.1] (13-34)

CC-En34. Saber cómo remarcarles los aspectos más relevantes del contenido para concluir un ejemplo o la presentación de un tema *(saber cómo remarcarles a forma de resumen los aspectos más importantes sobre el ejemplo que acaban de hacer o sobre el concepto, propiedad o método que presenta).* [1.1.1] (120-125); [3.2] (441-458); [4.2](114-118); [4.5] (855-859), (870-881).

CC-En35. Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente *(dar un repaso en el que menciona los tipos de matrices que han estado haciendo y lo aprovecha para continuar; recapitular lo de los ejemplos que hicieron para hacerles notar que las matrices se pueden estudiar en distintas áreas, pero en el curso se centrarán en el uso de matrices en Economía; retomar el proceso de cómo se hace la suma de dos matrices, antes de dar las propiedades de la suma de matrices; hacer notar que en el producto de un escalar por una matriz existe una multiplicación de 2 números reales para luego anunciarles las propiedades de escalares por matrices; recapitular los objetivos logrados y hacer ver los que faltan al desarrollar el método de Gauss-Jordán para calcular en un ejemplo la matriz inversa).* [1.1.2] (128-138); [1.1.2] (226-231); [1.2] (279-283); [4.1] (18-42); [4.3] (134-137); [4.5] (752-765), (812-817).

CC-En36. Saber cómo explicarles la utilidad, aplicación, dirección/orientación del contenido en temas siguientes *(explicarles la utilidad del vocabulario de matrices en el siguiente tema que verán -operaciones con matrices; explicarles que las propiedades de las matrices les serán útiles cuando vean ecuaciones matriciales; explicarles que hay que saber transformaciones elementales para calcular la matriz inversa o comentarles que las transformaciones elementales les serán útiles para hallar la matriz inversa, determinar el rango de una matriz o resolver sistemas de ecuaciones).* [1.3] (615-620); [4.3] (184-187); [4.4] (400-406); [4.5] (573-575), (628-634).

CC-En37. Saber, tras la digresión en su discurso, rescatar la idea del contenido matemático que esté presentando *(saber rescatar la idea de matriz fila y matriz columna y la expresan en términos cercanos a los estudiantes para tratar de que el estudiante fije la imagen de una matriz fila y una matriz columna, haciéndoles ver que se fijen en la orientación de los elementos, horizontal en la matriz fila y vertical en la matriz columna).* [1.3] (473-476).

CC-En38. Saber "poderosas" analogías para presentar o representar el contenido matemático. Saber que al usar la analogía de un objeto matemático con un objeto común para aproximarse más al lenguaje usual de los estudiantes, puede hacer que los estudiantes logren entender "mejor" el significado de un contenido matemático *(usar la analogía de una caja para que los estudiantes entiendan lo que significa "tamaño o dimensión de la matriz" y remarcarles que es importante la dimensión que tenga la matriz o para presentar el concepto de matriz traspuesta, al hacer la analogía de una matriz con una caja y de traspuesta con darle vuelta a la caja; usar la analogía entre el cuadrado y la diagonal de un cuadrado y una matriz cuadrada y su diagonal principal para que los estudiantes "visualicen" la diagonal principal de una matriz).* [1.2] (247-268); [1.3] (441-446), (624-648).

CC-En39. Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último *(usar la analogía del elemento neutro en los números reales y la matriz nula en el conjunto de matrices, para hacerles notar el papel que jugará la matriz nula en las operaciones con matrices; usar la analogía del elemento identidad en los números reales y la matriz identidad en el conjunto de matrices, para hacerles notar la importancia de la matriz identidad en el producto de matrices y en general usa la analogía de las propiedades para las operaciones de los números reales y las operaciones con matrices; pero también usa la "desanalogía o diferencia" de las propiedades para las operaciones de los números reales y las operaciones con matrices, para explicarles por qué no se cumple la propiedad conmutativa del producto de los números reales en el producto de matrices, o la diferencia del inverso multiplicativo en los números reales y la matriz inversa en cuanto a que para calcular la matriz inversa, será necesario hacer varios cálculos y no sólo una división o fracción como en los números reales; o en cuanto a que todos los números reales, excepto el cero, tienen inverso multiplicativo pero en las matrices, además de la matriz nula habrá otras matrices que no tengan inversa).* [1.3] (492-507); [3.2](425-426); [4.1] (13-17), (13-42); [4.2] (46-59), (60-65), (66-74), (79-88), (100-106), (110-112); [4.4](375-387), (430-434), (489-491), (492-499), (500-502); (508-533), (534-539), (541-555), (556-562).

CC-En40. Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución *(saber cómo explicar los pasos que hay que seguir para hacer el producto de dos matrices o describirles la estrategia para calcular la matriz inversa con el método de Gauss-Jordán).* [3.1](12-49); [4.5] (699-722).

CC-En41. Saber qué es lo que hay que repetir y cómo, para aclarar dudas del contenido a los estudiantes o reafirmar algunos aspectos del contenido *(Emi se acerca a E13 para ayudarla a hacer una multiplicación de dos matrices, E13 se queda callada y no hace nada a pesar de que ella trató de situarla para hacerle ver de manera general, lo que han hecho para efectuar el producto, Emi le repite cómo se obtienen los elementos de la* *matriz producto; E15 tiene duda sobre un valor numérico de la matriz producto y Emi repite las operaciones que se realizan para obtener ese valor y que E15 vea que efectivamente se obtiene ese valor; Emi repite el proceso de una transformación elemental ante una situación en la que los estudiantes tienen dificultades, están en "estado de shock", como deslumbrados e impresionados porque no entienden los cambios y transformaciones elementales que está haciendo Emi en la pizarra para conseguir la matriz inversa con el método de Gauss-Jordán).* [3.2] (347-355), (432-439); [4.5] (778-789), (790-797).

CC-En43. Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto *(representar la definición de matriz triangular superior en forma genérica y usar como imagen la figura geométrica del triángulo; representar la matriz cuadrada en analogía con un cuadrado para que visualicen la diagonal principal de una matriz; representar el producto de dos matrices mediante un esquema gráfico para indicar la división de la primera matriz en filas y de la segunda en columnas y apoyarse de eso para explicar cómo efectuar el producto de las dos matrices; representar mediante un esquema gráfico el cambio de una matriz a su traspuesta; saber que los estudiantes al involucrarse más con la fórmula abreviada del producto de matrices y ver que es más compleja (no sólo multiplicar número a número y ya), se hagan una imagen de que algunas propiedades de la suma y producto en los reales se transmitirán al producto de matrices y otras no; usar representaciones gráficas para que el estudiante se fije la imagen de los distintos tipos de matrices: fila, columna, nula, triangular, diagonal y traspuesta).* [1.2] (247-268), (324-327); [1.3] (464-472), (473-476), (483-489), (511-548), (562-569), (582-584), (624-648), (663-674); [3.1] (68-69), (202-209); [3.2] (347-355); [4.4] (218), (350-366).

CC-En44. Conocer la potencialidad de los esquemas gráficos para representar un contenido *(conocer la potencialidad de un esquema gráfico para representar la división de las filas y de las columnas para efectuar el producto de dos matrices, para hacerles notar que deben seguir un orden establecido para hacer el producto y no confundir la fila y columna que deben multiplicar).* [3.1] (67-96), (68-69); (202-209); [3.2] (403-406).

CC-En45. Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan "mejor" el contenido que presenta, saber cómo evocar un concepto(s), un ejemplo, ejercicio, problema o procedimiento equivalente visto(s) o hecho(s) anteriormente, para presentar un nuevo concepto o un ejemplo del nuevo concepto, para que los estudiantes traigan a la mente ese contenido o se hagan una idea de cómo se resuelve el nuevo problema *(saber que evocar a las propiedades de las operaciones en los números reales para hacer una analogía con las propiedades de las operaciones en las matrices puede ayudar a que los estudiantes comprendan "mejor" las propiedades en las matrices).* [1.3] (492-507), (590-604); [3.2] (330-345), (425-426); [4.1] (13-17), (13-42); [4.2] (46-59), (60-65), (66-74), (79-88), (100-106), (110-112); [4.4] (375-387), (430-434), (489-491), (492-499), (500-502), (508-533), (541-555), (556-562).

CC

CC1. Saber qué contenidos aparecen y cómo están organizados en el libro de texto *(saber que el tema de matrices viene en el libro de texto).* [1.3] (622-624)

CPG

CPG1. Conocer estrategias para controlar la indisciplina o distracción en el aula, para atraer la atención de los estudiantes o llamar la atención a los estudiantes cuando están comportándose de manera impropia para una clase *(Emi les dice que ese contenido lo tienen en el libro, así que no es necesario que lo copien y les pide que atiendan a la explicación que ella hará y estén en silencio o en otra ocasión, tras el ruido de los estudiantes hablando, Emi trata de atraer su atención diciéndoles: "a ver vamos a continuar, por favor, que me gustaría dejar la teoría concluida para ya no aburriros más porque yo sé que la teoría siempre os cansa más", luego trata de motivarlos para continuar y terminar la teoría de matrices).* [4.1] (7-9); [4.5] (567-572).

CPG2. Conocimiento y habilidad discursiva para hacer comentarios para tranquilizar y motivar a los estudiantes cuando los ve agobiados, decepcionados de ellos mismos o preocupados por el trabajo de clase que tienen que hacer; o porque se consideren incapaces de aprender un método para hacer ejercicios o procedimientos *(tras situaciones en las que los estudiantes sienten que nunca podrán aprender lo que la profesora presenta, Emi tiene frases como: "si practican entonces podrán hacer los ejercicios similares a estos con facilidad").* [4.5] (860-881).

Emi

Concentrado de los descriptores evidenciados por Emi en el tema de ***Sistemas de Ecuaciones Lineales***:

CCC

CCC1. Saber la definición del concepto, regla, propiedad, teorema o método que está presentando *(saber en qué consiste el método de reducción de Gauss, el rango de una matriz y el teorema de Rouché-Frobenius).* [8.2] (85-134); [8.4] (384-386), (434-466).

CCC4. Saber la operatividad, propiedades (en cuanto a su uso), utilidad o aplicación de un concepto *(saber usar unidades de medida en un problema; saber la operatividad de las matrices input/output (insumo-producto) y del modelo cerrado de Leontief (gastos=ingresos); saber realizar transformaciones elementales en un sistema; saber la utilidad de las transformaciones elementales en matrices; saber encontrar la solución de un sistema con el método de Gauss-Jordán; saber escribir el sistema en forma matricial; saber obtener los valores de x, y, z a partir del sistema escalonado, es decir, saber "despejar"; saber cómo se representaría un sistema escalonado en matrices para identificar qué tipo de sistema es; saber cómo se obtiene el rango de una matriz y el valor del rango de la matriz de coeficientes ya escalonada, para cada tipo de sistema; y saber escribir correctamente el sistema en forma matricial y la matriz ampliada).* [6.2.1] (252-254); [6.2.2] (340-352), (434-438), (441-462), (508-516); [7.1] (10-12), (28-31), (33-37), (51-54), (55-68), (79-95), (109-110), (123-125), (126-129), (133-159), (187-216); [8.3] (306-356); [8.4] (387-397), (496-511).

CC-Es

CC-Es2. Saber las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre el contenido matemático. *(Saber las necesidades y dificultades de E9, Emi vuelve a leer los datos del problema para empezar a llenar la tabla, pero les pide que cada quien vaya llenado la* *tabla y mientras ella se acerca a ayudar a E9 a localizar en su libro de Braille el problema que están resolviendo)*. [7.2] (289-292).

CC-Es4. Prever (anticipar) que los estudiantes no saben o no recuerdan un concepto o propiedad matemática *(prever que los estudiantes no saben o no recuerdan a cuánto o a qué equivale un área (un decámetro cuadrado = cien metros cuadrados))*. [6.2.1] (156-157).

CC-Es5. Prever (anticipar) que los estudiantes se pueden quedar con una imagen o idea inadecuada del contenido *(prever que los estudiantes pudieran hacerse la imagen inadecuada de que los problemas que resolverán en clase serían del tipo del primer ejemplo ("antiguos y difíciles") y por ello Emi les aclara que los problemas que verán no serán de ese tipo)*. [6.2.1] (225-229).

CC-Es8. Saber que los estudiantes deben proceder ordenadamente respetando las convenciones matemáticas, para evitar confusiones y errores *(saber que los estudiantes pueden cometer un error referente al adecuado acomodo de los elementos de una matriz con base en su posición, es decir, que los estudiantes se pueden equivocar al escribir el sistema en forma matricial, que no pongan las equis debajo de las equis (x´s), las y´s debajo de las y´s y las z´s debajo de las z´s; prever que algún estudiante pudiera escribir la solución del sistema sin seguir la convención matemática de que siempre se anota el valor de las incógnitas en el orden en que aparecen dadas, en este caso (x, y, z))*. [7.1] (184-186), (221-225).

CC-Es9. Saber que los estudiantes podrían hacer cálculos mecánicamente sin saber realmente lo que están haciendo *(saber que los estudiantes suelen "irse con la pinta" y representar a las variables con algo que no tiene sentido, es decir, hacer cálculos mecánicamente sin saber realmente el sentido de las variables en el problema; que un error común en los estudiantes es pensar y escribir que al obtener el valor de x, y, z están obteniendo 3 soluciones al sistema, sin hacer conciencia de que el valor de esas tres variables constituye una solución)*. [7.2] (311-318); [8.2] (137-148).

CC-En

Ejemplos
CC-En1. Saber con qué ejemplo o ejercicio empezar, cuándo y cuáles usar para enfatizar, reforzar o generalizar cierta idea *(empezar con ejemplos sencillos y luego con otros de mayor laboriosidad y complejidad; hacer un ejemplo de un problema histórico y dar una breve reseña histórica del problema; luego hacer problemas más aproximados al área de Economía y mostrarles luego el método de solución de sistemas de forma matricial)*. [6.1] (13-17); [6.2.1] (116-151); [6.2.2] (353-358), (361-370), (530-566); [7.1] (1-220); [8.4] (481-533).

CC-En3. Saber que una de las potencialidades de un ejemplo, en concreto al desarrollarlo, es utilizarlo para destacar los aspectos relevantes del contenido matemático que pretende enseñarles ese día en clase *(remarcarles cuándo dos ecuaciones son equivalentes (cuando tienen la misma solución); hacerles notar que las transformaciones que pueden hacer en las ecuaciones de un sistema son transformaciones elementales que pueden hacer en las matrices (matrices del sistema); darles un ejemplo de un sistema de ecuaciones para escribirlo luego en forma* *matricial; utilizar el problema de ese ejemplo para resolverlo usando el método de reducción de Gauss)*. [7.1] (1-220).

CC-En6. Saber qué ejercicios dejarles de deberes para que practiquen *(estudiar el fin de semana y hacer los ejercicios que les propuso en fotocopias para que practiquen y se preparen para el examen que harán los estudiantes la siguiente semana; o lo que ya no dio tiempo a terminar en clase; o terminar el ejemplo que estaba haciendo ella en la pizarra)*. [6.2.2] (574-575); [7.2] (347-351); [8.4] (529-533).

Ayudas

CC-En7. Saber qué ayudas dar a los estudiantes en situaciones de confusión o dificultad, para que puedan dar solución a un ejercicio o resolver un problema *(les da un empujoncito diciéndoles cuáles son las incógnitas necesarias para el planteamiento del problema; darles la idea de por dónde empezar a plantear las ecuaciones; o decirles una forma de identificar las incógnitas del problema).* [6.2.1] (201-209), (233-234); [7.2] (325-328).

CC-En8. Saber que una "buena" estrategia para que los estudiantes comprendan o hagan un ejemplo, ejercicio o problema, consiste en explicarles o hacerles hincapié en lo que quiere que hagan y para qué quiere que lo hagan o simplemente explicarles de lo que trata el ejercicio o problema *(saber que es bueno explicarles de lo que se trata este problema de SEL, y en particular les habla de lo que sería una situación de equilibrio en un modelo cerrado de Leontief (gastos=ingresos); hacerles hincapié en lo que quiere que hagan en el problema (plantear las ecuaciones))*. [6.2.2] (441-462), (463-464), (508-516).

CC-En9. Saber cómo señalar a los estudiantes algún dato del problema que no aparece explícito y que luego se usará para dar solución a un ejercicio o resolver un problema *(señalar a los estudiantes datos implícitos de un problema (de SEL) porque son relevantes para resolver el problema/ejercicio, y que luego ocupará para hacer el planteamiento del problema; Emi explica que para simplificar el problema, la cantidad total que produce cada una de esas personas en un año se considerará como una unidad respectivamente).* [6.2.1] (216-217).

Gestión de la participación.

Preguntas

CC-En12. Saber qué preguntas formular para presentar un nuevo concepto, una nueva propiedad o una clasificación *(introducir preguntas al presentar el tema de SEL, para empezar a resolver un problema: comprender el enunciado del problema y pensar cuáles son las incógnitas para plantear las ecuaciones; al presentar la forma matricial para resolver un SEL; al continuar con la introducción para presentar luego la clasificación del sistema)*. [6.2.1] (191-194); [7.1] (166-168); [8.2] (149-150).

CC-En14. Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático para gestionar por lo menos una participación pasiva de los demás estudiantes, cuando existe un diálogo entre el profesor y un determinado estudiante, para que se planteen el porqué de lo que se va exponiendo en el diálogo *(Emi lanza una pregunta al grupo: "¿conformes?" o "¿estáis los demás conformes con lo que dice E2?" Como una forma de tomar en cuenta a los demás estudiantes y hacerles una "llamada" a los estudiantes para atraer su atención y que la vayan siguiendo, es decir, para evitar que la* *explicación se convierta en un diálogo entre Emi y E2 y los estudiantes no sigan lo que va haciendo)*. [6.2.1] (265); [6.2.2] (478).

CC-En15. Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático para ir guiando la solución de un ejemplo o ejercicio, resolver un problema o hacer una representación gráfica *(hacer preguntas para guiarlos a escribir las ecuaciones del sistema; para hacer una representación gráfica de la clasificación de los sistemas – SCD, SCI y SI; y para proponerles y resolver algunos ejemplos o ejercicios de SEL).* [7.1] (174-183); [7.2] (249-339); [8.3] (198-221), (222-245), (279-296), (310-332), (333-345), (346-356).

Respuestas
CC-En16. Saber qué respuestas de los estudiantes aceptar, cuáles interrumpir, cuáles ignorar o cuáles destacar, para alcanzar los objetivos de la enseñanza del contenido trazados por la profesora para esa clase *(aceptar, completar y orientar las respuestas de los estudiantes, para no desviarse y alcanzar su objetivo, eg. dar una introducción para luego clasificar los sistemas o mostrar el esquema gráfico para hacer notar a través de un sistema escalonado en forma matricial, las diferencias entre los distintos tipos de sistemas).* [8.2] (159-166); [8.3] (341-345), (352-356).

Traducir
CC-En25. Saber usar lenguaje común o más familiar a los estudiantes o una forma más explícita, más detallada, al explicar el contenido matemático para que los estudiantes lo comprendan "mejor" *(saber que los estudiantes pueden entender mejor el enunciado del problema o qué son las matrices input/output si se las explica en lenguaje más familiar a los estudiantes; saber que si explica en lenguaje más familiar a los estudiantes la pegunta que hizo y que nadie contestó, existe mayor posibilidad de que contesten a su pregunta)*. [6.2.1] (153-162); [6.2.2] (340-352); [8.3] (246-257).

Hacer notar/remarcar/destacar
CC-En26. Saber cómo (y cuándo) hacerles notar, remarcar, destacar o aclarar, puntualmente, lo más importante del contenido que está enseñando *(saber hacerles notar que lo que se va a usar para resolver SEL será la técnica matricial, porque es una técnica más avanzada y más eficiente para resolver SEL, en comparación con el método de sustitución y reducción; hacerles notar aspectos relevantes de la tabla de datos del problema; remarcarles lo que significa hallar la solución de un sistema (hallar la solución común para todas las ecuaciones que aparecen en el sistema; aclararles que cuando se habla de ecuaciones equivalentes se refiere a ver si tienen la misma solución; hacerles notar que las transformaciones que pueden hacer en las ecuaciones de un sistema son transformaciones elementales que pueden hacer en las matrices del sistema; destacar cuántas y cuáles matrices tienen en un sistema de ecuaciones: la matriz de coeficientes, la matriz de las incógnitas y la matriz de términos independientes; remarcarles que a pesar de las transformaciones, la solución del sistema es la misma, es decir, no cambian la solución; hacerles notar la forma de escribir el sistema escalonado (que escriban las equis debajo de las equis (x´s), las y´s debajo de las y´s y las z´s debajo de las z´s; hacerles notar que no todos los sistemas de ecuaciones lineales tienen solución ni todos los problemas se pueden resolver a través de sistemas de ecuaciones lineales y que una vez que se tiene un sistema de ecuaciones, lo que se pretende es hallar la solución; remarcarles en qué consiste el método de reducción de Gauss, es decir, hacerles notar los pasos que hay que seguir: escribir la*

matriz ampliada, hacer ceros por debajo de la diagonal mediante transformaciones elementales, escribir el sistema equivalente escalonado, resolverlo y encontrar la solución; aclararles que un sistema es equivalente a otro porque tienen la misma solución; remarcarles que en un sistema escalonado la tercera ecuación indica de qué tipo es el sistema – SCD, SCI o SI; hacer notar el valor del rango de la matriz ampliada ya escalonada, para cada tipo de sistema; remarcarles las diferentes posibilidades de lo que puede ocurrir al comparar el rango de la matriz de coeficientes con el rango de la ampliada, es decir, puede ocurrir que los dos rangos sean iguales o que sean distintos, cuando son iguales hay dos situaciones diferentes, puede ocurrir que el valor del rango coincida con el número de incógnitas o que sea menor). [6.2.1] (306-319), (320-322); [6.2.2] (404-433); [7.1] (1-7), (17-22), (1-220), (96-104), (116-121), (155-159), (170-173), (184-186), (194-199), (221-225); [7.2] (311-318); [8.2] (46-84), (85-134), (109-114), (137-148), (149-150); [8.3] (271-272), (279-296), (297-306), (333-345), (357-381); [8.4] (398-414), (428-433), (382-397), (398-414).

Preparar actividades
CC-En29. Saber cómo prepararles un compendio de actividades a los estudiantes, para que afiancen el contenido matemático que les está enseñando. [6.1] (1-12), (13-17); [6.2.2] (334), (371-378), (465-529), (574-575).

Forma de presentarlo/representarlo o Estrategia didáctica
CC-En30. Saber cómo introducir un concepto mediante la relación de conceptos matemáticos vistos anteriormente *(introducir sistema matricial usando aspectos de la teoría de matrices; introducir el método para escalonar la matriz usando transformaciones elementales).* [7.1] (8-50), (161-165).

CC-En31. Conocer diferentes formas para introducir un tópico matemático con algún dato histórico o breve reseña histórica de ese contenido matemático o saber dar una breve reseña/anécdota histórica para contextualizar un tópico *(breve reseña referente a "resolver problemas"; referente a un problema histórico; respecto al modelo input/output).* [6.2.1] (98-108), (116-151); [6.2.2] (325-529), (335-338).

CC-En34. Saber cómo remarcarles los aspectos más relevantes del contenido para concluir un ejemplo o la presentación de un tema *(remarcarles que lo que tienen en común los dos ejemplos vistos hoy en clase, es que los plantearon con el mismo tipo de ecuaciones (lineales); remarles el papel del parámetro λ en un SCI).* [6.2.2] (530-538); [8.3] (271-275)

CC-En35. Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente *(saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado, recapitular los aspectos o datos importantes del problema de SEL a resolver y luego resolver el problema; hacerles notar lo que tienen hasta el momento (la tabla con la información del problema, es decir, los datos) y lo que piden hacer en el problema (calcular el precio de cada uno de los tres dispositivos solares) para hacerles ver hacia donde irán ahora (a definir las variables); remarcarles lo que se ha conseguido (hacer ceros por debajo de la diagonal principal) y a lo que se ha llegado (al sistema escalonado) y que de ahí ya sólo falta despejar y sustituir para encontrar los valores de la incógnitas).* [6.2.1] (98-108); [6.2.2] (353-358); [7.1] (161-165); [7.2] (307-310); [8.1] (29-45).

CC-En36. Saber cómo explicarles la utilidad, aplicación, dirección/orientación del contenido en temas siguientes *(la utilidad de las trasformaciones elementales en sistemas: para encontrar el valor de x, y, z; la utilidad del método de Gauss: para escalonar la matriz y la utilidad del teorema de Rouché-Frobenius para determinar si el sistema tiene solución y cuántas)*. [7.1] (51-54), (243-246); [8.4] (467-475).

CC-En39. Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último *(usar la teoría de matrices en la forma matricial de un sistema; usar la analogía entre un sistema de ecuaciones y fracciones para explicar lo que significa "equivalente" –que tienen la misma solución)*. [7.1] (8-50); [8.2] (115-131).

CC-En40. Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución *(saber cómo explicar una parte o toda la estrategia para empezar a resolver un problema (comprender el enunciado del problema y pensar cuáles son las incógnitas para plantear las ecuaciones); para resolver un SEL (hacer el planteamiento del problema, luego representarlo en forma matricial y resolverlo), a través de un sistema matricial de las ecuaciones; para encontrar la solución en un sistema escalonado (si el sistema ya está escalonado entonces si ya se tiene el valor de z, se sustituye en la segunda ecuación y se obtiene y, finalmente se sustituye el valor de y, z en la primera ecuación y se obtiene el valor de la x); comentarles la estrategia de trabajo en el método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales (trabajar con la matriz ampliada y conseguir hacer ceros por debajo de la diagonal principal); para clasificar un sistema: usando el teorema de Rouché-Frobenius).* [6.1] (38-69); [6.2.1] (191-194), [6.2.2] (567-571); [7.1] (55-68), (69-74), (109-110), (123-125), (166-168); [8.4] (476-480), (481-533), (522-525).

CC-En41. Saber qué es lo que hay que repetir y cómo, para aclarar dudas del contenido a los estudiantes o reafirmar algunos aspectos del contenido *(volver a repetir el procedimiento para aclararle la duda a E5, sobre cómo salió la x, es decir, de dónde se obtuvo que x = 1,600)*. [7.1] (231-240).

CC-En42. Saber cómo usar la comparación entre algunas formas de hacer un ejercicio o entre varias representaciones, para destacar a los estudiantes los aspectos del contenido en los que se deben fijar *(comparar la técnica matricial para resolver SEL con el método de sustitución y reducción para que usen la técnica matricial; comparar la igualdad de dos ecuaciones para abordar el planteamiento del problema (modelo input/output); comparar dos filas antes y después de hacer una transformación elemental para que se fijen cómo queda la fila transformada; comparar distintas matrices que denotó con la representación gráfica para cada sistema para hacerles notar que se tienen que fijar en la tercera fila del sistema en una matriz ampliada, para distinguir un SCD, un SCI y un SI; hacer una comparación entre el rango de la matriz de coeficientes y el de la ampliada para deducir el teorema de Rouché-Frobenius).* [6.2.1] (320-322); [6.2.2] (325-529); [7.1] (155-159); [8.3] (357-381); [8.4] (415-466)

CC-En43. Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto *(saber que si utiliza una representación gráfica para la forma matricial de SEL los estudiantes se harán una imagen de dicha forma; saber* *que si utiliza una representación gráfica para mostrar a través de un sistema escalonado en una matriz ampliada, la diferencia entre los tres tipos de sistemas, los estudiantes la visualicen "mejor").* [6.2.2] (530-566); [7.1] (87-89); [8.2] (163-170); [8.3] (310-332), (333-345); [8.3] (346-356).

CC-En44. Conocer la potencialidad de los esquemas gráficos para representar un contenido *(usar un esquema gráfico para mostrar la forma matricial para escribir un sistema de ecuaciones y para mostrar a través de la matriz escalonada la diferencia entre los tres tipos de sistemas).* [7.1] (87-89); [8.3] (310-332), (333-345), (346-356).

CC-En45. Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan "mejor" el contenido que presenta, saber cómo evocar un concepto(s), un ejemplo, ejercicio, problema o procedimiento equivalente visto(s) o hecho(s) anteriormente, para presentar un nuevo concepto o un ejemplo del nuevo concepto, para que los estudiantes traigan a la mente ese contenido o se hagan una idea de cómo se resuelve el nuevo problema *(saber que evocar el método de reducción y sustitución puede ayudar a los estudiantes entender mejor la técnica matricial para resolver SEL; saber que evocar la idea de cuándo dos fracciones son equivalente puede ayudar a los estudiantes a entender la idea de sistemas equivalentes).* [6.2.1] (306-319); [8.2] (115-131).

CC-En46. Saber cómo dar más confianza a los estudiantes en el resultado que han obtenido del ejemplo o ejercicio *(comparar y comentarles la solución que obtuvieron en el ejercicio para que los estudiantes sepan que tienen ese apoyo para consultar).* [7.1] (218-220); [8.1] (44-45).

CC

CC1. Saber qué contenidos aparecen y cómo están organizados en el libro de texto *(saber los ejemplos que ha realizado en clase y que vienen resueltos en el libro de texto).* [6.2.2] (339); [7.1] (218-220).

CPG

CPG1. Conocer estrategias para controlar la indisciplina o distracción en el aula, para atraer la atención de los estudiantes o llamar la atención a los estudiantes cuando están comportándose de manera impropia para una clase *(Emi intenta callar a los estudiantes cuando están inquietos (especialmente cuando tienen clase un viernes después del recreo; Emi intenta mantener la atención de los estudiantes cuando entrega la fotocopia para trabajar en clase).* [6.1] (18-20); [6.2.1] (168-173), (236-239).

CPG2. Conocimiento y habilidad discursiva para hacer comentarios para tranquilizar y motivar a los estudiantes cuando los ve agobiados, decepcionados de ellos mismos o preocupados por el trabajo de clase que tienen que hacer; o porque se consideren incapaces de aprender un método para hacer ejercicios o procedimientos *(anunciarles que el nuevo tema que iniciarán en esta clase (SEL) vendrá en el siguiente examen (aproximadamente 3 ó 4 semanas después), para que no se presionen tanto pero para que lo tomen en cuenta luego, esto tras equiparlos de fotocopias que les preparó con ejercicios propuestos y soluciones a ejercicios anteriores, para que practiquen el fin de semana y estudien para el examen que tendrán la siguiente semana).* [6.2.1] (93-96).

CPG3. Conocimiento y habilidad discursiva para motivar, re-encomendar o exigir a los estudiantes que hagan una demostración, los ejemplos o los ejercicios (para hacer en clase o de deberes) *(comentarles que ya se aproxima el examen puede motivar a los estudiantes a hacer los ejercicios de ese contenido matemático; invitarlos a que ellos intenten escribir el sistema en forma matricial).* [6.1] (70-79); [7.1] (75-78).

CPG4. Conocimiento y habilidad discursiva para preguntarles si les ha quedado claro lo que acaban de hacer, si tienen más dudas; para ver si van entendiendo lo que han visto; para acercarse al lugar de los estudiantes cuando levantan la mano porque tienen alguna duda o porque ponen cara "rara" *(una forma de preguntarles si les ha quedado claro lo que acaban de hacer (encontrar los valores de las variables a partir del sistema escalonado: "¿Se fijaron cómo salen las cuentas?"; o un ejemplo que acaban de hacer: "¿Entonces qué os parece este método?" o si tienen más dudas: "¿Alguna duda más?").* [7.1] (217), (226), (241).

Emi
Concentrado de los descriptores evidenciados por Emi en el tema de ***Programación Lineal***:

CCC

CCC4. Saber la operatividad, propiedades (en cuanto a su uso), utilidad o aplicación de un concepto *(saber transformar las desigualdades para dejar las incógnitas del lado izquierdo; saber que la región factible es la región formada por vértices y que si es acotada entonces el problema tiene solución y si es abierta entonces el problema no tiene solución; saber que entre las restricciones se pueden juntar algunas inecuaciones, lo cual es válido matemáticamente pero que ahora es mejor dejarlas por separado, tal y como las han escrito, para resolver el problema (por ejemplo, saber que $x \geq 0$, $x \leq 100$ se puede escribir como $0 \leq x \leq 100$ pero que es mejor dejarlas como $x \geq 0$, $x \leq 100$ para solucionar el problema); saber la analogía entre el problema equivalente anterior y el que está presentando, por ser los dos problemas de transporte en PL y que de esa forma se guíen los estudiantes en el procedimiento y solución que tienen del anterior para resolver este; saber que no es lo mismo $8000-(x+y)$ que $(x+y)-8000$ y que de acuerdo al problema debe ser $8000-(x+y)$; que hay que simplificar la expresión matemática extensa que han obtenido de la función objetivo).* [11.1.2] (264-267); [11.1.3] (316-360); [11.1.4] (413-417); [13.1] (154-162); [13.2] (249-270), (379-381), (415-417).

CEC

CEC4. Saber la causa matemática de los errores comunes de los estudiantes *(saber que al definir las variables en un problema, el error de los estudiantes puede provenir del hecho de definir más de dos variables; saber que al hacer operaciones con desigualdades el error de los estudiantes puede provenir de la extensión e las propiedades para las igualdades a las propiedades de las desigualdades y no tener en cuenta que en una desigualdad cuando se multiplica o se divide por un número negativo, camia de signo la desigualdad; saber que al escribir matemáticamente, el error de los estudiantes puede provenir de que no saben escribir correctamente lo que están pensando, es decir, que para resolver los problemas propuestos, no basta con pensar sino que además hay que saber escribir correctamente ese pensamiento matemático)*. [11.1.2] (146-153); [11.1.3] (325-330); [13.1] (45-46)

CEC5. Conocer aspectos matemáticos de especial importancia para la enseñanza, lo que le permite hacer notar o distinguir la importancia de un aspecto matemático específico para enseñar el contenido matemático *(saber que el rol de "definir bien las variables" es muy importante para resolver problemas de programación lineal porque parte del éxito o fracaso en la solución el problema depende en cómo son definidas las variables. Esto es, el conocimiento matemático que viene de la reflexión que tiene el profesor a cerca de la importancia de definir bien las variables)*. [13.2] (387-391).

CC-Es

CC-Es1. Saber escuchar e interpretar el conocimiento o pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje (común o en proceso de adquisición del nuevo concepto –mezcla de lenguaje común con matemático) *(saber interpretar el pensamiento matemático de E7, al aclararle que no están anotando en la tabla de distribución el coste del transporte sino sólo el transporte, el movimiento que hay de unos sitios a otros; interpretar la respuesta de E2 y orientarla a la presentación del contenido (E2 responde que el objetivo en este problema es encontrar el número de cajas que deben enviarse, Emi completa esa respuesta comentando que el número de cajas que deben enviarse pero al menor coste posible)).* [13.2] (321-324); [11.1.2] (232-233).

CC-Es2. Saber las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre el contenido matemático *(saber las necesidades de los estudiantes sobre ese contenido matemático. En este caso Emi prevé que a E9 por su deficiencia visual le costará mucho trabajo visualizar y entender los problemas de PL, debido a que habrá dibujos y gráficas y que por tanto, E9 necesita un apoyo para entender la explicación, por lo cual Emi tomará como recurso el libro de texto pues E9 tiene ese apoyo en Braille).* [11.1.1] (12-28).

CC-Es5. Prever (anticipar) que los estudiantes se pueden quedar con una imagen o idea inadecuada del contenido *(prever que los estudiantes pueden tener la imagen de que los problemas de PL son muy difíciles; prever que los estudiantes se pueden quedar con la imagen de que siempre las tablas de distribución deben ser grandes y por eso les aclara que no siempre tiene porque ser así).* [11.1.1] (2-11); [13.1] (112-113).

CC-Es7. Saber que los estudiantes pueden equivocarse al hacer determinado cálculo o de un número o de un signo (más leve), provocado por un despiste al hacer una(s) operación(es)/transformación(es); o por no dominar el contenido que se les está presentando *(prever que los estudiantes no distingan la diferencia entre las desigualdades y las igualdades (que en las desigualdades hay ciertas operaciones que transforman la desigualdad y cambian el sentido de la desigualdad).* [11.1.3] (319-323).

CC-Es10. Saber que a los estudiantes se les puede ocurrir una respuesta intuitiva para resolver un problema (prever que se les pudiera ocurrir a los estudiantes esa respuesta intuitiva *(que todos los refrescos salgan del supermercado más cercano para que sea más barato) para resolver el problema; prever que a algún estudiante se le puede ocurrir utilizar seis variables para resolver el problema, lo cual no es factible en este problema que se resuelve con dos variables)*. [11.1.2] (112-132), (135-153).

CC-Es11. Prever que los estudiantes no vean que un problema es equivalente a otro; o que no vean que una igualdad la pueden usar en un sentido o en otro *(prever que los estudiantes no vean que este problema es equivalente a otro problema de transporte que habían hecho anteriormente)*. [13.2] (249-252).

CC-Es18. Prever que los estudiantes divaguen definiendo más variables de las que necesitan para resolver un problema *(prever que los estudiantes divaguen en definir más de dos variables)*. [13.1] (37-40).

CC-En

Ejemplos
CC-En1. Saber con qué ejemplo o ejercicio empezar, cuándo y cuáles usar para enfatizar, reforzar o generalizar cierta idea *(saber con qué ejemplo empezar: con un problema de transporte como primer ejemplo del tema de PL (un ejemplo resuelto del libro de texto)).* [11.1.3] (29-428).

CC-En3. Saber que una de las potencialidades de un ejemplo, en concreto al desarrollarlo, es utilizarlo para destacar los aspectos relevantes del contenido matemático que pretende enseñarles ese día en clase *(destacar las desigualdades en el primer ejemplo visto del nuevo tema (PL)).* [11.1.3] (316-360).

CC-En6. Saber qué ejercicios dejarles de deberes para que practiquen (*saber qué y hasta dónde dejarles de deberes: sólo reproducir lo que han hecho en esta clase, con otro problema del libro de texto u otros ejercicios similares a los que se hicieron en clase)*. [11.1.4] (429-439); [13.2] (426-428).

Ayudas
CC-En7. Saber qué ayudas dar a los estudiantes en situaciones de confusión o dificultad, para que puedan dar solución a un ejercicio o resolver un problema *(saber qué ayudas dar a los estudiantes en situaciones de confusión o dificultad para que puedan resolver un problema: comentarles que los puntos de distribución normalmente son los supermercados, para que se familiaricen con el lenguaje de los problemas para escribir la tabla).* [11.1.2] (66).

CC-En8. Saber que una "buena" estrategia para que los estudiantes comprendan o hagan un ejemplo, ejercicio o problema, consiste en explicarles o hacerles hincapié en lo que quiere que hagan y para qué quiere que lo hagan o simplemente explicarles de lo que trata el ejercicio o problema (*saber que es bueno hacerles hincapié en que no anoten los datos en la tabla de distribución que no sean necesarios; hacerles notar lo que tienen (los datos y la tabla de distribución) y qué es lo que tienen que determinar en el problema (las variables), es decir, que los estudiantes vayan pensando cómo definir las variables en este problema; hacerles notar que sólo ocupan de dos variables para resolver el problema, es decir, que en este caso, daría igual que escojan una ciudad a que escojan otra dado que las otras ciudades quedarían en relación a esas; aclararle a E7 que no están anotando en la tabla de distribución el coste del transporte sino sólo el transporte, el movimiento que hay de unos sitios a otros).* [11.1.2] (156-157); [13.1] (172-183); [13.2] (239-246), (296-297), (321-324).

CC-En9. Saber cómo señalar a los estudiantes algún dato del problema que no aparece explícito y que luego se usará para dar solución a un ejercicio o resolver un problema *(saber hacerles notar que se puede leer "entre líneas" en los datos del problema, es decir, que aunque no se diga en el problema que tan lejos estén las fábricas de refresco de los supermercados, se puede saber cuál supermercado está más cerca de cada fábrica si se fijan en el coste, pues depende de la distancia es el coste de transporte).* [11.1.2] (101-111).

Gestión de la participación.
Preguntas
CC-En11. Saber qué preguntas formular, no necesariamente a cierto estudiante, para presentar o mostrar específicamente lo más importante del contenido que está enseñando (algunas veces las contesta ella misma y otras los estudiantes) *(completar la información de la tabla de distribución, a través de preguntas a los estudiantes (que se responden comparando la producción y la demanda con las variables definidas x, y; hacerles preguntas para que identifiquen el tipo de problema del que se trata, pues si identifican de qué tipo es, entonces tienen una idea de cómo se resuelve por ser un problema equivalente; pregunta-respuesta de ella misma para ir escribiendo los datos del problema en la pizarra, hacer preguntas a los estudiantes para ir anotando ella la tabla de distribución en la pizarra; hacerles preguntas a los estudiantes para ir anotando ella la tabla de distribución en la pizarra).* [11.1.2] (198-221); [13.2] (202), (221-237), (303-386).

Respuestas
CC-En16. Saber qué respuestas de los estudiantes aceptar, cuáles interrumpir, cuáles ignorar o cuáles destacar, para alcanzar los objetivos de la enseñanza del contenido trazados por la profesora para esa clase *(E2 responde que el objetivo en este problema es encontrar el número de cajas que deben enviarse, Emi completa esa respuesta comentando que el número de cajas que deben enviarse pero al menor coste posible).* [11.1.2] (232-233).

CC-En18. Saber cómo aprovechar las respuestas incorrectas de los estudiantes para hacerles ver las consecuencias de éstas en el contenido matemático *(explicarle a E1 porque $x\geq0$ y no $x\geq1$; y hacer pensar a E15 sobre las consecuencias que pudieran existir si se definen las variables (incorrectas) como él propone).* [13.1] (141-144); [13.2] (347-352).

CC-En19. Saber cómo aprovechar la respuesta de un estudiante, corregirla y utilizarla para explicar algún aspecto del contenido *(Saber cómo aprovechar que no están bien definidas las variables que ha escrito E1 en la pizarra, para hacerles notar que deben definirlas correctamente, dar el significado exacto de cada una de las variables; aclararles lo que E1 ha anotado en la tabla de distribución y aprovechar eso para decirles lo que es correcto, lo que no es necesario y/o que está incorrecto de la tabla de distribución propuesta por E1; comentarles sobre una columna que E1 había escrito y que no es necesaria en la tabla de distribución, es decir, corrige lo que hizo E1 en la pizarra).* [13.1] (45-52), (81-110), (115-118).

CC-En20. Saber cómo aprovechar la respuesta de un estudiante, referente al contenido, para corregir la de otro *(saber cómo aprovechar la respuesta de E3 para corregir a E1, para hacerle notar que en la primera restricción es $x\geq0$ y no $x\geq1$, además de que $y\geq0$).* [13.1] (131-140).

CC-En21. Saber cómo aprovechar las respuestas de los estudiantes, aportadas en la discusión que se presenta en el grupo para hacerles notar algún aspecto incorrecto del contenido *(aprovechar la discusión que se presenta con la intervención de los estudiantes para hacerles notar que no están bien definidas las variables)*. [13.2] (339-341).

Traducir
CC-En25. Saber usar lenguaje común o más familiar a los estudiantes o una forma más explícita, más detallada, al explicar el contenido matemático para que los estudiantes lo comprendan "mejor" *(saber que los estudiantes entenderán "mejor" en qué consiste el problema de transporte si se los dice en lenguaje común, lenguaje más familiar a los estudiantes; saber que si les comenta a los estudiantes esa analogía en el proceso de despeje de variables en igualdades y desigualdades, los estudiantes pueden entender "mejor" o hacerse una mejor idea de lo que quiere que hagan en las desigualdades (las variables a la izquierda y los términos independientes a la derecha); saber que los estudiantes entenderán "mejor" el problema al "traducirles" en lenguaje común, "lo que dice" el problema, es decir, desmenuzarles los datos del problema en lenguaje más familiar a los estudiantes; saber que E9 puede necesitar ayuda y acude a ella para ayudarle a identificar los datos del problema en su libro de Braille).* [11.1.1] (30-40); [11.1.3] (304-314); [13.1] (23-31); [13.2] (318-319).

Hacer notar/remarcar/destacar
CC-En26. Saber cómo (y cuándo) hacerles notar, remarcar, destacar o aclarar, puntualmente, lo más importante del contenido que está enseñando *(saber cómo hacerles notar que aunque verán una variedad de problemas en cada uno se tratarán varios aspectos, pero en cuanto al planteamiento y la solución hay similitudes entre ellos; remarcarles la importancia (para tener claros los datos del problema) de escribir los datos en una tabla como parte fundamental al comienzo del planteamiento; remarcarles que es importante leer el enunciado del problema un par de veces y entender los datos del problema, antes de hacer otra cosa, que un primer paso para resolver el problema es tener bien claros los datos, es decir, entender de lo que trata el problema y una vez que tengan ese entendimiento, luego intenten avanzar en las siguientes etapas de solución, es decir, resolver el problema; hacerles notar que sólo con dos variables han conseguido obtener la tabla de distribución y no con seis (lo cual complicaría la resolución); aclararles porque z se llama función objetivo (porque z es la función coste del transporte, función que depende de las variables x, y y objetivo porque lo que se quiere en el problema es conseguir que ese valor de la z sea mínimo); aclararles que se llama restricciones a las condiciones que se dan en el problema y que en los problemas de transporte, a diferencia de otros problemas de PL hay que definir las condiciones (restricciones) pues en otros problemas las restricciones las indica el mismo enunciado; hacerles notar a los estudiantes lo que pasa en una desigualdad cuando se multiplica o se divide por un número negativo (cambia de signo la desigualdad); resaltarles algunas características de la región factible que usará luego: región cerrada, vértices y frontera; hacerles notar la importancia de escribir adecuadamente el pensamiento matemático, es decir, no sólo pensarlo sino también escribirlo (ese es un aspecto importante en matemáticas), en este caso, saber definir adecuadamente las 2 variables para resolver el problema propuesto; remarcarles que se trata de un problema cuyo objetivo es diferente a los anteriores (antes se buscaba el mínimo y ahora el máximo), que independientemente de que la función objetivo consista*

en buscar el máximo o el mínimo, el procedimiento para resolver el problema es el mismo, que una manera fácil de identificar la función objetivo es ubicar donde diga máximo o donde diga el mínimo en el problema; hacerles notar una pequeña diferencia entre los dos problemas equivalentes, para que los estudiantes se fijen que de Brujas sólo salen lotes de mantenimiento y de Munich lotes de choque; remarcarles que se fijen en el problema que han estado comparando con este y vean como está escrita la tabla de distribución; remarcarles la importancia de definir bien las variables, hacerles notar que normalmente todos los problemas de transporte se resuelven de forma similar y eso les puede servir para que se fijen como se definen las variables en este tipo de problemas de PL). [11.1.1] (2-11); [11.1.2] (52-63), (86-89)?, (222-226), (269-274); [11.1.3] (280-282), (300-302), (325-330), (390-395); [13.1] (45-46), (54-65); [13.2] (271-282), (353-359), (387-391).

Alertar/Prevenir
CC-En27. Saber cómo plantearles una situación hipotética para prevenirlos de error *(presentarles una respuesta intuitiva que pudieran dar los estudiantes al problema (que todos los refrescos salgan del supermercado más cercano para que sea más barato) y comentarles que al dar esa respuesta puede haber varios riesgos: que la producción no fuese suficiente y que no se satisficiese la demanda).* [11.1.2] (112-132).

Forma de presentarlo/representarlo o Estrategia didáctica
CC-En34. Saber cómo remarcarles los aspectos más relevantes del contenido para concluir un ejemplo o la presentación de un tema *(saber cómo cerrar lo de las desigualdades, remarcándoles el conjunto de desigualdades que han obtenido; cerrar lo que han hecho hasta el momento, es decir, recapitula lo que se ha hecho (datos, variables, tabla de distribución, función objetivo y restricciones) para luego comentarles lo que falta por hacer (región factible y encontrar el mínimo analíticamente); saber cómo cerrar el ejemplo: diciéndoles las etapas que conforman el planteamiento del problema y comentándoles que ya sólo les faltaría hacer la resolución del problema para terminarlo completamente)*. [11.1.3] (361-362), (370-428), [13.1] (184-186).

CC-En35. Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente *(saber cómo remarcarles lo que han hecho hasta el momento, es decir, los sitúa para luego avanzar en la presentación del contenido (les hace notar que en la expresión de la función objetivo tienen lo correspondiente a la fábrica A y que falta considerar lo de la fábrica B); cerrar lo que han hecho hasta el momento, es decir, recapitula lo que se ha hecho (datos, variables, tabla de distribución, función objetivo y restricciones) para luego comentarles lo que falta por hacer (región factible y encontrar el mínimo analíticamente); remarcarles lo que han hecho hasta el momento y qué es lo que sigue (que sólo han escrito los datos del problema y lo que sigue es definir las variables); cerrar el ejemplo diciéndoles las etapas que conforman el planteamiento del problema y comentándoles que ya sólo les faltaría hacer la resolución del problema para terminarlo completamente)*. [11.1.2] (252-255); [11.1.3] (370-428); [13.1] (33-36), (184-186).

CC-En39. Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último *(Saber usar una analogía entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último: comentarles la analogía en* *el proceso de despeje de variables en igualdades y desigualdades (las variables a la izquierda y los términos independientes a la derecha)).* [11.1.3] (304-314).

CC-En40. Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución *(saber cómo explicarles que los puntos de distribución normalmente son los supermercados, para que se familiaricen con el lenguaje de los problemas para escribir la tabla; que es importante leer el enunciado del problema un par de veces y entender los datos del problema, antes de hacer otra cosa, saber que un primer paso para resolver el problema es tener bien claros los datos, es decir, entender de lo que trata el problema y una vez que tengan ese entendimiento, luego intenten avanzar en las siguientes etapas de solución, es decir, resolver el problema; que se puede leer "entre líneas" en los datos del problema, es decir, que aunque no se diga en el problema que tan lejos estén las fábricas de refresco de los supermercados, se puede saber cuál supermercado está más cerca de cada fábrica si se fijan en el coste, pues depende de la distancia es el coste de transporte; que al solucionar un problema de PL es muy importante entender y mostrar los datos del problema; comentarles la estrategia final para encontrar analíticamente el mínimo, calculando el valor de z en cada uno de los vértices y comparar sus valores, después de escuchar el timbre que indica que la clase ha terminado y tratando de cumplir su objetivo; que el problema se resuelve definiendo sólo dos variables (para evitar que los estudiantes divaguen en definir más de dos variables); que se trata de un problema cuyo objetivo es diferente a los anteriores (antes se buscaba el mínimo y ahora el máximo), independientemente de que la función objetivo consista en buscar el máximo o el mínimo, el procedimiento para resolver el problema es el mismo y que para identificar fácilmente la función objetivo hay que ubicar donde diga máximo o donde diga el mínimo en el problema).* [11.1.2] (66), (86-89), (101-111), (133-134); [11.1.4] (425-428); [13.1] (37-40), (54-65).

CC-En42. Saber cómo usar la comparación entre algunas formas de hacer un ejercicio o entre varias representaciones, para destacar a los estudiantes los aspectos del contenido en los que se deben fijar *(saber cómo hacerles notar una pequeña diferencia entre los dos problemas equivalentes, para que los estudiantes se fijen que de Brujas sólo salen lotes de mantenimiento y de Munich lotes de choque; remarcarles que se fijen en el problema que han estado comparando con este y vean como está escrita la tabla de distribución. Emi ve que en ese momento los estudiantes se sienten desubicados/desorientados para saber definir las variables y por ello les recomienda fijarse en la tabla de distribución del problema que han estado comparando, de esa forma E2 logra definir adecuadamente las variables; hacerles notar que normalmente todos los problemas de transporte se resuelven de forma similar y eso les puede servir para que se fijen como se definen las variables en este tipo de problemas de PL).* [13.2] (271-282), (353-359), (387-391).

CC-En43. Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto *(agregar en la tabla de distribución otra fila y otra columna para que esa presentación de la información ayude a los estudiantes a visualizar la información y completar la tabla de distribución en términos de las variables x, y; decidir no resolver el sistema en ese momento, porque lo que quiere es mostrarles el aspecto de un problema de PL, es decir, la estructura de solución del problema y que los estudiantes se hagan una imagen concreta de dicha estructura, por* *ello va a suponer que han resuelto las desigualdades para alcanzar a explicarles grosso modo lo que falta (región factible y encontrar el mínimo analíticamente)).* [11.1.2] (175-187); [11.1.3] (377-385).

CC-En44. Conocer la potencialidad de los esquemas gráficos para representar un contenido *(agregar en la tabla de distribución otra fila y otra columna para que esa presentación de la información ayude a los estudiantes a visualizar la información y completar la tabla de distribución en términos de las variables x, y).* [11.1.2] (175-187)

CC-En45. Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan "mejor" el contenido que presenta, saber cómo evocar un concepto(s), un ejemplo, ejercicio, problema o procedimiento equivalente visto(s) o hecho(s) anteriormente, para presentar un nuevo concepto o un ejemplo del nuevo concepto, para que los estudiantes traigan a la mente ese contenido o se hagan una idea de cómo se resuelve el nuevo problema *(evocar un problema equivalente que hicieron anteriormente para que identifiquen el tipo de problema del que se trata, pues si identifican de qué tipo es, entonces tienen una idea de cómo se resuelve por ser un problema equivalente, es decir, comparar los datos de ambos problemas, de tal forma que esa comparación les sirva para ir resolviendo el nuevo problema de PL)* . [13.2] (202), (249-270), (353-359).

CC

CC1. Saber qué contenidos aparecen y cómo están organizados en el libro de texto *(saber que el ejemplo que va a explicar está resuelto en el libro de texto).* [13.1] (15-22).

CPG

CPG5. Saber cómo estimular a los estudiantes que sí hicieron sus deberes (tareas) *(tomar en cuenta a E1 porque ella hizo este ejercicio (fue la única que hizo sus deberes)).* [13.1] (152-153).

V.1.3.2. Para el caso de Aly

Concentrado de los descriptores evidenciados por Aly en el tema de **Matrices**[4]:

CCC
CCC1. Saber la definición del concepto, regla, propiedad, teorema o método que está *presentando (saber lo que es una matriz, la definición de matriz cuadrada, vector fila y columna, igualdad de matrices, diagonal principal y secundaria, matriz simétrica y triangular).* [1] (11), (143-150), (155-158), (169-172), (246-258), (260-281), (387-390), (450-452).

[4] En este concentrado, integramos los descriptores evidenciados en la clase 4 de Aly y los del agregado, ambos aparecen más explícitos en la sección anterior.

CCC2. Saber usar términos y notación matemática (que aparece en las definiciones formales) *(saber la notación matemática para denotar una matriz genérica de orden mxn; para denotar la igualdad de matrices)*. [1] (179-228), (246-258).

CCC4. Saber la operatividad, propiedades (en cuanto a su uso), utilidad o aplicación de un *concepto (saber aplicar las propiedades de campo para despejar X de una ecuación matricial; saber hacer operaciones básicas con matrices (suma de matrices, multiplicación por un escalar y producto de matrices; saber usar la caracterización de que A por A inversa es igual a la matriz identidad ($AA^{-1}=I$) como primer método para encontrar A inversa; saber hacer la comprobación, una vez que se obtiene la matriz inversa de A, comprobar ese resultado; saber los cambios (un cambio puede tener una o más transformaciones elementales) que necesita realizar y sus respectivas transformaciones elementales para hallar la matriz inversa, en sí, saber el método de Gauss-Jordán; saber que en la notación de una transformación elemental la primera fila que se denote es la que sufre los cambios, por ejemplo en la transformación F_1-F_2, la F_1 es la que se modifica; saber que dividir una fila de la matriz por 3 es lo mismo que multiplicarla por 1/3; saber que estas dos propiedades $(A+B)^2$ y $(A+B)(A-B)$ que se cumplen con los reales no se cumplen con las matrices, es decir, que en matrices $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$ y que $(A+B)(A-B) \neq A^2-B^2$).* [4.1] (61-67), (77-79), (80-87); [4.2] (176-191), (222-362), (319-342); [4.3] (422-512), (433), (527-528); [4.4] (582-594).

CEC

CEC4. Saber la causa matemática de los errores comunes de los estudiantes *(saber que al aplicar la propiedad conmutativa y el elemento identidad en el producto de matrices, el error de los estudiantes puede provenir de la extensión de la propiedad conmutativa y elemento identidad del producto en los números reales al producto en matrices).* [4.1] (118-123); [4.2] (178-181), (187-191); [4.4] (602-628).

CC-Es

CC-Es7. Saber que los estudiantes pueden equivocarse al hacer determinado cálculo o de un número o de un signo (más leve), provocado por un despiste al hacer una(s) operación(es)/transformación(es); o por no dominar el contenido que se les está presentando *(saber que los estudiantes pueden pensar que la matriz identidad en el producto de matrices existe para una matriz de cualquier orden (pero sólo existe para matrices cuadradas); prever que muchas de las veces al hacer la operación 0-1, los estudiantes pueden despistarse con ese cero y fallar en el resultado de la operación, pues ven en una fila el cero y en otra fila el 1 y saben que hay que restar 0 menos 1, pero al ver el cero pueden despistarse y equivocarse en el resultado, escribir 1 en lugar de –1; prever el error que pueden cometer los estudiantes, anticipa que al hacer ceros por debajo y por encima de la diagonal, los estudiantes pueden retroceder en lo que ya se tiene hecho, en lugar de avanzar; prever que los estudiantes donde más se pueden equivocar es al hacer los cálculos, las operaciones en el procedimiento).* [4.2] (187-191); [4.3] (467-470), (492-498); [4.4] 666-667).

CC-Es8. Saber que los estudiantes deben proceder ordenadamente respetando las convenciones matemáticas, para evitar confusiones y errores *(saber que los estudiantes* *pueden equivocarse al colocar los valores resultantes de las incógnitas, es decir, que tal vez no tengan cuidado al acomodarlos adecuadamente en la posición inicial, en su posición propuesta al plantear con esas incógnitas los elementos de la matriz inversa).* [4.2] (306-308).

CC-Es13. Saber que para los estudiantes será más comprensible un tema si lo ven con un ejemplo concreto que aparece en el libro de texto *(saber que los estudiantes pueden comprender mejor cómo calcular la traspuesta de una matriz, al hacer el ejercicio con 6 apartados propuesto en el libro de texto; prever que los estudiantes pueden comprender mejor cómo calcular la matriz E=2A-3B+C-2D (conociendo los valores de la matriz A, B, C y D), al hacer el ejercicio propuesto en el libro de texto).* [2] (9-178), (299-387).

CC-Es14. Saber que los estudiantes entenderán "mejor" el ejemplo si antes de empezar a hacerlo les remarca las principales características del concepto que usará en el ejemplo *(saber que los estudiantes entenderán "mejor" los ejemplos, si antes les remarca la importancia de la posición de los elementos, el orden por filas y por columnas en el concepto de matriz)*. [1] (8-13).

CC-Es19. Saber que los estudiantes pueden resolver fácilmente alguna parte operacional (algún sistema de ecuaciones, alguna ecuación de segundo grado, algún determinante) del procedimiento *(saber que los estudiantes pueden resolver fácilmente 2 sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas y sin escribir el procedimiento, Aly sólo anota los valores resultantes de las incógnitas, cuyos valores representan la matriz inversa en el ejemplo).* [4.2] (299-305).

CC-En

Ejemplos

CC-En1. Saber con qué ejemplo o ejercicio empezar, cuándo y cuáles usar para enfatizar, reforzar o generalizar cierta idea *(saber con qué ejemplo empezar: presentarles el primer método para calcular la matriz inversa usando un ejemplo que viene resuelto en el libro de texto; o un ejercicio del libro porque sabe que los estudiantes pueden presuponer que se cumplen esas dos propiedades (por herencia de los números reales) y que en matrices no se cumple, las dos propiedades que no se cumplen en matrices son: $(A+B)^2$ y (A+B)(A-B))*. [4.2] (206-209); [4.4] (573-575).

CC-En3. Saber que una de las potencialidades de un ejemplo, en concreto al desarrollarlo, es utilizarlo para destacar los aspectos relevantes del contenido matemático que pretende enseñarles ese día en clase *(aprovechar el ejemplo que viene resuelto en el libro de texto para hacerles notar en qué consiste el primer método para calcular la matriz inversa (usando la caracterización: $AA^{-1}=I$); remarcarles la parte final del segundo ejemplo resuelto en la fotocopia para hacerles notar la situación en la que hayan logrado conseguir la diagonal 1, -1, 1 en lugar de 1, 1, 1. Aly intenta que tengan idea de cómo conseguir en la diagonal el 1, 1, 1, es decir, que sepan convertir el -1 en 1, que en ese caso sería multiplicar por -1 toda la fila donde está el -1).* [4.2] (162-209); [4.3] (538-547).

CC-En4. Saber usar ejemplos con datos concretos, en lugar de desarrollar propiedades de forma general o con ejemplos genéricos, para explicar el contenido *(saber* *presentarles el primer método para calcular la matriz inversa usando un ejemplo que viene resuelto en el libro de texto).* [4.2] (206-209).

CC-En6. Saber qué ejercicios dejarles de deberes para que practiquen *(dejarles de deberes que hagan un ejercicio parecido al que hicieron en esa clase).* [1] (548-549).

Ayudas
CC-En7. Saber qué ayudas dar a los estudiantes en situaciones de confusión o dificultad, para que puedan dar solución a un ejercicio o resolver un problema *(comentarles la estrategia para hacer un ejercicio, les da un "empujoncito", pues ella considera que es lo que ella debe hacer para que los estudiantes empiecen a hacer el ejercicio).* [4.4] (654-656).

CC-En8. Saber que una "buena" estrategia para que los estudiantes comprendan o hagan un ejemplo, ejercicio o problema, consiste en explicarles o hacerles hincapié en lo que quiere que hagan y para qué quiere que lo hagan o simplemente explicarles de lo que trata el ejercicio o problema *(saber que es bueno explicarles lo que quiere que hagan (que calculen la matriz inversa con el método de Gauss) en el ejercicio y para qué quiere que lo hagan (para que vean los pasos para llegar a eso)).* [4.4] (641-650).

Gestión de la participación
Preguntas
CC-En11. Saber qué preguntas formular, no necesariamente a cierto estudiante, para presentar o mostrar específicamente lo más importante del contenido que está enseñando (algunas veces las contesta ella misma y otras los estudiantes) *(saber hacer preguntas a los estudiantes para orientarlas al contenido que quiere presentar, por ejemplo, para explicarles cómo se hace el producto de una matriz fila por una matriz columna).* [3] (50-51).

CC-En12. Saber qué preguntas formular para presentar un nuevo concepto, una nueva propiedad o una clasificación *(saber qué preguntas formular para plantearles la cuestión de existencia de la matriz inversa para introducir el tema (primer método para calcular la inversa).* [4.2] (194-209).

CC-En15. Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático para ir guiando la solución de un ejemplo o ejercicio, resolver un problema o hacer una representación gráfica *(saber qué preguntas hacer para ir guiando la solución del ejemplo que ella misma propone, para hacerles notar que el producto de dos matrices no es conmutativo).* [3] (73-161).

Respuestas
CC-En16. Saber qué respuestas de los estudiantes aceptar, cuáles interrumpir, cuáles ignorar o cuáles destacar, para alcanzar los objetivos de la enseñanza del contenido trazados por la profesora para esa clase *(saber qué respuestas aceptar: aceptar la respuesta de E2 porque da un dato para construir el ejemplo de matrices; aceptar la respuesta de E2 porque es adecuada para explicar la dimensión de una matriz).* [1] (52), (117).

CC-En17. Saber cómo orientar una respuesta correcta a un lenguaje matemático aceptado en la matemática escolar, es decir, atendiendo o enfocado a una convención matemática *(saber cómo orientar la respuesta de E5 a una convención matemática, Aly pregunta de qué orden es la matriz y E5 contesta que es de 2x3 (E5 dice primero el número de columnas y luego el de filas), a lo cual Aly vuelve a preguntar: De 2x3, ¿estás seguro?. E5 contesta que no, que es de 3x2 (E5 ahora sí dice primero el número de filas y luego el de columnas)).* [2] (9-13).

CC-En19. Saber cómo aprovechar la respuesta de un estudiante, corregirla y utilizarla para explicar algún aspecto del contenido *(saber cómo aprovechar la respuesta de E5 para hacerles ver que al decir el orden de una matriz es muy importante decir primero el número de filas y luego el de columnas y no al revés, porque no es lo mismo)*. [2] (9-13).

Traducir
CC-En24. Saber cómo "traducir" a los estudiantes la actividad matemática presentada por otro estudiante o cómo "traducir" alguna actividad matemática del libro de texto a su lenguaje usual *(saber cómo "traducir" a los estudiantes lo que está haciendo E2, es decir, como lo está resolviendo E2).* [4.1] (35-39).

CC-En25. Saber usar lenguaje común o más familiar a los estudiantes o una forma más explícita, más detallada, al explicar el contenido matemático para que los estudiantes lo comprendan "mejor" *(saber que los estudiantes pueden comprender mejor la definición de matriz, matriz cuadrada, de vector fila y vector columna, igualdad de matrices, diagonal principal y diagonal secundaria, matriz simétrica y triangular, si se las explica en lenguaje común o de manera detallada).* [1] (11), (143-150), (155-158), (169-172), (246-258), (260-281), (387-390), (450-452).

Hacer notar/remarcar/destacar
CC-En26. Saber cómo (y cuándo) hacerles notar, remarcar, destacar o aclarar, puntualmente, lo más importante del contenido que está enseñando *(saber cómo hacerles notar que el resultado es el mismo haciendo el ejercicio de la forma que lo hizo E2 y de la forma que lo hizo ella y remarcarles que lo importante es saber hacer el ejercicio; hacerles notar los aspectos relevantes de las propiedades del producto de matrices (que el producto no es conmutativo y que el elemento neutro en el producto de matrices es sólo para matrices cuadradas); remarcarles que no siempre existe la matriz inversa, es decir, que no todas las matrices, a pesar de ser cuadradas, tienen inversa; hacerles notar que en matrices, en el caso concreto de $AA^{-1}=A^{-1}A$ sí se da la conmutatividad; remarcarles la condición que se debe cumplir para que A^{-1} sea la inversa de A (que $AA^{-1}=I$); hacerles notar constantemente la estrategia para hallar la matriz inversa con el método de Gauss-Jordán mientras va desarrollando el ejemplo, para que los estudiantes no se pierdan cuando ella va haciendo las transformaciones elementales para conseguir la matriz inversa; remarcarles que en la primera transformación F_1-F_2 la F_1, es decir, la primera fila que se anote es la que sufre las modificaciones; hacerles notar que hay que hacer las transformaciones a la fila indicada de manera completa, es decir, incluyendo a la fila correspondiente de la matriz identidad, simultáneamente; remarcarles la parte final del segundo ejemplo resuelto en la fotocopia para hacerles notar la situación en la que hayan logrado conseguir la diagonal 1, -1, 1 en lugar de 1, 1, 1. Aly intenta que tengan idea de como conseguir en la diagonal el 1, 1, 1, es decir, que sepan convertir el -1 en 1, que en ese caso sería multiplicar por -1 toda la fila donde está el –1).* [4.1] (70), (88-90); [4.2]

(187-191), (201-203), (218-219), (221-228), (299-305), (345-346); [4.3] (382-393), (397-402), (433), (438-439), (538-547); [4.4] (629-631).

Alertar/Prevenir
CC-En27. Saber cómo plantearles una situación hipotética para prevenirlos de error *(saber cómo plantearles una situación hipotética para prevenirlos de error, en este caso, suponer que hagan una transformación elemental de manera incorrecta y que en lugar de avanzar retrocedan al diagonalizar la matriz para calcular la matriz inversa; para plantearles una situación hipotética, adelantándose a una situación que podrían tener los estudiantes en ejercicios posteriores, con el objetivo de que tengan idea de lo que deben hacer ante una situación similar a la que les plantea, Aly les comenta el caso en el que en la diagonal principal obtuvieran 1, 3, 1 en lugar de 1, 1, 1; y que en ese caso sólo habría que multiplicar por 1/3 toda la fila en la que se encuentra el 3)*. [4.3] (492-498), (520-533).

Preparar actividades
CC-En29. Saber cómo prepararles un compendio de actividades a los estudiantes, para que afiancen el contenido matemático que les está enseñando *(darles una breve descripción de lo que verán en la fotocopia que ella les preparó para abordar la explicación del método de Gauss-Jordán para calcular la matriz inversa; decidir plasmar en una fotocopia el método de Gauss-Jordán (al observar que en el libro no viene la explicación para calcular la inversa), decirles en qué consiste y darles 3 ejemplos resueltos en los que aparecen las transformaciones elementales necesarias hasta llevar a la matriz inversa y finalmente concluye esa parte apoyándose del texto que aparece en el libro respecto a la matriz inversa)*. [4.3] (410-414), (548-571).

Forma de presentarlo/representarlo o Estrategia didáctica
CC-En30. Saber cómo introducir un concepto mediante la relación de conceptos matemáticos vistos anteriormente *(saber cómo dar un repaso de lo visto en días anteriores (las propiedades de las matrices que habían visto), antes de empezar a explicar el primer método para calcular la matriz inversa).* [4.2] (139-152), (174-191).

CC-En32. Saber distintas formas de presentar/representar la definición de un concepto: en forma genérica y no con números concretos. [1] (179-228).

CC-En34. Saber cómo remarcarles los aspectos más relevantes del contenido para concluir un ejemplo o la presentación de un tema *(saber cómo remarcarles los aspectos más relevantes del contenido para concluir la aplicación del método: Aly vuelve a remarcarles de manera resumida lo que se hizo en el ejemplo; o para cerrar el ejemplo: Aly les vuelve a remarcarles que tengan cuidado cuando aparezcan esas dos propiedades en las matrices).* [4.3] (513-519); [4.4] (632-635).

CC-En35. Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente *(antes de empezar a explicar el primer método para calcular la matriz inversa, Aly les enuncia lo que han visto (propiedades de la suma, de un producto por un número, propiedades del producto) para aterrizar en que la que les falta ver es la matriz inversa; remarcarles lo que se ha conseguido con esa transformación elemental; situarlos detenerse y hacerles ver que ya va quedando lo deseado (ceros por debajo y por encima de la diagonal principal), además aprovecha para preguntarles cómo* *conseguir el último cero que falta hacer para terminar el ejemplo).* [4.2] (139-152), (174-191); [4.3] (446-447), (478-489).

CC-En36. Saber cómo explicarles la utilidad, aplicación, dirección/orientación del contenido en temas siguientes *(saber cómo explicarles la utilidad de un contenido matemático abordado anteriormente, es decir, evocarles ese contenido anterior para que se ubiquen y se hagan una idea de lo que se va a hacer ahora)*. [4.3] (348-351).

CC-En39. Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último *(presentar las propiedades de la suma en matrices, recurriendo a la analogía de las propiedades de la suma los números reales).* [3] (317-318), (322-329).

CC-En40. Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución *(saber cómo explicarles la estrategia para utilizar el primer método para calcular la matriz inversa ($AA^{-1}=I$) (anotar la condición $AA^{-1}=I$, denotar como incógnitas a los elementos de la matriz A^{-1}; verificar el orden de cada una de las matrices; calcular $AA^{-1}=I$, plantear la estrategia para encontrar los valores de las incógnitas de la matriz inversa, es decir, resolver el sistema de ecuaciones que se obtienen y de ahí encontrar los valores de A^{-1}); saber cómo explicarles la estrategia para utilizar el segundo método para calcular la matriz inversa (Gauss-Jordán) (colocar la matriz A y al lado la matriz identidad, comentarles la estrategia a seguir para encontrar la inversa, es decir, hacer transformaciones elementales para hacer ceros en los elementos por debajo y por encima de la diagonal de la matriz A y lograr hacer unos en la diagonal principal, realizar los cambios y transformaciones elementales necesarias); saber cómo explicarles la estrategia para hacer un ejercicio (les da un "empujoncito", pues ella considera que es lo que ella debe hacer para que los estudiantes empiecen a hacer el ejercicio)*. [4.2] (240-291); [4.3] (374-512); [4.4] (654-656).

CC-En41. Saber qué es lo que hay que repetir y cómo, para aclarar dudas del contenido a los estudiantes o reafirmar algunos aspectos del contenido *(repetir el procedimiento para explicarle a E9 de dónde salió un elemento de la matriz producto).* [3] (698-701).

CC-En42. Saber cómo usar la comparación entre algunas formas de hacer un ejercicio o entre varias representaciones, para destacar a los estudiantes los aspectos del contenido en los que se deben fijar *(remarcarles que la dificultad es la misma en la forma que lo hace E2 y en la forma que lo ha hecho ella; hacerles notar que el resultado es el mismo haciendo el ejercicio de la forma que lo hizo E2 y de la forma que lo hizo ella y remarcarles que lo importante es saber hacer el ejercicio).* [4.1] (70), (88-90).

CC-En43. Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto *(saber que si usar un esquema gráfico (cuadrado y rectángulo) para presentarles la definición de diagonal principal y diagonal secundaria, los estudiantes visualizarán mejor esos dos términos).* [1] (260-281).

CC-En44. Conocer la potencialidad de los esquemas gráficos para representar un contenido. *(Usar un esquema gráfico (cuadrado y rectángulo) para presentarles la definición de diagonal principal y diagonal secundaria).* [1] (260-281).

CC-En45. Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan "mejor" el contenido que presenta, saber cómo evocar un concepto(s), un ejemplo, ejercicio, problema o procedimiento equivalente visto(s) o hecho(s) anteriormente, para presentar un nuevo concepto o un ejemplo del nuevo concepto, para que los estudiantes traigan a la mente ese contenido o se hagan una idea de cómo se resuelve el nuevo problema *(evocar un ejercicio equivalente, comentarles la analogía del ejercicio a hacer con el ejercicio hecho anteriormente, es decir, les comenta que este ejercicio es parecido a un ejercicio que hicieron anteriormente; evocar que hacer transformaciones elementales es algo que ya han estado trabajando anteriormente en clase, para que los estudiantes adquieran mayor seguridad al desarrollar el método).* [4.2] (231-232); [4.3] (460), (489).

CC

CC1. Saber qué contenidos aparecen y cómo están organizados en el libro de texto *(comentarles que lo referente a nomenclatura y definiciones de matrices está en el libro de texto).* [1] (82), (237).

CC3. Saber qué contenido deben aprender los estudiantes aunque no aparezca en el libro de texto *(saber que el método de Gauss-Jordán no es el más rápido pero hay que verlo porque es parte del currículo; saber qué contenidos deben aprender los estudiantes aunque no aparezcan en el libro de texto (método de Gauss-Jordán)).* [4.2] (216); [4.3] (548-571).

CPG

CPG1. Conocer estrategias para controlar la indisciplina o distracción en el aula, para atraer la atención de los estudiantes o llamar la atención a los estudiantes cuando están comportándose de manera impropia para una clase *(algunos estudiantes están hablando indisciplinadamente y Aly les pregunta ¿qué pasa por ahí? y el estudiante que más hablaba dijo que nada, entonces se callan y Aly continúa con la explicación de la no conmutatividad en el producto de matrices).* [4.4] (595-597).

CPG3. Conocimiento y habilidad discursiva para motivar, re-encomendar o exigir a los estudiantes que hagan una demostración, los ejemplos o los ejercicios (para hacer en clase o de deberes) *(calcular la matriz traspuesta de 6 matrices), decirles: "si en esto que es tan facilito no nos paramos a intentarlo, pues esto ya se va complicando más cada vez").* [2] (179-182).

CPG4. Conocimiento y habilidad discursiva para preguntarles si les ha quedado claro lo que acaban de hacer, si tienen más dudas; para ver si van entendiendo lo que han visto; para acercarse al lugar de los estudiantes cuando levantan la mano porque tienen alguna duda o porque ponen cara "rara" *(preguntarles normalmente, cuando terminan de hacer un ejercicio: "¿de acuerdo?").* [2] (154), (286), (430).

CPG5. Saber cómo estimular a los estudiantes que sí hicieron sus deberes (tareas) *(tomar en cuenta a E7 que hizo sus deberes de calcular la matriz traspuesta (aunque no todos los 6 apartados), al revisar en clase la respuesta).* [2] (44-70).

Aly

Concentrado de los descriptores evidenciados por Aly en el tema de ***Determinantes***:

CCC

CCC2. Saber usar términos y notación matemática (que aparece en las definiciones formales) *(saber la notación matemática para representar el determinante de una matriz; para representar las propiedades de los determinantes; para denotar menores e indicar los adjuntos para calcular el determinante de una matriz genérica de orden tres)*. [6.2] (104); [6.3] (218-222), (278-283), (304-310), (343-346), (355-365), (426-431), (472-480), (508-512); [8.2.1] (302-305); [8.2.2] (526-562).

CCC1. Saber la definición del concepto, regla, propiedad, teorema o método que está presentando *(saber la definición de un determinante de una matriz; saber en qué consisten las principales propiedades de los determinantes; saber en qué consiste la regla de Sarrus; saber lo que es un menor y un adjunto).* [6.2] (62-72); [6.3] (218-222), (278-283), (301-310), (341-342), (355-365), (422-425), (469-471), (505-507), (630-633); [7.3.1] (176-230); [7.3.3] (317-323), (351-366); [7.4] (383-398); [8.1.1] (84-100); (125-127); [8.2.1] (281-283), (306-308), (309-312), (364-373).

CCC4. Saber la operatividad, propiedades (en cuanto a su uso), utilidad o aplicación de un concepto *(saber calcular el determinante de una matriz usando la definición (por menores); saber que el rango de una matriz juega un rol importante para decidir la dependencia o independencia lineal y para clasificar el sistema de ecuaciones; saber aplicar las propiedades de los determinantes; saber la operatividad al usar las propiedades de los determinantes; saber calcular el determinante de una matriz cuadrada de orden 3, usando la regla de Sarrus; saber calcular el menor complementario y el adjunto de un elemento)*. [6.1] (25-33); [6.2] (74-81), (89-90), (97-99), (109), (105-108), (116-123), (124-129), (135-140) (141-157); [6.3] (224-264), (251-264), (272-292), (320-337), (347-352), (366-401), (432-458), (481-499), (517-572), (582-606); [7.1] (16-18), (47-51), (67-74) ; [7.21] (79-84), (118-119); [7.2.2] (131-138), (142-143), (148-158); [7.3.2] (251-252), (289-290); [7.3.3] (337-350); [7.4] (402-416); [7.5] (440-444), (445-448), (451-455); [8.1.1] (14-18), (38-55), (56-75), (101-145); (142); [8.1.2] (185-189), (194-200), (213-217), (250-252), (218-220), (234-236); [8.2.1] (328-361); (407); [8.2.1] (408-426), (439-447), (452-454); [8.2.2] (475-480), (483-486).

CEC

CEC4. Saber la causa matemática de los errores comunes de los estudiantes (saber que al hacer cambio de fila o de columna en un determinante, el error de los estudiantes puede provenir de la analogía de cuando hacían cambio de fila en una matriz bajo una transformación elemental; saber que al aplicar la quinta propiedad de los determinantes *(si existe un múltiplo común en toda una fila o columna, ese múltiplo puede salir del determinante y el determinante queda más simplificado, quedaría el número que se saca multiplicado por el determinante simplificado) de manera recursiva, el error de los estudiantes puede provenir de la igualdad* $|\alpha A|=\alpha|A|$*, es decir, de la idea matemática de sacar una sola vez el múltiplo común del determinante y no recursivamente; saber que la notación (saber escribir paréntesis para indicar el* *producto, sobre todo cuando haya en los factores un número negativo eg. 36(-13)) es muy importante en la matemática, y en particular en la matemática escolar; saber que al escribir matemáticamente, el error de los estudiantes puede provenir de que no saben escribir correctamente lo que están pensando, es decir, saber que además de saber pensar matemáticamente hay que saber escribir matemáticamente; saber que al aplicar la propiedad* $\begin{vmatrix} a+b & e \\ c+d & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & e \\ d & f \end{vmatrix}$ *(que se cumple también para filas) cuando en dos filas tienen sumandos, el error de los estudiantes puede provenir de usar la propiedad dos veces al mismo tiempo, en lugar de usar la propiedad primero en una fila y luego en otra, porque la primera vez deben dejar una fila fija).* [6.3] (294-300), (314-318); [7.1] (21-46); [7.2.2] (142-143), (144-145); [7.3.1] (169-173); [7.5] (449-450); [8.1.1] (111-116).

CEC5. Conocer aspectos matemáticos de especial importancia para la enseñanza, lo que le permite hacer notar o distinguir la importancia de un aspecto matemático específico para enseñar el contenido matemático *(saber que en un determinante de orden dos se puede hablar de proporcionalidad entre filas pero eso, en un determinante de orden tres se traduce en hablar de combinación lineal, es el profesor a diferencia de otros profesionales, el que cae y hace caer en la cuenta de que en el determinante de orden tres al haber tres filas, una se puede escribir como combinación lineal de las otras (cuando ese sea el caso), a diferencia de un determinante de orden dos que sólo tiene dos filas; saber que por la propiedad simétrica: Si a=b entonces b=a. En sí, saber que la igualdad* $\begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$ *también puede verse como* $a\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$*. Para otros profesionales* $\begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$ *puede ser simplemente una propiedad para aplicar, pero es el profesor el que hace caer en la cuenta de que hay dos formas de ver la igualdad de esos determinantes)*. [7.4] (417-420); [8.1.1] (32-37), (42-46).

CC-Es

CC-Es1. Saber escuchar e interpretar el conocimiento o pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje (común o en proceso de adquisición del nuevo concepto –mezcla de lenguaje común con matemático) *(saber escuchar e interpretar la pregunta que hace E1).* [6.3] (607-619).

CC-Es2. Saber las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre el contenido matemático *(saber la dificultad sobre cómo extraer 1/5 de la segunda fila, es decir, de 1, 0, 3/5)*. [8.1.1] (67-73).

CC-Es3. Prever la confusión que pudiera tener el alumno con algún aspecto específico del contenido que se esté viendo en clase *(prever que los estudiantes se pueden equivocar cuando haya un número real multiplicando al determinante al confundirse con el producto de un escalar por una matriz; prever que los estudiantes pueden confundir el menor complementario con el adjunto del menor complementario, es decir, prever confusión con dos cosas distintas que acaban de definir).* [8.1.1] (32-37); [8.2.1] (374-375).

CC-Es5. Prever (anticipar) que los estudiantes se pueden quedar con una imagen o idea inadecuada del contenido (*prever que los estudiantes se pueden quedar con la imagen* *de que hay que detallar exhaustivamente los pasos al hacer un ejercicio y por eso Aly les comenta que al hacer los ejercicios, en la práctica, se aplica la propiedad directamente y no es necesario tanto detalle (pues ella escribió detalladamente los pasos en el ejemplo: expresar primero 20 como 5 por 4 y 45 como 5 por 9 y luego al hacer el determinante, escribir todo el proceso detallado para que los estudiantes vean que pueden extraer el 5 como factor común; prever que al haber dicho "negativo" [cuando ella dijo que el resultado del valor del determinante era negativo (en el valor del determinante de una matriz con ceros debajo de la diagonal secundaria, da como resultado: el producto de la diagonal secundaria negativo)], los estudiantes se pueden quedar con la imagen incorrecta de que siempre va a quedar en el resultado un número negativo, pero eso no necesariamente tiene porque serlo pues puede quedar como resultado un número positivo, lo único que pasa es que en el resultado de este determinante le antecede un menos al producto de los elementos de la diagonal secundaria).* [6.3] (406-413) ; [7.3.3] (374-378).

CC-Es7. Saber que los estudiantes pueden equivocarse al hacer determinado cálculo o de un número o de un signo (más leve), provocado por un despiste al hacer una(s) operación(es)/transformación(es); o por no dominar el contenido que se les está presentando *(prever que los estudiantes se pueden equivocar al hacer el cambio de fila o de columna en un determinante, al no considerar que ahora se verá afectado el resultado del determinante por un signo menos, a diferencia de cuando hacían un cambio de fila en una matriz bajo una transformación elemental; prever que los estudiantes se pueden equivocar al calcular el valor del determinante en el que en comparación con el original, las columnas están cambiadas, es decir, prever que los estudiantes pueden no fijarse en este aspecto que difiere entre las matrices y los determinantes; saber que los estudiantes se pueden equivocar en los signos al calcular un determinante de orden 3; prever que puede haber un número o un dato que puede despistar a los estudiantes para usar una propiedad de los determinantes; prever que los estudiantes se pueden equivocar si aplican una propiedad dos veces simultáneamente y no recursivamente)*. [6.3] (294-300), (314-318); [7.1] (60-66); [7.3.1] (182-186); [7.3.3] (363-366); [8.1.1] (24-31), (93-116).

CC-Es11. Prever que los estudiantes no vean que un problema es equivalente a otro; o que no vean que una igualdad la pueden usar en un sentido o en otro *(prever que los estudiantes pueden ver la igualdad de una propiedad en un sólo sentido, es decir, ver que* $\begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$ *pero no ver que* $a\begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} aF_1 \\ F_2 \end{vmatrix}$*).* [8.1.1] (32-37).

CC-Es12. Saber que los estudiantes pueden ponerse a hacer cálculos sin antes fijarse si pueden usar una propiedad *(prever que los estudiantes empiecen a hacer cálculos innecesarios cuando puedan aplicar una propiedad de los determinantes, anticipar que los estudiantes pueden ponerse a calcular el determinante sin antes echar un ojito por si se pueden usar una propiedad y terminarlo más rápido, es decir, no necesitarían hacer los cálculos, sólo justificar la propiedad que utilicen)*. [6.3] (326-333), (368-369); [7.3.2] (240-246).

CC-En

Ejemplos

CC-En1. Saber con qué ejemplo o ejercicio empezar, cuándo y cuáles usar para enfatizar, reforzar o generalizar cierta idea *(cuáles usar para explicar lo que dice la definición del determinante para cualquier matriz cuadrada y luego les reafirma nuevamente que se cumple lo que se menciona en la definición para ese ejemplo; cuáles usar para hacerles notar "lo que dice" la propiedad de los determinantes; cuáles usar para aplicar las propiedades de los determinantes; para generaliza una propiedad de los determinantes; cuáles usar para hacerles notar lo que es el menor y el adjunto de un elemento)*. [6.2] (141-157); [6.3] (272-293), (622-627); [7.1] (1-126), (52-65); [7.3.3] (337-350); [8.2.1] (294-299).

CC-En2. Saber que la aplicación del concepto en un ejemplo le es útil para inducir luego la definición del concepto *(para definir un menor, da ejemplos de submatrices que formarían el menor y finalmente define el menor como el valor del determinante de una submatriz).* [8.2.1] (263-308), (263-287), (327-342).

CC-En3. Saber que una de las potencialidades de un ejemplo, en concreto al desarrollarlo, es utilizarlo para destacar los aspectos relevantes del contenido matemático que pretende enseñarles ese día en clase *(para hacerles notar que en ocasiones interesa separar el determinante en la suma de dos determinantes porque al separar en la suma de dos determinantes puede dar cero y pueden terminar los cálculos más fácilmente; para hacerles notar que el ejercicio se puede resolver usando la propiedad que ha propuesto un estudiante pero también con la propiedad que ella propone; para aprovechar el ejemplo y generalizar una propiedad).* [6.3] (492-499), (561-566); [7.3.3] (337-350); [8.2.1] (263-287).

CC-En4. Saber usar ejemplos con datos concretos, en lugar de desarrollar propiedades de forma general o con ejemplos genéricos, para explicar el contenido *(proponer (inventarse) el ejemplo con números concretos para mostrar algunas propiedades de los determinantes; aprovechar un ejemplo para generalizar una propiedad de los determinantes)*. [6.3] (481-499); [7.3.3] (337-350).

CC-En6. Saber qué ejercicios dejarles de deberes para que practiquen *(que hagan ejercicios parecidos a los ejemplos realizados en clase; que terminen un ejercicio que ella empezó a hacer en clase pero se terminó la clase y no quedó terminado).* [6.3] (636-644); [7.5] (463-464); [8.2.1] (450-451); [8.2.2] (563-569), (570-571).

Ayudas

CC-En7. Saber qué ayudas dar a los estudiantes en situaciones de confusión o dificultad, para que puedan dar solución a un ejercicio o resolver un problema *(darles ayudas explícitas, Aly calcula el primer producto para obtener el determinante de la matriz cuadrada de orden 2).* [6.3] (226-239).

Gestión de la participación.

Preguntas

CC-En11. Saber qué preguntas formular, no necesariamente a cierto estudiante, para presentar o mostrar específicamente lo más importante del contenido que está enseñando (algunas veces las contesta ella misma y otras los estudiantes) *(saber hacer preguntas a los estudiantes para ir construyendo un ejemplo para mostrar algunas propiedades de los determinantes; para alertar a los estudiantes de posibles errores; para orientar la respuesta a un ejercicio; para ver si le van entendiendo los estudiantes* *sobre lo que ha explicado o para que lo estudiantes noten la diferencia entre dos conceptos)*. [6.3] (517-572); [7.1] (21-46); [8.1.1] (12-18); [8.2.1] (347-361), (415-417), (440-442).

CC-En12. Saber qué preguntas formular para presentar un nuevo concepto, una nueva propiedad o una clasificación *(saber qué preguntas formular para introducir alguna propiedad de los determinantes)*. [6.3] (517-572).

CC-En15. Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático para ir guiando la solución de un ejemplo o ejercicio, resolver un problema o hacer una representación gráfica *(saber qué preguntas formular para hacerle notar a E12 por qué da cero el valor del determinante sin necesidad de hacerlo (porque la segunda fila es siete veces la primera))*. [7.2.1] (105-114).

Respuestas

CC-En16. Saber qué respuestas de los estudiantes aceptar, cuáles interrumpir, cuáles ignorar o cuáles destacar, para alcanzar los objetivos de la enseñanza del contenido trazados por la profesora para esa clase *(aceptar las que le permiten calcular el primer producto para obtener el determinante de la matriz cuadrada de orden 2; para remarcarles el uso de las propiedades de los determinantes; para comparar dos formas de justificar la solución a un ejercicio; para destacar, confirmar y reafirmar la respuesta que da un estudiante a un ejercicio; ignorar o interrumpir la respuesta de algún estudiante al ejercicio porque prefiere que también los demás estudiantes intenten hacer el ejercicio; repetir la respuesta de un estudiante porque eso justifica la solución del ejercicio)*. [6.3] (226-239), [6.3] (436-444), (561-566); [7.2.2] (131-138); [7.3.2] (253-262) (263-268); [8.1.2] (207-217), (248-252); [8.2.1] (347-361).

CC-En19. Saber cómo aprovechar la respuesta de un estudiante, corregirla y utilizarla para explicar algún aspecto del contenido *(para explicar e ir corroborando que la cuarta columna es nueve veces la segunda columna, es decir, la cuarta columna es proporcional a la segunda)*. [8.1.2] (224-231).

Preguntas y respuestas

CC-En22. Saber cómo transferir e interpretar la pregunta y/o respuesta de un estudiante y luego contestar a forma de explicación para todos los estudiantes *(saber cómo transferir e interpretar la pregunta de E4 referente a aplicar una propiedad de los determinantes viendo la igualdad del otro lado (←); la pregunta de E1 respecto a: ¿qué pasa si tienen en un determinante a b (en la primera fila) y c c (en la segunda fila)? y Aly le comenta que puede sacar la c como factor común y le quedaría c por el determinante a b (en la primera fila) y 1 1 (en la segunda fila); en ambos casos Aly aprovecha para hacerles notar a los estudiantes que lo pueden hacer)*. [6.3] (460-467), (607-619).

Traducir

CC-En24. Saber cómo "traducir" a los estudiantes la actividad matemática presentada por otro estudiante o cómo "traducir" alguna actividad matemática del libro de texto a su lenguaje usual *("traducir" la definición formal que está en el libro de texto, combinar lenguaje formal con lenguaje común; "traducir" lo que piden encontrar en un ejercicio)*. [8.2.1] (309-312), (396-397).

CC-En25. Saber usar lenguaje común o más familiar a los estudiantes o una forma más explícita, más detallada, al explicar el contenido matemático para que los estudiantes lo comprendan "mejor" *(saber que los estudiantes pueden comprender "mejor" las propiedades de los determinantes si se las dicen en lenguaje común o en lenguaje más familiar a los estudiantes, escribir en los ejemplos, detalladamente los pasos de la solución y utilizar términos más conocidos para ellos; saber que si les dice de que trata el ejemplo en lenguaje más común, los estudiantes entenderán "mejor" lo que deben hacer en el ejemplo, "traducirles" lo que "piden" hacer en el ejemplo; desarrollar detalladamente cada uno de los productos al calcular el determinante de una matriz y comentarles en lenguaje más familiar cómo calcular el determinante de una matriz de orden mayor o igual a tres)*. [6.3] (360-365), (402-405), (376-395), (396-401), (508-515), (569-572), (622-627); [7.3.3] (328-336); [7.4] (402-416), (417-423); [7.5] (436-439); [8.1.1] (14-18), (20-79), (64-66); [8.2.1] (427-438); [8.2.2] (473-474) .

Hacer notar/remarcar/destacar

CC-En26. Saber cómo (y cuándo) hacerles notar, remarcar, destacar o aclarar, puntualmente, lo más importante del contenido que está enseñando *(saber cómo remarcarles en el examen que se fijen en la matriz, "mirad la matriz", debido a que los estudiantes acababan de obtener el rango de la matriz y de ahí podían decidir la dependencia o independencia lineal; hacerles notar que esta parte de los contenidos del curso es muy mecánica pero que aún así, en la parte de sistemas de ecuaciones se complica un poco porque hay muchas operaciones algebraicas y ahí hay que pensar muy bien las operaciones y los cambios de signos; remarcarles la idea de que el determinante de una matriz es un número; enfatizar en que para conocer la clasificación de sistemas de ecuaciones, lo importante será hacer el determinante de la matriz de coeficientes y ver si el resultado es cero o distinto de cero; hacerles notar que para poder calcular el determinante de una matriz, ésta debe ser cuadrada; que con determinantes de matrices de orden 2x2 no hay mucha complicación pero sí para calcular el determinante de matrices de orden mucho mayor; que se cumple lo que dice la definición del determinante para cualquier matriz cuadrada, antes de explicarles las propiedades de los determinantes de matrices; hacerles notar por qué se cumplen las propiedades de los determinantes; remarcarles que al encontrar el valor del determinante, decir que vale cero sin hacer cálculos implica justificar por qué vale cero; hacerles notar que es importante escribir adecuadamente en matemáticas (usar paréntesis cuando se indique el producto y uno de los factores sea un número negativo, eg. (36)(-13)); hacer hincapié en que entre más ceros haya dentro del determinante mejor, pues los cálculos para encontrar el valor del determinante son más sencillos; aclararles que cuando ella dijo que el resultado del valor del determinante era negativo, negativo quiere decir que cambia de signo; hacerles notar la importancia de las propiedades de los determinantes, sobre todo en determinantes muy grandes; hacerles notar cómo obtener un menor de orden 2, 3 o 4; hacerles notar que el adjunto por la forma en que está definido (en particular: $(-1)^{i+j}$), algunas veces queda positivo y otras negativo; aclararles que también pueden calcular el determinante mediante adjuntos eligiendo otra fila)*. [6.1] (25-33); [6.2] (51-54), (62-72), (124-129), (133-134); (160-173); [6.3] (194-207), (183-217), (251-264), (293); (312-313), (396-401), (426-430), (449-459), (460-467), (622-627); [7.1] (21-46), (52-65); [7.2.1] (94-95), (105-114); [7.2.2] (144-145), (158-163); [7.3.2] (251-252), (289-290), (269-270); [7.3.3] (374-378); [8.1.2] (232-233), (241-243), (234-236); [8.2.1] (292-293), (300-301), (322-324), (347-361), (376-381), (403-405); [8.2.2] (481-482).

Alertar/Prevenir

CC-En27. Saber cómo plantearles una situación hipotética para prevenirlos de error *(saber cómo plantearles si puede decir que |11A|=11|A| para que a partir de ahí, los estudiantes piensen en esa posible situación; plantearles que tengan cuidado cuando tengan que calcular |11A| con una matriz de orden 3x3 porque en esa situación habría que sacar 3 veces el 11).* [7.1] (21-46), (47-51).

CC-En28. Saber cómo hacerles señalamientos sobre errores que cometieron algunos estudiantes en el examen, para alertar a los demás sobre los errores que se cometen y de alguna forma prevenirlos de ese error *(saber cómo hacerles una serie de señalamientos sobre errores que tuvieron algunos estudiantes en el primer examen del curso, para alertar a los demás sobre los errores que se cometen)*. [6.1] (7-48).

Preparar actividades

CC-En29. Saber cómo prepararles un compendio de actividades a los estudiantes, para que afiancen el contenido matemático que les está enseñando *(darles una fotocopia con las soluciones a los ejercicios del examen para que los estudiantes revisen cómo se resuelve).* [6.1] (1)

Forma de presentarlo/representarlo o Estrategia didáctica

CC-En34. Saber cómo remarcarles los aspectos más relevantes del contenido para concluir un ejemplo o la presentación de un tema *(a forma de cierre del ejemplo de las propiedades de los determinantes, remarcarles lo que dice la propiedad correspondiente, en lenguaje común; al terminar un ejercicio, recapitular las propiedades de los determinantes obtenidas a raíz del ejercicio; remarcarles en resumen varias formas de hacer el ejercicio; hacerles ver que los últimos subtemas que han visto es para llegar a la definición de menor).* [6.3] (569-572); [7.3.3] (367-373); [8.1.1] (78-79); [8.2.1] (306-308).

CC-En35. Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente *(recapitular lo que se ha realizado al aplicar la propiedad de los determinantes y comentarles que no es necesario que escriban tantos detalles como los que ella hizo para explicar en el ejemplo; recapitular el tipo de ejercicios que han hecho y comentarles que posteriormente harán ejercicios en los que les den el valor de un determinante y con base en ese les pidan calcular otro determinante; recapitular las propiedades obtenidas a raíz del ejercicio o remarcarles en qué consiste la propiedad que van a utilizar, antes de empezar el ejemplo)*. [6.3] (406-413), (418-420); [7.3.3] (367-373); [8.1.1] (84-92).

CC-En36. Saber cómo explicarles la utilidad, aplicación, dirección/orientación del contenido en temas siguientes *(saber cómo explicarles la utilidad de calcular el determinante de la matriz de coeficientes para conocer la clasificación del sistema de ecuaciones lineales; que en la práctica, las propiedades de los determinantes se aplican directamente sin detallar tanto los pasos pero sí que queden justificadas; que calcular los adjuntos de los menores complementarios sirve para desarrollar determinantes de orden igual o superior a 3)*. [6.2] (124-129); [6.3] (406-413); [8.2.1] (382-384), (452-454), (466-469).

CC-En40. Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución *(saber cómo explicarles la estrategia para calcular el determinante de orden 3 o superior (haciendo alusión a la definición* *de determinante); saber cómo explicarles la estrategia para resolver algunos ejercicios (usando las propiedades de los determinantes); saber cómo explicarles la estrategia para demostrar la regla de Sarrus).* [7.3.1] (183-185); [8.1.1] (103-105); [8.1.2] (181-182); [8.2.2] (516-523), (535-536).

CC-En41. Saber qué es lo que hay que repetir y cómo, para aclarar dudas del contenido a los estudiantes o reafirmar algunos aspectos del contenido *(repetir el procedimiento utilizado al hacer un ejemplo aplicando propiedades de los determinantes; repetir el procedimiento para calcular el determinante de orden 3 por Sarrus).* [6.3] (396-401); [8.2.1] (427-438).

CC-En42. Saber cómo usar la comparación entre algunas formas de hacer un ejercicio o entre varias representaciones, para destacar a los estudiantes los aspectos del contenido en los que se deben fijar *(comentarles la comparación entre la forma de presentar/representar la regla de Sarrus entre ella y el libro (que en el libro aparece un dibujo en el que se indica sólo la trayectoria que hay que seguir para hacer la multiplicación de los elementos mientras que ella usa otro esquema gráfico) y que se fijen que el resultado es el mismo; comparar dos formas de hacer un ejercicio (aplicando procedimientos distintos) o dos formas de hacer un determinante (eg. para uno de orden 3, usando Sarrus o menores) pero que se fijen que el resultado es el mismo).* [7.3.1] (187-230), (232-236); [8.1.1] (24-77); [8.2.2] (491-510).

CC-En43. Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto *(indicar con flechas los elementos que hay que ir multiplicando para explicar la regla de Sarrus, en el caso en que los elementos a multiplicar no estén en la diagonal principal o secundaria, Aly forma un triángulo en el cual cada elemento sería un vértice, primero los triángulos que se forman dentro del determinante en orientación a la diagonal principal y luego los que se forman dentro del determinante en orientación a la diagonal secundaria, comentarles la comparación entre la forma de presentarlo/representarlo entre ella y el libro (que en el libro aparece un dibujo en el que se indica sólo la trayectoria que hay que seguir para hacer la multiplicación de los elementos mientras que ella usa otro esquema gráfico, el cual, en el caso en que los elementos a multiplicar no estén en la diagonal principal o secundaria); usar flechas para indicar que al aplicar la regla de Sarrus para calcular determinantes de orden 3, los productos que van negativos son los que van en dirección de la diagonal secundaria, usar un esquema geométrico para representar la matriz triangular superior para generalizar una propiedad de los determinantes; usar un esquema gráfico para que los estudiantes visualicen la fila a la que van a aplicar la propiedad de los determinantes; escribir 2y como 2y+0 para que lo vean como dos sumandos y logren visualizarlo más fácilmente los estudiantes cuando apliquen la propiedad de los determinantes).* [7.3.1] (187-230), (232-236); [7.3.2] (271-277); [7.3.3] (337-350); [8.1.1] (107), (209).

CC-En44. Conocer la potencialidad de los esquemas gráficos para representar un contenido *(para indicar con flechas los elementos que hay que ir multiplicando para aplicar la regla de Sarrus; para comparar la forma de presentar o representar la trayectoria a seguir para resolver un determinante de orden 3; para representar la matriz triangular superior en la generalización de una propiedad en los determinantes; y para que visualicen la fila a la que van a aplicar la propiedad y por tanto las otras se quedan fijas).* [7.3.1] (187-230), (232-236); [7.3.3] (337-350); [8.1.1] (107).

CC-En45. Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan "mejor" el contenido que presenta, saber cómo evocar un concepto(s), un ejemplo, ejercicio, problema o procedimiento equivalente visto(s) o hecho(s) anteriormente, para presentar un nuevo concepto o un ejemplo del nuevo concepto, para que los estudiantes traigan a la mente ese contenido o se hagan una idea de cómo se resuelve el nuevo problema *(saber cómo evocar a ejercicios equivalentes para que los estudiantes se hagan una idea de lo que trata el ejercicio).* [6.3] (589-591); [7.2.2] (139-141).

CC

CC1. Saber qué contenidos aparecen y cómo están organizados en el libro de texto *(saber que la definición, las propiedades de los determinantes, la regla de Sarrus, y ejemplos y ejercicios al respecto, están en el libro de texto).* [6.3] (266-271), (573); [7.3.1] (176-177), (232-236); [7.4] (424-425); [8.2.2] (514-515).

CC2. Saber qué temas se deben ver posteriormente en el curso *(saber los contenidos que deben aprender y la orientación de éstos, pues el tema que está presentando es determinantes pero sabe que eso se ocupará luego cuando explique la clasificación de sistemas).* [6.2] (97-99).

CPG

CPG1. Conocer estrategias para controlar la indisciplina o distracción en el aula, para atraer la atención de los estudiantes o llamar la atención a los estudiantes cuando están comportándose de manera impropia para una clase *(llamar la atención al estudiante que sólo mira y no copia apuntes de lo que explica la profesora).* [8.1.2] (192-193).

CPG3. Conocimiento y habilidad discursiva para motivar, re-encomendar o exigir a los estudiantes que hagan una demostración, los ejemplos o los ejercicios (para hacer en clase o de deberes) *(animar a los estudiantes a que hagan los deberes).* [6.2] (58-60).

CPG4. Conocimiento y habilidad discursiva para preguntarles si les ha quedado claro lo que acaban de hacer, si tienen más dudas; para ver si van entendiendo lo que han visto; para acercarse al lugar de los estudiantes cuando levantan la mano porque tienen alguna duda o porque ponen cara "rara" *(acercarse al lugar de los estudiantes cuando levantan su mano porque tienen dudas y preguntarles si tienen alguna duda y luego explicársela; decirles que si no entienden algo le pregunten; preguntarles si van entendiendo lo que ella presenta).* [7.2.2] (152-153); [7.3.2] (278-284), (300), (309-310); [8.2.1] (288-291), (449).

CPG6. Conocer cómo controlar al estudiante que sí hizo sus deberes (tareas) para que también trabajen y participen otros estudiantes, al hacer o revisar los deberes en clase *(interrumpe e ignora la respuesta de E1, Aly prefiere que también los demás estudiantes intenten resolver el ejercicio, por ello "calla" a E1).* [7.3.2] (263-268).

CPG7. Conocimiento y habilidad para acercarse a revisar lo que han hecho los estudiantes y cómo lo han hecho *(preguntándoles qué resultados han obtenido ellos, después de que E10 ha calculado el determinante en la pizarra).* [7.3.2] (304-312).

Aly

Concentrado de los descriptores evidenciados por Aly en el tema de ***Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales***:

CCC

CCC2. Saber usar términos y notación matemática (que aparece en las definiciones formales) *(saber escribir el sistema de 4x4 de forma genérica; saber indicar en forma genérica* $|A_x|$, $|A_y|$ *y* $|A_z|$ *y simplificar lo que queda en* $x=|A_x|/|A|$, $y=|A_y|/|A|$, $z=|A_z|/|A|$*; saber usar términos adecuados en la explicación, pues no es lo mismo decir "eliminamos una columna" de la matriz que decir "a efectos del rango eliminamos una columna" de la matriz).* [11.2.1] (238-249); [12.1] (63-72), (72-82), (83-93); [12.2] (175-178), (216-217).

CCC1. Saber la definición del concepto, regla, propiedad, teorema o método que está presentando *(saber la definición del determinante de una matriz; saber el teorema de Rouché-Frobenius; saber la regla de Sarrus; saber la regla de Cramer; saber la relación entre un sistema de Cramer y los rangos (considerando que un sistema será de Cramer cuando el número de ecuaciones sea igual al número de incógnitas y además eso sea igual al rango de la matriz de coeficientes e igual al rango de la matriz ampliada, es decir, todos coinciden); saber las principales propiedades de los determinantes; saber en qué consiste un sistema en forma matricial; saber en qué consiste un sistema homogéneo).* [11.1] (55-64), (95-99), (99-107), (121-128), (171-175), (178-179); [11.2.1] (188-207), (214-220), (237-295), (258-260), (263-275), (278-288), (289-291), (293); [11.2.2] (372-416), (405-416), (420-428); [12.2] (231-236); [14.1] (26-30), (147-148); [14.2] (316-338); [14.3] (534-537), (552-558); [15.1] (84-86), (87-89); [15.2] (252-265).

CCC4. Saber la operatividad, propiedades (en cuanto a su uso), utilidad o aplicación de un concepto *(saber estudiar el rango de una matriz; saber usar la regla de Sarrus; saber usar las propiedades de los determinantes; saber aplicar el teorema de Rouché-Frobenius; saber usar la regla de Cramer; saber despejar la X de la ecuación matricial AX=C, es decir, saber que* $X= A^{-1}C$ *es otra forma de calcular el valor de las incógnitas y con ello resolver el sistema de forma matricial; saber la funcionalidad el elemento neutro de los números reales y la matriz identidad en las matrices (que al multiplicar un elemento del mismo conjunto por el elemento neutro o la matriz identidad, en los números reales o en matrices respectivamente, lo/la deja invariante); saber calcular la matriz inversa con la expresión* $A^{-1}=(AdjA)^t/|A|$*; saber expresar la solución de un SCI en términos del parámetro λ).* [11.1] (26-31), (32-36), (41-45), (51-54), (77-83), (84-88), (89-105), (116-158), (147-153), (159-177); [11.2.2] (448-458); [11.2.3] (477), (481-487), (542-554); [12.1] (16-18), (37-39), (63-72), (72-82), (83-93); [12.2] (98-107), (130-225), (270-277)U(302-355), (311-313), (369-374); [12.3] (406-414) (415-420); [14.1] (35-40), (41-43), (118-145), (135-137), (159-163), (164-174), (175-181), (201-202), (211-215), (216-219), (220-225), (233-243), (244-246); [14.2] (304-315), (349-362), (366-368), (369-374), (375-381), (386-392), (386-464), (465-491), (501-507); [14.3] (538-552); [15.1] (1-14), (46-52), (56-71), (84-86), (95-109), (143-155), (160-173), (177-188), (192-197), (198-204); [15.2] (223-248), (270-283), (284-288), (289-293), (339-346), (362-365), (381-387).

CCC5. Saber hacer la demostración de un teorema o una regla *(saber la demostración de la regla de Cramer para un sistema de 4x4)*. [11.2.2] (299-460).

CEC

CEC1. Saber el significado de los conceptos *(saber el significado del parámetro en la solución de un sistema compatible indeterminado, saber que al dar soluciones a ese sistema con distinto valor del parámetro, en el conjunto de infinitas soluciones la solución será la misma (seleccionen el menor que seleccionen, siempre y cuando elijan el menor de forma correcta –que el determinante sea distinto de cero), es el profesor a diferencia de otros profesionales, el encargado de explicar a los estudiantes (sobretodo cuando es la primera vez que ven eso los estudiantes) que aunque aparentemente vean que las soluciones son distintas (con distinto valor del parámetro) en el conjunto de infinitas soluciones es la misma)*. [14.1] (254-262).

CEC4. Saber la causa matemática de los errores comunes de los estudiantes *(saber que al aplicar la propiedad conmutativa en matrices, el error de los estudiantes puede provenir de la extensión de la propiedad conmutativa del producto en los números reales al producto en matrices, de tal manera que cuando despejan X de la ecuación matricial AX=C, deben tener cuidado al multiplicar A^{-1} por la izquierda en ambos términos de la igualdad, especialmente en la segunda parte de la igualdad (en $A^{-1}C$), pues en las matrices el producto no es conmutativo y entonces $A^{-1}C \neq CA^{-1}$, es el profesor a diferencia de otros profesionales, el que se plantea la causa matemática del error de los estudiantes al enfrentarse con la propiedad no conmutativa en el producto de matrices).* [14.2] (349-362).

CEC5. Conocer aspectos matemáticos de especial importancia para la enseñanza, lo que le permite hacer notar o distinguir la importancia de un aspecto matemático específico para enseñar el contenido matemático *(saber que si el valor del determinante se expresa como una ecuación de segundo grado, entonces se pueden aplicar propiedades de los números reales en la ecuación, es decir, cambiar de signo al término -a2 y, por lo tanto a todos los términos de la ecuación [Aly hace notar a los estudiantes que el valor del determinante no puede cambiar de signo, pero la ecuación de segundo grado en si misma sí -aplicando propiedades de campo de los números reales-. E1 ha dicho: "Una pregunta, si el valor del determinante fuera, en particular, a=0, tendríamos que igualar eso a 0, pero también se podría cambiar de signo a la a al cuadrado"], la expresión del determinante de la matriz es -a2+3a-2, la ecuación sería expresada como -a2+3a-2=0)*. [14.1] (44-56).

CC-Es

CC-Es1. Saber escuchar e interpretar el conocimiento o pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje (común o en proceso de adquisición del nuevo concepto –mezcla de lenguaje común con matemático) *(saber interpretar que lo que E4 quiere decir es que un sistema es incompatible si por un lado se tiene que x+y+z=0 y que x+y+z=1, es decir, la misma ecuación no puede ser igual a 0 e igual a 1 simultáneamente; interpretar el pensamiento de E1, E1 pregunta que si el sistema homogéneo es incompatible, pero al justificar E1 su respuesta (E1 dice que es incompatible porque el rango de A va a ser menor que el número de incógnitas), Aly* *interpreta que E1 lo que intenta decir es que el sistema homogéneo va a salir compatible indeterminado).* [14.1] (135-148); [15.1] (90-92).

CC-Es3. Prever la confusión que pudiera tener el alumno con algún aspecto específico del contenido que se esté viendo en clase *(prever que a los estudiantes les puede confundir trabajar con x_1, x_2, x_3, x_4, por eso al hacer la demostración de la regla de Cramer para un sistema de 4x4 usa la notación x, y, z, t en lugar de x_1, x_2, x_3, x_4; prever que los estudiantes se pueden confundir al estudiar el rango (rango 1, rango 2 y rango 3) de una matriz por tener poca experiencia en estudiarlo; prever que los estudiantes se pueden confundir con la z y la t que ahora son parámetros, por tanto, mejor les dará nombre de parámetro λ y μ, respectivamente; prever que al tomar otro menor distinto al que toman comúnmente puede confundir a los estudiantes, al estudiar este sistema).* [11.2.2] (339-340); [12.1] (32-34); [12.2] (260-269); [15.2] (368-373).

CC-Es5. Prever (anticipar) que los estudiantes se pueden quedar con una imagen o idea inadecuada del contenido *(prever que los estudiantes no tomen en cuenta que la matriz debe ser cuadrada para calcular su determinante, pues el determinante de una matriz que no sea cuadrada no está definido; prever que los estudiantes se pueden quedar con la imagen de que no necesitan hacer todo el procedimiento para obtener los valores de x, y, z, debido a lo que acaban de ver en la estrategia de la demostración de la regla de Cramer, pues al hacer la demostración, Aly hizo el desarrollo del procedimiento completo para encontrar el valor de x pero para encontrar el valor de y y de z no hizo el procedimiento completo sino que sólo les comentó la estrategia para calcularlos; prever que al cambiar de signo a la ecuación que representa el valor del determinante, los estudiantes pueden hacerse una imagen inadecuada y cometer el error de cambiar de signo el valor del determinante, es decir, hacerlo mecánicamente sin saber lo que están haciendo; que se pueden quedar con la idea incorrecta de que resolvieron el problema completo y por ello les aclara que sólo lo han resuelto para a=2).* [11.1] (121-128); [11.2.3] (467); [14.1] (44-56), (281-282).

CC-Es7. Saber que los estudiantes pueden equivocarse al hacer determinado cálculo o de un número o de un signo (más leve), provocado por un despiste al hacer una(s) operación(es)/transformación(es); o por no dominar el contenido que se les está presentando *(saber que pueden equivocarse en el signo, al escribir sólo el valor del adjunto, sin escribir todos los cálculos, es decir, al hacerlo directamente).* [14.2] (413-416).

CC-Es9. Saber que los estudiantes podrían hacer cálculos mecánicamente sin saber realmente lo que están haciendo *(saber que al cambiar de signo a la ecuación que representa el valor del determinante, los estudiantes pueden cometer el error de cambiar de signo el valor del determinante, es decir, hacerlo mecánicamente sin saber lo que están haciendo; saber que los estudiantes pudieran equivocarse al multiplicar por A^{-1} sin considerar si debe ser por la derecha o por la izquierda (para despejar X de AX=C)).* [14.1] (44-56), (349-362).

CC-Es11. Prever que los estudiantes no vean que un problema es equivalente a otro; o que no vean que una igualdad la pueden usar en un sentido o en otro *(prever que los estudiantes no ven fácilmente el otro sentido de la igualdad (←, en este caso particular, en la expresión $a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}t=C_1$, no ven que esa expresión también se puede ver como $C1=a11x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}t$)).* [11.2.2] (333-337).

CC-Es12. Saber que los estudiantes pueden ponerse a hacer cálculos sin antes fijarse si pueden usar una propiedad *(saber que los estudiantes pueden ponerse a hacer cálculos sin antes fijarse si pueden usar una propiedad, es decir, sin ver si existe alguna relación entre las filas o las columnas para ver si se puede aplicar una propiedad de los determinantes, no hacer todo el cálculo y terminar más rápido el determinante justificando la propiedad que utilicen).* [11.1] (38-40), (91-92), (133-134), (168-169); [12.2] (155,158), (164-167).

CC-Es13. Saber que para los estudiantes será más comprensible un tema si lo ven con un ejemplo concreto que aparece en el libro de texto *(saber que para los estudiantes será más comprensible el subtema: "Uso de la regla de Cramer en un SCI" si lo ven con un ejemplo concreto que aparece resuelto en el libro de texto).* [12.2] (110-112).

CC-Es14. Saber que los estudiantes entenderán "mejor" el ejemplo si antes de empezar a hacerlo les remarca las principales características del concepto que usará en el ejemplo *(saber que si les destaca a los estudiantes las principales características de un SH antes de hacer el ejemplo, entenderán "mejor", "más rápido" y "bien" el ejemplo de SH que les va a presentar)*. [14.3] (513-529).

CC-Es15. Saber que los estudiantes pueden atascarse en algunos detalles de la solución del problema y perder el sentido del problema *(saber que puede haber estudiantes que les preocupe o les sea más importante ver cuál sería esa dependencia lineal y pierdan el sentido del problema, es decir, saber que este dato puede despistar a los estudiantes, estancarse ahí (en este caso el determinante de orden 3 da 0 y no se ve tan fácilmente la dependencia línea entre filas o columnas), y no terminar de resolver el sistema de ecuaciones)*. [15.1] (21-23).

CC-Es16. Saber que a los estudiantes les puede parecer extraño usar la primera vez un método/regla que estaba diseñado para otro caso/situación del contenido *(saber que a los estudiantes les puede parecer extraño usar la regla de Cramer en un SCI y que por ello no la utilicen a pesar de que se cumplan las condiciones para aplicar la regla de Cramer)*. [15.1] (150-155).

CC-Es17. Saber que los estudiantes, al resolver problemas extensos, pueden olvidar algún cálculo que ya habían hecho al inicio y no aprovecharlo cuando se utilice nuevamente para solucionar el mismo problema *(saber que los estudiantes pueden no apreciar que cuando calcularon el determinante de la matriz A y vieron para qué valores ese determinante vale cero, precisamente encontraron que uno de esos valores es a=2, entonces A no puede tener rango 3, es decir, saber que los estudiantes pueden cometer el error de volver a calcular el determinante de A y "estudiar desde cero" el rango de A)*. [15.2] (301-328).

CC-Es19. Saber que los estudiantes pueden resolver fácilmente alguna parte operacional (algún sistema de ecuaciones, alguna ecuación de segundo grado, algún determinante) del procedimiento *(saber que los estudiantes pueden resolver fácilmente una ecuación de segundo grado y por ello sólo anotar el resultado de esas operaciones. Aly no resuelve la ecuación de segundo grado sólo anota los valores que da, en este caso a=2 y a=-3/4; anota sólo lo que da el $|A_x|$, es decir, no lo resuelve, sólo lo indica y anota el valor de x, similarmente lo hace con el $|A_y|$ y con el $|A_z|$ y les pide que ellos lo* *calculen por Sarrus).* [15.2] (235-236); [11.2.3] (503-505), (506-515), (516-535); [12.1] (63-69), (73-79), (84-90).

CC-En

Ejemplos
CC-En1. Saber con qué ejemplo o ejercicio empezar, cuándo y cuáles usar para enfatizar, reforzar o generalizar cierta idea *(Saber con qué ejemplo empezar. Hacer el primer ejemplo sobre la regla de Cramer que aparece resuelto en el libro de texto; hacer un ejercicio parecido al que acaban de hacer, justo después de hacer uno similar a ese para que practiquen lo enseñado; usar un ejemplo para hacer ver que en un sistema de 3x3 que tiene a lo más rango dos (y no rango tres), no se puede quitar cualquier fila (cualquier ecuación de sistema) para resolverlo, se tendría que quitar la que no garantice rango tres, es decir, dejar las dos ecuaciones que garanticen rango dos; revisar el ejercicio con sus tres apartados porque permite practicar y repasar los últimos temas vistos en clase, es un 3 en 1, es decir, 3 casos distintos en un solo ejercicio).* [12.2] (110-112); [12.3] (375-383); [14.1] (226-232); [15.1] (1-205).

CC-En6. Saber qué ejercicios dejarles de deberes para que practiquen *(saber qué dejarles de deberes terminar el ejemplo que no dio tiempo a terminar en la clase (resolver el sistema por reducción); o ejercicios sobre temas que han visto, para que practiquen y repasen los últimos temas vistos en clase).* [12.3] (429-432); [14.3] (560-561); [15.2] (398-401).

Ayudas
CC-En8. Saber que una "buena" estrategia para que los estudiantes comprendan o hagan un ejemplo, ejercicio o problema, consiste en explicarles o hacerles hincapié en lo que quiere que hagan y para qué quiere que lo hagan o simplemente explicarles de lo que trata el ejercicio o problema *(saber que es bueno remarcarles que no pierdan el verdadero objetivo del problema: discutir el sistema según los valores de a y clasificarlo; orientarlos sobre lo que tienen (la Adj A) y lo que hay que hacer para continuar el proceso para calcular* A^{-1} *(calcular* $(AdjA)^t$ *y después* $(AdjA)^t/|A|$*); saber que es bueno hacerles notar que en este ejercicio (sistema homogéneo) se trata de un SCI con un parámetro para que los estudiantes tengan una idea de cómo se va a solucionar ese sistema).* [14.1] (100-101); [14.2] (451-452); [15.1] (115-118).

CC-En9. Saber cómo señalar a los estudiantes algún dato del problema que no aparece explícito y que luego se usará para dar solución a un ejercicio o resolver un problema *(saber cómo señalar el hecho de que en la matriz ampliada la primera columna y la tercera son iguales (pues de ser así, el determinante de la ampliada es cero y entonces el rango de la ampliada es dos)).* [14.1] (168-169).

Gestión de la participación.
Respuestas
CC-En16. Saber qué respuestas de los estudiantes aceptar, cuáles interrumpir, cuáles ignorar o cuáles destacar, para alcanzar los objetivos de la enseñanza del contenido trazados por la profesora para esa clase *(saber qué respuestas aceptar y orientar la respuesta del estudiante para conducir dicha respuesta a lo que el profesor explicará posteriormente: ignorar la respuesta de E8 que es incorrecta y que no aporta nada a la explicación que Aly está dando; aceptar la respuesta de E1 para encontrar el valor de*

una incógnita por Cramer; callar a E1 porque su respuesta es incorrecta y no aporta nada a la respuesta correcta del ejercicio (E1 dice que el sistema entonces no es compatible pero se trata de un SCI); ignorar la respuesta de E1 a pesar de ser correcta (que el rango de la matriz de coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada) para continuar haciendo el ejercicio, posteriormente, al escuchar Aly la justificación de la respuesta de E1 (que la columna de los términos independientes es igual a la anterior cambiada de signo, lo cual hace que el rango de la matriz de coeficientes sea igual al de la ampliada) que ella ignoró por un momento, la acepta y la retoma para mostrarles a todo el grupo por qué el rango de la matriz de coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada). [11.1] (10-17); [11.2.1] (282-283); [12.1] (51-54); [12.2] (186-187), (201-225).

CC-En17. Saber cómo orientar una respuesta correcta a un lenguaje matemático aceptado en la matemática escolar, es decir, atendiendo o enfocado a una convención matemática *(saber cómo orientar la respuesta del estudiante (E5) a una convención matemática del contenido, es decir, E5 dice el orden de la matriz de coeficientes pero primero dice las columnas y luego las filas (2x3), entonces Aly acomoda la respuesta y remarca que el orden es de 3x2).* [11.1] (10-16).

CC-En19. Saber cómo aprovechar la respuesta de un estudiante, corregirla y utilizarla para explicar algún aspecto del contenido *(corregir la idea equivocada del estudiante E3, E3 pensaba que no era necesario hacer el $|A_z|$, porque daba 0, idea errónea de E3 que justificaba que debido a que en la demostración de la regla de Cramer había un paso (para llegar a la expresión $|A_x|=x|A|$) en el que varios determinantes daban 0 (porque existía proporcionalidad entre dos columnas) entonces el $|A_z|=0$; corregir la respuesta de E1, E1 dice que es incompatible porque el rango de A va a ser menor que el número de incógnitas, Aly interpreta que E1 lo que intenta decir es que el sistema homogéneo va a salir compatible indeterminado, pero que compatible indeterminado es distinto de incompatible)*. [11.2.3] (524-532); [15.1] (90-92).

CC-En21. Saber cómo aprovechar las respuestas de los estudiantes, aportadas en la discusión que se presenta en el grupo para hacerles notar algún aspecto incorrecto del contenido *(corregir el lenguaje matemático de los estudiantes (E1 ha dicho que una columna es inversa de otra y Aly le comenta que no inversa sino opuesta, en este caso $C_3=-C_2$)).* [12.2] (159-161).

Preguntas y respuestas

CC-En22. Saber cómo transferir e interpretar la pregunta y/o respuesta de un estudiante y luego contestar a forma de explicación para todos los estudiantes *(saber cómo interpretar las preguntas y respuestas de E1, Aly transfiere el lenguaje común de E1, es decir, su pensamiento matemático a lenguaje matemático, E1 pregunta si ese SCI se puede resolver por reducción, pero en su primera intervención, pregunta si lo puede resolver por Gauss [E1: "Una pregunta, si por ejemplo se suma o yo lo quisiera resolver por Gauss ¿se puede?", Aly: "Claro, lo hemos hecho ¿no?", E1: "Si pero me refiero por ejemplo a x-y, a la primera fila y la segunda fila". Aly: "Ah tú dices aplicar una reducción". E1: "Sí, si"]; Aly interpreta lo que dice E4 y luego responde explicando porque el sistema es incompatible (porque el rango de la matriz A es distinto del rango de la matriz ampliada); explicarles porque quita la tercera ecuación del sistema (porque el rango de la matriz de coeficientes no es tres sino dos, entonces deja las dos ecuaciones con las que obtuvo rango dos); explicarles la condición para* *quitar una ecuación del sistema de 3x3 para resolverlo (garantizar que no existe rango tres y quedarse con las dos ecuaciones con las que se obtuvo rango dos); explicarles que si el sistema de 3x3 tiene a lo más rango dos, lo importante es quedarse con las ecuaciones del menor de orden dos cuyo determinante es distinto de cero, independientemente del orden, es decir, no importa si es la primera y la segunda ecuación o la segunda y la tercera ecuación; comentarles que pueden escribir sólo el valor del adjunto, si no desean escribir todos los cálculos, pero que se fijen bien en el signo que queda; interpretar lo que está pensando E1, E1 pregunta que si el sistema homogéneo es incompatible, pero al justificar E1 su respuesta (E1 dice que es incompatible porque el rango de A va a ser menor que el número de incógnitas), Aly interpreta que E1 lo que intenta decir es que el sistema homogéneo va a salir compatible indeterminado).* [12.2] (278-284); [14.1] (135-148), (211-215), (216-219), (233-243); [14.2] (413-416); [15.1] (90-92).

Para que hagan los ejercicios

CC-En23. Saber cómo gestionar la participación de los estudiantes para que participen activamente y hagan el ejercicio o problema y que no sólo copien lo que ella hace *(saber que los estudiantes también deben participar activamente en clase y no sólo copiar lo que ella escribe en la pizarra, Aly los invita a que calculen el* $|A_z|$ *que ya ha indicado, para que los estudiantes también hagan algo y no sólo copien lo que anota ella)*. [11.2.3] (520).

Traducir

CC-En25. Saber usar lenguaje común o más familiar a los estudiantes o una forma más explícita, más detallada, al explicar el contenido matemático para que los estudiantes lo comprendan "mejor" *(saber que los estudiantes entenderán "mejor" la definición de un sistema de Cramer si se las dice en lenguaje más familiar a los estudiantes; saber que si les dice el Teorema de Rouché-Frobenius en lenguaje más familiar para ellos, entenderán "mejor" lo que dice el teorema).* [11.2.1] (221-223); [14.1] (26-30).

Hacer notar/remarcar/destacar

CC-En26. Saber cómo (y cuándo) hacerles notar, remarcar, destacar o aclarar, puntualmente, lo más importante del contenido que está enseñando *(saber cómo remarcarles a los estudiantes que observen primero el problema, que se detengan un momentito antes de hacer nada y vean si existe alguna relación entre las filas o las columnas para ver si se puede aplicar una propiedad de los determinantes y no hacer todo el cálculo, pues de existir una combinación lineal entre filas o columnas el determinante vale 0; hacerles hincapié en que no importa tanto el valor exacto del determinante sino el hecho de que de cero o distinto de cero; comentarles a los estudiantes que la regla de Cramer es el método más práctico y más eficaz para resolver un sistema; hacerles notar parte de la estrategia para la demostración de la regla de Cramer, remarcarles que en el primer elemento de la primera columna sólo han escrito lo que vale* C_1 *en términos de la ecuación (pues* $a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}t=C_1$*), es decir, les hace notar que ha escrito a* C_1 *como combinación lineal, lo cual es el punto clave en el* $|A_x|$*; remarcarles que en matemáticas es mejor demostrar cosas "largas" (extensas) con cuidado que las cortas, porque en una afirmación corta se tienen tan pocas cosas, tan pocos datos para trabajar que es más difícil, y no como las afirmaciones largas, en concreto, comentarles que no hay que asustarse al tener que resolver un problema que en apariencia es extenso; hacerles notar la proporcionalidad entre dos columnas del determinante para ver que entonces ese determinante vale 0 y* *que lo mismo pasa con los siguientes dos determinantes, de tal forma que hay tres determinantes que dan 0 y del determinante principal $|A_x|$ que tenían inicialmente ya sólo les queda un determinante menos extenso; hacerles notar que el término común que existe en la primera columna y que por tanto pueden usar una propiedad de los determinantes para sacar el término común (x) del determinante (si se multiplica un determinante por un número real, queda multiplicado por dicho número cualquier fila o columna, pero sólo una); hacerles notar que una cosa es hacer una demostración y otra hacer ejemplos concretos (con números específicos); remarcarles cuándo un sistema es sistema de Cramer, antes de empezar a hacer el ejemplo, es decir, les remarca eso para tener claro lo que hay que hacer en el ejemplo; hacerles notar que primero hay que ver que el $|A|\neq 0$ porque el $|A|$ aparece en el denominador de las expresiones $x=|A_x|/|A|$, $y=|A_y|/|A|$, $z=|A_z|/|A|$, es decir, para poder encontrar los valores de x, y, z respectivamente; hacerles notar por qué el ejemplo es un sistema de Cramer (que el número de ecuaciones coincide con el número de incógnitas y eso es igual al rango de la matriz de coeficientes e igual al rango de la ampliada), es decir, remarcarles eso antes de hacer propiamente el ejemplo; remarcarles lo útil que puede ser si primero buscan relaciones entre filas o columnas antes de empezar a hacer operaciones (Aly: … todo lo que veamos así - relaciones - es muy bueno porque nos evita hacer muchas operaciones del determinante, vale); hacerles notar la ventaja de que puede resultar más fácil resolver el sistema si el rango es dos y el número de ecuaciones y de incógnitas es cuatro; remarcarles que siempre tienen ahí (como reserva) el método de reducción (que se ve comúnmente en secundaria) para cuando lo quieran usar (cuando lo consideren útil); remarcarles que las incógnitas que van a quedar son las que están en la submatriz cuyo determinante es distinto de 0 y por tanto en este caso, eliminar la tercera ecuación y con ello la z pasa a ser parámetro; hacerles notar que este ejercicio no es diferente a los que han hecho en clase (como decía E5); remarcarles que es muy importante lo que les comenta, que en el valor del determinante no pueden cambiar el signo, pero cuando está igualada a cero la ecuación que representa el valor del determinante entonces sí; hacerles notar a E2 que no es conveniente usar la regla de Rufini para resolver ecuaciones de segundo grado y menos cuando las soluciones son fracciones o raíces; hacer énfasis en que es distinto que dos filas sean iguales a que sean linealmente dependientes, en este caso si a=1 entonces la primera y la tercera fila son iguales; hacerles notar que el rango de A es dos porque precisamente obtuvieron el valor de a=2 cuando igualaron el valor del determinante a cero para ver para qué valores se hacía cero ese determinante), por tanto, como a es uno de los valores para el cual el determinante de A es cero, entonces el rango de A es dos; remarcarles que en un sistema de 3x3 que tiene a lo más rango dos, independientemente de que con las dos ecuaciones que se queden sea la primera y la segunda o la segunda y la tercera (siempre y cuando garanticen el rango dos), la solución del sistema debe ser la misma; hacerles notar la importancia de estudiar el rango (en un sistema de 3x3, si queda rango uno pues habría una incógnita y dos parámetros, si queda rango dos entonces dos incógnitas y un parámetro); remarcarles que en un sistema compatible indeterminado, el conjunto de infinitas soluciones les debe dar la misma solución (seleccionen el menor que seleccionen siempre y cuando elijan el menor de forma correcta –que el determinante sea distinto de cero); aclararles que no resolvieron el problema completo sino que sólo lo han resuelto para a=2; remarcarles la importancia del orden de las matrices para poder multiplicarlas, además les hace notar el orden (3x1) del que quedará la matriz resultante del producto $A^{-1}C$ en el ejemplo; remarcarles la importancia de identificar en un enunciado cómo les piden resolver un sistema, saber si hay que resolverlo de forma matricial o si es por Cramer, pues con base en eso* *podrían saber qué método hay que usar, comentarles que será de forma matricial, si dice resuelve el sistema de forma matricial, entonces hay que hacerlo de la forma $AX=C$, encontrar $X= A^{-1}C$ y de ahí obtener los valores de x, y, z; hacerles notar que hay que estudiar el rango para saber si el SH es determinado o indeterminado; remarcarles que es importante que se fijen en tomar el menor de orden dos que garantiza el rango dos, una vez que saben que se trata de un SCI y que tiene rango 2; hacerles notar que aunque no se vea fácilmente la dependencia lineal que existe entre las filas o las columnas, lo que importa es que el determinante de orden tres da cero; aclararles que no se puede hablar de determinante de A, porque A no es una matriz cuadrada, pero que van a calcular el determinante de la submatriz de A de orden tres para estudiar el rango de A (A es de orden 4x3); hacerles notar que como A no es una matriz cuadrada (A es de orden 4x3), entonces no está hablando en este caso del determinante de A, sino del determinante de la submatriz de A de orden 3; hacerles notar que ahora (el apartado d) del ejercicio) se trata de un sistema homogéneo de 3x4, para que noten que el orden de este sistema es contrario al del anterior (4x3); aclararle a E1 que si el rango de la matriz A no es el rango máximo, es decir, el rango A < número de incógnitas, eso no significa que el sistema sea incompatible; aclararle a E1 que un sistema homogéneo nunca va a ser incompatible y que lo que tienen que ver es si es determinado o indeterminado; hacerles notar que ahora se trata de resolver un sistema con tres incógnitas y un parámetro y les comenta a la vez que ya saben también el valor del determinante, para luego preguntarles qué método será conveniente usar para resolver el sistema, Aly quiere escuchar Cramer pero no le contestan eso, Aly insiste para ver si le dicen Cramer pero nada; hacerles notar que a pesar de que se trata de un SCI, al pasar la t como parámetro queda un sistema de 3x3 con determinante distinto de 0 y entonces se puede usar la regla de Cramer; hacerles notar que existe rango 2 aunque en otro menor de una submatriz que no habían tomado anteriormente en clase (Aly: … con la submatriz de orden 2 formada por los 2 últimos elementos de la segunda y tercera fila y de la segunda y tercera columna vemos que hay rango 2 ¿os fijáis?), comúnmente en los ejercicios anteriores obtenían rango dos con la submatriz formada por los dos primeros elementos de la primera y segunda fila y columna; hacerles notar que les quedará la solución en forma genérica, es decir, en términos del parámetro a (pues normalmente, al dar la solución de un SCD los estudiantes están acostumbrando a que les quede un número concreto); hacerles notar que cuando calcularon el determinante de la matriz A y vieron para qué valores ese determinante vale cero, precisamente encontraron que uno de esos valores es a=2, entonces A no puede tener rango 3 pero si rango 2, lo cual se puede ver con el determinante de la submatriz de orden 2 formada por los dos primeros elementos de las dos primeras filas y columnas, que es distinto de 0, y que por tanto lo que hay que averiguar es el rango de la ampliada; hacerles notar que también podrían trabajar con el menor que comúnmente han trabajado en ejercicios anteriores pero que ahora tomará otro menor, en este caso Aly, a diferencia de otras ocasiones, toma una submatriz diferente, normalmente siempre toma la submatriz de orden 2 formada por las primeras dos filas y columnas y ahora tomó la submatriz de orden 2 formada por los dos elementos de la segunda y tercera filas y columnas; hacerles notar que pueden tomar un menor u otro para estudiar el rango de la matriz (siempre y cuando el menor cumpla que su determinante sea distinto de cero), pero lo importante es estudiar el rango).* [11.1] (38-40), (99-101), (175-176), (185); [11.2.1] (209-210); [11.2.2] (321-324), (365-370), (405-419), (420-428), (462-464); [11.2.3] (472-474), (475-477), (491-493); [12.2] (181-183), (237-239), (296-299); [12.3] (415-420); [14.1] (35-40), (44-56), (76), (85-91), (121-124), (159-163), (239-243), (244-246), (254-262), (281-282); [14.2] (474-482), (492-496); [14.3] (534-537); [15.1] (19-20), (21-23), (43-45), (53-55), (74-76), (84-86), (87-89), (129-140), (143-155); [15.2] (224-228), (270-274), (301-328), (368-373), (390-397).

Forma de presentarlo/representarlo o Estrategia didáctica
CC-En34. Saber cómo remarcarles los aspectos más relevantes del contenido para concluir un ejemplo o la presentación de un tema *(cerrar el ejercicio remarcándoles la utilidad del Teorema de Rouché-Frobenius; a forma de cierre de la demostración de la regla de Cramer, comentarles que la estrategia para calcular* $|A_z|$*, sería similar a la anterior (para calcular* $|A_y|$*) pero ahora se obtendría* $z=|A_z|/|A|$*; resumirles lo que han hecho, a lo que han llegado hasta ahora y lo que falta por hacer en este ejemplo (apenas han estudiado el rango de la matriz de coeficientes y de la ampliada y falta decir con base a eso qué tipo de sistema es y en su caso resolverlo; remarcarles lo que han obtenido hasta el momento (que* $X=A^{-1}C$*, que* $X=A^{-1}C$ *es otra forma de calcular el valor de las incógnitas, que para usar la forma* $X=A^{-1}C$*, el sistema debe ser cuadrado (de 2x2, 3x3, etc.); resumirles lo más importante de lo que han obtenido (las condiciones para aplicar* $X=A^{-1}C$ *y encontrar el valor de x, y, z: el sistema debe ser cuadrado, es decir, igual número de ecuaciones que de incógnitas y existir* A^{-1}*); comentarles la estrategia a seguir para resolver el problema (calcular* A^{-1} *para calcular* $X=A^{-1}C$*))*. [11.1] (180-181); [11.2.2] (459-460); [12.2] (226-229).

CC-En35. Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente *(resumirles lo que han hecho, a lo que han llegado hasta ahora lo que falta por hacer en este ejemplo (apenas han estudiado el rango de la matriz de coeficientes y de la ampliada y falta decir con base a eso qué tipo de sistema es y en su caso resolverlo); recapitular brevemente lo que han visto y lo que falta por ver (que han visto si a es distinto de uno y de dos, que son los valores que anulan el determinante, luego si a es igual a uno y a continuación van a estudiar lo que pasa si a es igual a dos); comentarles la estrategia a seguir para resolver el problema (calcular* A^{-1} *para calcular* $X=A^{-1}C$*); recapitula lo que se ha hecho hasta el momento (obtener* A^{-1}*) y lo que falta por hacer para resolver el sistema (hacer el producto* $A^{-1}C$ *para obtener el valor de x, y, z)).* [11.2.2] (434-435); [12.2] (226-229); [14.1] (151-153); [15.2] (294-297).

CC-En36. Saber cómo explicarles la utilidad, aplicación, dirección/orientación del contenido en temas siguientes *(saber cómo explicarles que se puede usar la regla de Cramer para un SCI)*. [12.2] (98-107).

CC-En37. Saber, tras la digresión en su discurso, rescatar la idea del contenido matemático que esté presentando *(después de mostrarles, paso a paso, que el sistema se puede escribir como AX=C, Aly retoma la idea principal del ejemplo: escribir el sistema en forma matricial AX=C para resolver el sistema).* [14.2] (340-342).

CC-En39. Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último *(hacerles notar la analogía del elemento neutro de los números reales y la matriz identidad en las matrices, aprovecha que los estudiantes tienen más trabajado el elemento neutro en los números reales)*. [14.2] (366-368).

CC-En40. Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución *(saber cómo explicarles la estrategia de "solución" del ejercicio (tienen la matriz de coeficientes y la matriz ampliada, lo que tienen que hacer únicamente es estudiar el rango de ellas y ver si los rangos de ellas coinciden porque entonces el sistema es compatible); saber cómo hacerles notar parte de la estrategia para la demostración de la regla de Cramer (remarcarles que en el primer elemento de la primera columna sólo han escrito lo que vale* C_1 *en términos de la ecuación (pues* $a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+a_{14}t=C_1$*), es decir, les hace notar que ha escrito a* C_1 *como combinación lineal, lo cual es el punto clave en el* $|A_x|$*); saber cómo explicarles la estrategia o parte de ella para hacer la demostración de la regla de Cramer, usar las propiedades de los determinantes (en particular: separar en sumas de determinantes la columna expresada en términos de combinaciones lineales, usar la propiedad de proporcionalidad entre columnas y usar la propiedad de sacar término común)); saber cómo explicarles la estrategia para calcular* $|A_y|$*, que sería similar a la anterior (para calcular* $|A_x|$*) pero ahora se obtendría* $|A_y|=y|A|$ *entonces* $y=|A_y|/|A|$*; saber cómo explicarles que la estrategia para calcular* $|A_z|$*, sería similar a la anterior (para calcular* $|A_y|$*) pero ahora se obtendría* $z=|A_z|/|A|$*; saber cómo explicarles la estrategia de solución en ejercicios de sistemas: primero hay que saber de qué tipo es el sistema al comparar el rango de la matriz de coeficientes con el de la ampliada; saber cómo explicarles la estrategia para usar Cramer (calcular el valor de x que es igual al* $|A_x|/|A|$*); saber cómo remarcarles la estrategia (siempre los términos independientes se colocan en la primera, en la segunda o en la tercera columna dependiendo de la incógnita que se busque), para indicar los determinantes que aparecen en los numeradores, para encontrar el valor de x, y, z con la regla de Cramer, es decir, para indicar los determinantes* $|A_x|$*,* $|A_y|$ *y* $|A_z|$*; saber cómo remarcarles la estrategia a utilizar cuando los estudiantes tengan que resolver un procedimiento de ese tipo, en este caso, saber escribir el sistema compatible indeterminado, saber explicar cuáles ecuaciones no participan en ese menor, que ha dado distinto de 0, quitar las ecuaciones que sobran y obtener las incógnitas, pasar las incógnitas que van a ser parámetros a la derecha y terminar el sistema como si fuera uno de orden 2; saber cómo explicarles la estrategia para resolver un SCI (estudiar el rango para saber con qué menor distinto de 0 es con el que se quedan, ver las incógnitas que participan en ese menor, porque son con las que van a resolver el sistema; saber cómo explicarles la estrategia, lo que tienen que hacer para resolver el problema (estudiar el rango de la matriz y en su caso ver para que valores da cero el determinante de la matriz); saber cómo explicarles la estrategia a seguir para resolver el problema (calcular* A^{-1} *para calcular* $X=A^{-1}C$*); saber cómo explicarles otra parte de la estrategia de solución (quedarse con las ecuaciones del menor que garantiza rango 3 y desplazar la t a la derecha); saber cómo explicarles parte de la estrategia a seguir al hacer este tipo de ejercicios, una vez que se tiene el valor del determinante en términos del parámetro, hay que ver para qué valores ese determinante se hace cero).* [11.1] (22-25); [11.2.2] (321-324), (329-331), (448-458), (459-460); [12.2] (119-123), (276-277), (311-313), (369-374); [12.3] (380-383); [14.1] (35-40); [14.2] (393-394); [15.1] (94-95), (119-122); [15.2] (232-234), (244-250), (376-380).

CC-En41. Saber qué es lo que hay que repetir y cómo, para aclarar dudas del contenido a los estudiantes o reafirmar algunos aspectos del contenido *(repetir el proceso de calcular la inversa por adjuntos. Aly decide repetir el proceso por los estudiantes que no asistieron la clase anterior, escribiendo paso a paso el procedimiento para calcular la matriz inversa con la expresión* $A^{-1}= (AdjA)^t/|A|$*)*. [14.2] (386-464).

CC-En42. Saber cómo usar la comparación entre algunas formas de hacer un ejercicio o entre varias representaciones, para destacar a los estudiantes los aspectos del contenido en los que se deben fijar *(decidir resolver el sistema por el método de reducción y por Cramer para que se fijen que tienen dos alternativas para resolverlo; comentarles que pueden usar un "truco" para resolver la ecuación de segundo grado sin necesidad de usar la fórmula general, pero que si se sienten perdidos pues entonces usen la fórmula general, es decir, les da dos alternativas de solución)*. [12.2] (300-301); [14.1] (63-68); [15.1] (174-176).

CC-En45. Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan "mejor" el contenido que presenta, saber cómo evocar un concepto(s), un ejemplo, ejercicio, problema o procedimiento equivalente visto(s) o hecho(s) anteriormente, para presentar un nuevo concepto o un ejemplo del nuevo concepto, para que los estudiantes traigan a la mente ese contenido o se hagan una idea de cómo se resuelve el nuevo problema *(saber cómo evocar un tema equivalente (SCI que resolvieron con el método de Gauss) para que ellos comprendan mejor lo que les acaba de decir (que se trata de resolver un SCI como los que habían resuelto antes por Gauss); evocar el elemento neutro en los números reales y entonces comentarles la analogía entre el elemento neutro de los números reales y la matriz identidad en las matrices para que los estudiantes entiendan "mejor" la funcionalidad de la matriz identidad en las matrices; evocar un procedimiento equivalente para que los estudiantes tengan una idea de lo que van a hacer ahora).* [12.2] (241-242); [14.2] (366-368); [15.2] (349-350).

CC

CC1. Saber qué contenidos aparecen y cómo están organizados en el libro de texto *(saber que la regla de Cramer y cómo orlar una matriz para obtener el rango, son contenidos que aparecen en el libro de texto)*. [11.2.1] (214-220); [12.2] (110-112), (137-140).

CPG

CPG3. Conocimiento y habilidad discursiva para motivar, re-encomendar o exigir a los estudiantes que hagan una demostración, los ejemplos o los ejercicios (para hacer en clase o de deberes) *(incitarlos a que hagan los deberes y así no tengan tanto problema cuando hagan el examen; animarlos a que en la demostración de la regla de Cramer, aunque vean que en apariencia tienen que calcular un determinante muy amplio ($|A_x|$ expresado en la primera columna con combinaciones lineales), cuentan con propiedades de los determinantes para calcularlos más rápido; animarlos a seguir haciendo la demostración, que no se espanten porque en apariencia vean que el determinante que está quedando $|A_x|$ es muy amplio; animarlos al hacerles ver que en un principio es largo de escribir el $|A_x|$, pero luego hay tres determinantes que dan 0 y entonces sólo les queda uno menos extenso; animarlos para que hagan la demostración de la regla de Cramer; invitarlos a que practiquen y hagan los ejercicios; motivarlos a que vean que un ejercicio es interesante (haciéndoles un comentario); invitarlos a que* *no sólo vean los ejercicios sino que los hagan, los invita a que los hagan para que se equivoquen y así aprendan de sus errores).* [11.1] (72-73); [11.2.2] (329-331), (370), (417-419), (441-442); [14.1] (264-267); [15.1] (124-126), (189-191); [15.2] (398-401).

CPG4. Conocimiento y habilidad discursiva para preguntarles si les ha quedado claro lo que acaban de hacer, si tienen más dudas; para ver si van entendiendo lo que han visto; para acercarse al lugar de los estudiantes cuando levantan la mano porque tienen alguna duda o porque ponen cara "rara" *(preguntarles a los estudiantes ¿qué pasa? cuando los ve con cara de duda; hacerles preguntas como: ¿Queda claro esto?, ¿esto lo entendéis todos?).* [11.2.2] (332); [15.2] (237), (311).

CPG7. Conocimiento y habilidad para acercarse a revisar lo que han hecho los estudiantes y cómo lo han hecho *(hacer algunas preguntas a los estudiantes para saber los procedimientos que ellos usaron y los resultados que ellos obtuvieron en los dos apartados de ese problema).* [14.1] (6-282); [15.1] (1-218), [15.2] (219-401).

V.2. Explicación de cada caso

Para explicar el caso de Emi y luego el caso de Aly, recurrimos, además de la información de las clases grabadas, a las notas de campo, a la entrevista y a cuestionarios, con la finalidad de triangular los datos y explicar lo mejor posible cada uno de estos dos casos.

V.2.1. El caso Emi

Para explicar el caso de Emi hay que retomar que se trata de una profesora licenciada en Matemáticas, con 21 años de experiencia, que imparte el curso de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II en el último año de bachillerato, a estudiantes de la especialidad de Ciencias Sociales[5], con la característica de que en ese curso hay una estudiante (E9) con deficiencia visual muy severa. Las transcripciones de las clases grabadas corresponden al tema de Álgebra[6], que incluye 3 subtemas: matrices, sistemas de ecuaciones lineales y programación lineal.

[5] En bachillerato los estudiantes pueden elegir una de varias especialidades: científico-tecnológico, ciencias de la salud, ciencias sociales, humanidades, música o artes.

[6] Durante el curso se imparten 3 temas: Álgebra, Análisis y Probabilidad y Estadística con una duración aproximada de 3 meses para cada tema, 4 clases de 50 minutos a la semana.

A continuación pretendemos explicar este caso de cara a la pregunta de investigación, es decir, respecto al conocimiento matemático para la enseñanza que pone en juego la profesora en la práctica.

En cuanto a los subdominios del conocimiento matemático para la enseñanza identificados en el caso de Emi, podemos decir que en lo referente al *conocimiento común del contenido*, hay dos momentos centrales en los que este conocimiento se pone en juego. En primer lugar, se activa al presentar una propiedad, regla, método, teorema o definición de un concepto, en el que se pueden activar los descriptores referentes a saber la definición de un concepto, regla, propiedad, método o teorema que está presentando, y a saber usar los términos y la notación matemática formal (que aparece en las definiciones formales). En segundo lugar, cobra relieve al hacer o revisar un ejemplo o ejercicio en el que puede poner en acción los descriptores referentes a saber la operatividad, propiedades (en cuanto a su uso), utilidad o aplicación de un concepto.

Además hay otro descriptor que puede activar en cualquiera de esos dos momentos: saber que la notación es muy importante en matemáticas y que por ello se debe anotar matemáticamente con precisión todo lo que se haga. Cabe mencionar que el orden de los momentos puede ser indistinto, es decir, en algunas ocasiones primero dar la definición del concepto y luego el ejemplo o viceversa.

En cuanto al *conocimiento especializado del contenido* de Emi, podemos decir que está más relacionado con la causa matemática de los errores comunes de los estudiantes y con conocer aspectos matemáticos de especial importancia para la enseñanza, lo que le permite hacer notar o distinguir la importancia de un aspecto matemático específico para enseñar el contenido matemático, lo cual puede guardar correspondencia con el conocimiento matemático a usar en la enseñanza adquirido a través de sus 21 años de experiencia impartiendo cursos de Matemáticas.

Obtuvimos muy poca evidencia del *horizonte matemático*, sólo tres descriptores y muy débiles, en el sentido de que están muy próximos al *conocimiento común del contenido*, pues uno de ellos se refiere a conocer las similitudes (relaciones) entre varios conceptos de subtemas pertenecientes a un mismo tema. Es decir, si bien es cierto que Emi conoce la relación entre esos conceptos, ese *horizonte matemático* es muy cercano, “no es tan *horizonte"*, por ser conceptos de subtemas del mismo tema. Otro descriptor consiste en saber que un contenido está relacionado con otro más general que no se ve en la especialidad de bachillerato de Ciencias Sociales pero sí en otra especialidad, Científico Tecnológico. Emi sabe de esta relación porque en cursos anteriores ha impartido cursos en la especialidad de Científico Tecnológico. El tercer descriptor, saber la aplicación del concepto en otras áreas, corresponde al *horizonte matemático,* por tratarse de conocer la relación del concepto que está enseñando con otras áreas, pero es débil en el sentido de que se trata de un curso de matemáticas enfocado a las ciencias sociales y en la propia programación aparece la propuesta de ver aplicaciones del concepto en las dos áreas que Emi lo aplica (Sociología y Economía).

En los descriptores del *conocimiento del contenido y estudiantes*, pudimos hacer una distinción entre ellos, y en el caso de Emi podemos comentar que contamos con la evidencia de varios de ellos. Emi muestra capacidad para escuchar e interpretar el conocimiento o pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje usual, normalmente cuando los estudiantes participan oralmente, expresan su pensamiento o razonamiento matemático utilizando su lenguaje (usual o en el proceso de adquisición del nuevo concepto - mezcla de lenguaje matemático y lenguaje común). La profesora, al escuchar el discurso de sus alumnos, lo interpreta y lo guía para llegar a las palabras que ella desea en la presentación del contenido.

Ella conoce las necesidades y dificultades de los estudiantes, especialmente las necesidades y dificultades de E9 para entender y seguir lo que ella va explicando. Esto influyó para que Emi tomará como recurso el libro de texto[7] a la hora de explicar el subtema de programación lineal, ya que sabe que a E9, por su deficiencia visual, le costará mucho trabajo visualizar y entender los problemas de programación lineal,

[7] En el caso de Emi, se puede decir que en los otros dos subtemas (matrices y sistemas de ecuaciones lineales) no sigue fielmente ningún libro de texto, porque como lo menciona en la entrevista, le gusta dar los contenidos a su manera; sin embargo, considera que es cómodo tener un libro de texto a mano para poner algunos ejemplos o mandar tareas para casa, además de ser un instrumento que le sirve al estudiante como guía y complemento de los apuntes que tome en clase, para que pueda reflexionar con más calma los contenidos abordados en clase; por eso ella y los estudiante tienen un libro de texto de referencia (Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, Segundo curso de bachillerato, Editorial: Guadiel-grupo Edebé).

debido a que habrá dibujos y gráficas. Por lo tanto, E9 necesita un apoyo para entender la explicación y, dado que E9 tiene el libro de texto en Braille, se aprovechará ese recurso. Durante todas las clases Emi se acerca constantemente a E9 para ayudarla y guiarla sobre el contenido matemático que está presentando.

Emi, habitualmente, como medida preventiva de cara a situaciones de errores comunes de los estudiantes, siente la necesidad de hacer una aclaración o comentario referente al contenido basándose en su conocimiento. Esto le permite prever una serie de circunstancias: la confusión que pudiera tener el alumno con algún aspecto del contenido que se esté viendo en clase; que los estudiantes no sepan o no recuerden un concepto o propiedad matemática; que los estudiantes se puedan quedar con una imagen inadecuada del contenido; que los estudiantes se equivoquen al no proceder ordenadamente respetando las convenciones matemáticas (eg. que no pongan las x´s debajo de las x´s, las y´s debajo de las y´s, ..., al escribir el sistema en forma matricial); que los estudiantes puedan hacer cálculos o procedimientos mecánicamente sin saber realmente lo que están haciendo; o que pueden equivocarse al hacer determinado cálculo de un número o de un signo por un despiste al hacer una operación o por no dominar el contenido que se les está presentando.

Además, la profesora sabe que a los estudiantes se les puede ocurrir una respuesta intuitiva para resolver un problema, y cuando esa respuesta intuitiva no es la más adecuada para resolver el problema, se lo hace saber y les explica las consecuencias que ello tendría en la solución del problema.

Emi prevé que los estudiantes no vean que un problema es equivalente a otro, lo cual, por analogía, podría facilitarles la idea de cómo resolver el nuevo problema; y prevé que los estudiantes divaguen definiendo más variables de las que necesitan para resolver un problema y por ello no logren resolverlo (a ella le interesa que los estudiantes no "pierdan el tiempo" divagando en definir varias variables, sino que se centren en resolver todos los problemas de programación lineal con dos variables, y así se lo hace saber).

Ella sabe que los estudiantes pueden resolver fácilmente alguna parte operacional del procedimiento (algún sistema de ecuaciones, alguna ecuación de segundo grado, algún determinante) y por ello sólo anota el resultado de esas operaciones sin desarrollarlas[8]. Además, sabe lo que a los estudiantes les parecerá cansado y aburrido de un contenido matemático específico. Ella da por hecho que la teoría cansa y aburre a los estudiantes al presentar la teoría referente a un contenido y por ello trata de irlos motivando cuando se la presenta.

Podemos observar que la mayoría de los descriptores evidenciados del *conocimiento del contenido y estudiantes* de Emi se orientan, principalmente, a diversos tipos de errores que pudieran cometer los estudiantes por diversas causas (confusión, imagen inadecuada, errores al hacer cálculos o procedimientos mecánicamente, o errores provocados por despistes o descuidos). Sin embargo, también hay otros referidos a las dificultades o necesidades de los estudiantes; a saber escuchar e interpretar el conocimiento o pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje usual; a saber que a los estudiantes se les puede ocurrir una respuesta intuitiva para resolver un problema; a que los estudiantes no vean aspectos que les puedan servir para resolver más rápidamente o fácilmente un problema (eg. ver que un problema es equivalente a otro o que el problema se puede resolver con tan sólo dos variables); a saber que los estudiantes pueden resolver fácilmente alguna parte operacional del procedimiento y por ese motivo sólo anota el resultado de esas operaciones sin desarrollarlas; o a saber lo que a los estudiantes les parecerá cansado y aburrido de un contenido matemático específico.

En cuanto a la información obtenida del *conocimiento del contenido y enseñanza* establecimos algunas "categorías" o agrupamientos de los descriptores respecto a un "*issue*": *Ejemplos; ayudas; gestión de la participación; traducir; hacer notar o remarcar; alertar; preparar actividades y forma de presentar o representar.*

En cuanto a los *ejemplos*, Emi sabe con qué ejemplo o ejercicio empezar, cuándo y cuáles usar para enfatizar, reforzar o generalizar cierta idea matemática; sabe que una de las potencialidades de un ejemplo, explícitamente al desarrollar el ejemplo, es verlo

[8] Cabe mencionar que en esta investigación nuestro objetivo es identificar y comprender el conocimiento matemático para la enseñanza que pone en acción el profesor directamente en la práctica y no propiamente, si es el "mejor o más adecuado", esto sería una discusión para otra investigación.

como instrumento para destacar los aspectos relevantes del contenido matemático que pretende enseñar ese día en clase; sabe que la aplicación del concepto en un ejemplo le es útil para inducir luego la definición del concepto; sabe qué ejercicios dejarles de deberes para que practiquen.

Respecto al *"issue" ayudas*, Emi sabe qué ayudas dar a los estudiantes en situaciones de confusión o dificultad, para que puedan dar solución a un ejercicio o resolver un problema; cuando los estudiantes están resolviendo un problema, sabe cómo señalar a los estudiantes algún dato del problema que no aparece explícito y que luego se ocupará para dar solución a un ejercicio o resolver un problema. Y, además, sabe que una "buena" estrategia para que los estudiantes comprendan o hagan el ejemplo, ejercicio o problema, consiste en explicarles o hacerles hincapié en lo que quiere que hagan y para qué quiere que lo hagan o simplemente explicarles de lo que trata el ejemplo, ejercicio o problema.

Ella sabe que a los estudiantes les puede quedar más claro cierto aspecto del contenido si usa un ejemplo concreto, en lugar de ponerse a desarrollar una propiedad de forma general o un ejemplo genérico. Sabe que al explicar un ejemplo o ejercicio es importante que los estudiantes vean que los resultados obtenidos del ejemplo o ejercicio tienen un significado concreto.

Otro *"issue"* se refiere a la *gestión de la participación*, en cuanto a promover la participación de los estudiantes para fomentar y orientar su aprendizaje al contenido matemático que desea enseñarles. De lo evidenciado al respecto, distinguimos principalmente dos subcategorías: preguntas y respuestas. Respecto a preguntas, Emi sabe qué *preguntas* formular al explicar el contenido matemático, para hacerles ver que es equivocada la respuesta del estudiante y orientar las preguntas a la respuesta que ella quiere escuchar. Se sirve de este mismo recurso para presentar un nuevo concepto, una nueva propiedad o la clasificación de sistemas de ecuaciones. También se apoya en esta misma técnica para involucrar a estudiantes pasivos, es decir, sabe qué preguntas formular sobre el contenido a un estudiante que normalmente no participa en clase; o para gestionar por lo menos una participación pasiva de los demás estudiantes, cuando existe un diálogo entre el profesor y un determinado estudiante, para que se planteen el porqué de lo que se va exponiendo en el diálogo. En la misma línea, aplica la estrategia de preguntas para ir guiando la solución de un ejemplo o ejercicio, resolver un problema o hacer una representación gráfica. Además, sabe qué preguntas formular, no necesariamente a cierto estudiante, para presentar o mostrar específicamente lo más importante del contenido que está enseñando (algunas veces las contesta ella misma y otras los estudiantes).

Pudimos observar también que Emi sabe qué *respuestas* de los estudiantes aceptar, cuáles interrumpir, cuáles ignorar o cuáles destacar, para alcanzar los objetivos de la enseñanza del contenido trazados por ella para esa clase. Sabe cómo orientar una respuesta correcta a un lenguaje matemático aceptado en la matemática escolar, es decir, atendiendo o enfocado a una convención matemática (el profesor debe saber cómo transferir las respuestas correctas sobre el contenido matemático expresadas por los estudiantes en lenguaje común a lenguaje matemático, eg. cuando Emi pregunta cuántas soluciones tiene un sistema compatible indeterminado, E2[9] responde que muchas soluciones, Emi interviene y trata de explicarles que la idea es adecuada pero que matemáticamente se diría infinitas soluciones). Sabe cómo aprovechar las respuestas incorrectas de los estudiantes para hacerles ver las consecuencias de éstas en el contenido matemático; para corregirlas y utilizarlas para explicarles algún aspecto del contenido o para corregir la de otro estudiante. También sabe cómo aprovechar la discusión que se presenta en el grupo con la intervención de varios estudiantes para hacerles notar algún aspecto incorrecto del contenido.

Definimos otro *"issue"* con la etiqueta *traducir,* en cuanto a convertir. A este respecto, Emi sabe cómo *"traducir"* a los estudiantes la actividad matemática presentada por otro estudiante o cómo "traducir" alguna actividad matemática del libro de texto al lenguaje usual del alumnado, aparte de saber emplear un lenguaje común o más familiar a los estudiantes o una forma más explícita, más detallada, al explicar el contenido matemático para que los estudiantes lo comprendan "mejor".

Respecto al *"issue" hacer notar o remarcar*, Emi sabe cómo hacerles notar, remarcar, destacar o aclarar, puntualmente, lo más importante del contenido que está enseñando. Por ejemplo, sabe cómo hacerles notar la importancia de algún aspecto característico del

[9] E2 es la etiqueta correspondiente al estudiante número 2.

método, propiedad, regla o concepto que presenta; y también de aspectos relevantes de un problema o de la similitud que existe entre distintos conceptos, y en ocasiones, cuando así lo estima oportuno, les hace notar varias veces, de manera puntual, lo más sustancial del contenido.

En cuanto al *"issue" alertar*, Emi sabe cómo hacerles señalamientos sobre errores que cometieron algunos estudiantes en el examen, para *alertar* a los demás sobre los errores que se cometen y de alguna forma prevenirlos de ese error. También sabe cómo plantearles una situación hipotética para prevenirlos de error, se adelanta al posible error y luego los pone en una posible situación de riesgo en la que pueden cometer error, de tal suerte que se prevengan los errores por parte de los alumnos.

Agregamos otro *"issue"* que denominamos *preparar actividades.* En lo concerniente a él, Emi sabe cómo preparar un compendio de actividades a los estudiantes para que afiancen el contenido matemático que les está enseñando. Por ejemplo, sabe cómo prepararles un compendio de ejercicios y posteriormente de sus soluciones[10] para que practiquen y ensayen antes del examen, ejercicios propuestos -como los que aparecen comúnmente en los libros de texto-, además de ejercicios modelo de exámenes anteriores. Posteriormente les prepara la solución a esos ejercicios detalladamente para que comparen si lo hicieron bien. Ella considera que, en parte, esa es una forma de vencer las dificultades que tengan los estudiantes en la resolución de ejercicios o de problemas, porque no sólo pueden comparar sus soluciones con las que ella les prepara, sino que además se corrige el mayor número posible de esos problemas en la pizarra, a lo que hay que sumar que se hace hincapié en cómo resolver el problema.

Al último *"issue"* lo llamamos *formas de presentar o representar el contenido*, Emi presenta evidencia de conocimiento sobre distintas formas de presentar o representar el

[10] Emi comenta en la entrevista que ella intenta transmitirles que la mejor manera de aprender es enfrentarse uno mismo a los problemas solo, y a cuántos más problemas se enfrente y en cuanto más difíciles sean mejor, o por lo menos abarcar una amplia gama de problemas, lo cual requiere un trabajo personal en casa y por ello siempre les manda tarea para casa, pero además de esa tarea obligatoria les da el compendio de ejercicios y posteriormente de sus soluciones.

contenido, utiliza distintas estrategias didácticas. A continuación, mencionamos los principales conocimientos de Emi evidenciados al respecto.

Ella conoce diferentes formas para introducir un tópico matemático. A veces, por ejemplo, introduce el tema con algún dato histórico o una breve reseña histórica del contenido matemático en cuestión para contextualizar un tema. En otras ocasiones, introduce un concepto mediante la relación de conceptos matemáticos vistos anteriormente, haciendo un recorrido deductivo en el que parte de lo general a lo particular, relacionando varios conceptos matemáticos familiares a los estudiantes (por ejemplo, empieza hablando del Álgebra pasando por sistemas de ecuaciones, grafos, hasta llegar a lo que le interesa, las matrices). Para ello usa la estrategia de pregunta-respuesta, con la que va relacionando unos conceptos con otros hasta llegar al deseado; y también presenta la definición de un concepto, por ejemplo, en forma genérica y no con números concretos.

Emi sabe cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan "mejor" el contenido que presenta. Sabe cómo evocar un concepto(s), un ejemplo, ejercicio, problema o procedimiento equivalente visto(s) o hecho(s) anteriormente, para presentar un nuevo concepto o un ejemplo del nuevo concepto, para que los estudiantes traigan a la mente ese contenido o se hagan una idea de cómo se resuelve el nuevo problema. Por ejemplo, sabe evocar las propiedades de las operaciones con los números reales para hacer una analogía (o una diferencia cuando sea el caso) con las propiedades de las operaciones con las matrices.

Además, ella sabe que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" o se harán una imagen concreta sobre algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante. Conoce la potencialidad de los esquemas gráficos para representar el contenido[11]. Echa mano de "poderosas" analogías para presentar o representar el contenido matemático; por ejemplo, sabe que al usar la analogía de un

[11] Y a su vez, aconseja a sus estudiantes que cuando vayan a plantear problemas no duden en usar esquemas y todo lo que consideren necesario para hacer el planteamiento del problema, que se atrevan a intentar resolverlo y se empeñen a encontrar la solución y no decir que no puedo sin intentarlo.

objeto matemático con un objeto común para aproximarse más al lenguaje usual de los estudiantes, puede hacer que los estudiantes logren entender "mejor" el significado de un contenido matemático. Asimismo, sabe usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual para explicar este último; por ejemplo, usa la analogía o diferencia entre las propiedades de las principales operaciones con los números reales y con las matrices para explicarles las propiedades de las principales operaciones con matrices.

Inclusive, durante la explicación del contenido matemático, Emi sabe cómo usar la "comparación entre algunas formas de hacer un ejercicio o entre varias representaciones, para destacar a los estudiantes los aspectos del contenido en los que se deben de fijar. Sabe cómo explicar una parte o toda la estrategia que utiliza para hacer una demostración o desarrollar un método, procedimiento o solución. Y cuando se extiende, es decir, tras la digresión en su discurso, sabe rescatar la idea del contenido matemático que esté presentando. Además sabe qué es lo que hay que repetir[12] y cómo, para aclarar dudas del contenido a los estudiantes o reafirmar algunos aspectos del contenido. Y sabe cómo dar más confianza a los estudiantes respecto al resultado que han obtenido del ejemplo o ejercicio (eg. comparando la solución que obtuvieron en el ejemplo con la del libro de texto para que los estudiantes sepan que pueden revisar ahí y con ello adquirir seguridad y confianza).

Ella sabe cómo remarcarles los aspectos más relevantes del contenido para concluir un ejemplo o la presentación de un tema –normalmente lo hace a forma de resumen o concentrado-. Sabe cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente. Y sabe cómo explicarles la utilidad, aplicación, dirección u orientación del contenido en temas siguientes.

En cuanto a los descriptores del *conocimiento curricular*, directamente de la práctica sólo obtuvimos evidencia de dos, referidos a saber qué contenidos aparecen y cómo

[12]Cabe señalar que Emi declara en la entrevista que los alumnos aprenden muchas veces por imitación, que a veces a uno le dicen cómo hacer las cosas y repite los mismos pasos y lo hace.

están organizados en el libro de texto y saber qué temas se deben ver posteriormente en el curso.

De la entrevista con Emi pudimos informarnos de que prepara ejemplos y ejercicios para los estudiantes apoyándose en consultas a distintas referencias bibliográficas y de internet. Los principales materiales curriculares consultados por Emi para este tema de Álgebra son: los temas del Currículo promulgado por la Consejería de Educación, libros de texto, internet, y el temario para el examen de selectividad propuesto por la Universidad[13].

Además de los subdominios del CME, podemos comentar algunos descriptores en relación al *conocimiento pedagógico general*. Empezamos comentando que Emi muestra conocimiento para controlar la indisciplina o distracción en el aula, para atraer la atención de los estudiantes o llamar la atención a los estudiantes cuando están haciendo cosas que no son de la clase. Además, manifiesta habilidad para tranquilizarlos y motivarlos, haciéndoles algún(os) comentario(s) cuando ve a los estudiantes agobiados, decepcionados de ellos mismos o preocupados por el trabajo de clase que tienen que hacer, o porque se consideren incapaces de aprender un procedimiento o un método para hacer ejercicios.

Para saber si les ha quedado claro el contenido abordado en clase, Emi usa algunas preguntas para sondear si persisten más dudas o si los alumnos van entendiendo lo que han visto, por ejemplo: "¿alguien ya se perdió?", "¿se fijaron cómo salen las cuentas?", "¿entonces qué os parece este método?" o "¿alguna duda más?". Además, normalmente se acerca al lugar de los estudiantes cuando levantan la mano porque tienen alguna duda o porque ponen cara "rara".

[13] En el último año de bachillerato, las profesoras tienen además, la encomienda de prepararlos para ese examen, y es la universidad la institución que realiza los exámenes de selectividad, y para ello se proponen unos objetivos y contenidos mínimos en cada uno de los diferentes contenidos de la asignatura así como los puntos principales que no deben faltar en el currículo, porque esos son los que después van a ser examinados.

Para terminar este apartado referente al *conocimiento pedagógico general*, queremos mencionar que Emi continuamente invita a los estudiantes a que hagan los ejercicios que les deja de deberes o que les propone para hacer en clase. En ocasiones, Emi les propone uno o varios ejercicios a los estudiantes, luego pasa a supervisar lo que van haciendo los estudiantes, y acude a los estudiantes que le solicitan ayuda para resolver los ejercicios. Posteriormente efectúa en la pizarra la puesta en común (explicar en la pizarra los resultados de los ejercicios), en la que participan algunos estudiantes. En otras ocasiones, pasa a los estudiantes a la pizarra a hacer los ejercicios que dejó de deberes y discutir o revisar las soluciones. Cuando la profesora ve que el estudiante tiene una solución errónea, interviene para comentarles la solución correcta. Ella toma en cuenta a los estudiantes que sí hicieron sus deberes al momento de revisar en clase algún ejercicio que había dejado de deberes (los pasa a la pizarra a que escriban la solución al ejercicio que hicieron o les va preguntando los resultados que obtuvieron), especialmente cuando sólo fue una estudiante la que hizo sus deberes, de alguna manera va controlando a la estudiante que hizo sus deberes para que también trabajen y participen los otros estudiantes.

A esos conocimientos evidenciados en Emi, queremos añadir algunas actitudes y creencias mostradas o expresadas explícitamente por Emi sobre la enseñanza y aprendizaje del contenido matemático que la distinguen y que pueden ayudar a comprender su caso.

Resulta destacable que Emi sabe presentar un método de solución de una manera muy uniforme[14] para que los estudiantes usen "exactamente" esa forma de aplicar el método posteriormente. Ella desea que los alumnos aprendan de manera uniforme[15], por

---

[14] Porque considera que es una forma que le funciona para enseñar los contenidos, por ejemplo, expresa en la entrevista que la representación de tablas y seguir un esquema muy concreto en el desarrollo de los problemas de programación lineal, hizo que desde un principio los estudiantes pudieran abordar esos contenidos sin demasiada dificultad.

[15] Emi menciona también en la entrevista, que ella intenta estructurar un poco el pensamiento de los estudiantes, porque supone que lo que tienen que aprender es a resolver problemas, entonces intenta que sigan unas pautas fijas y pensar no en abstracto sino pensar en qué situación están, contextualizar el problema, el ejercicio y recordar cuáles son las estrategias que se siguen en esa situación y seguirlas, es decir, aunque no sepan muy bien si se va a llegar al resultado correcto, sigan las pautas y lo hagan.

ejemplo, que aprendan que al hacer la traspuesta de una matriz A hay que cambiar de filas a columnas y no de columnas a filas, aunque dé como resultado la misma traspuesta. Una situación paradigmática al respecto se produce cuando E3[16] empieza a cambiar la primera columna de A como primera fila de A^t, tras lo cual Emi interviene y orienta la enseñanza a la forma uniforme que pretende que sus estudiantes aprendan o hagan. Esta forma uniforme de que aprendan los estudiantes se ve también cuando Emi pide a E13 que siga el orden que ella les ha enseñado para hacer el producto de dos matrices, primero multiplicar la primera fila de la primer matriz por cada una de las columnas de la segunda matriz, antes de empezar a multiplicar la segunda fila de la primera matriz por cada una de las columnas de la segunda; o cuando les enseña la estructura de solución a problemas de sistemas de ecuaciones lineales o de programación lineal. Emi confirma en la entrevista que a ella lo que le interesa es que los alumnos aprendan por lo menos de una forma uniforme o estructurada a su manera (de Emi), pero que la aprendan, es decir, al menos que aprendan una forma aunque sea uniforme pero bien.

Sin embargo, como contrapartida, hay ocasiones en las que afecta el pensamiento de los estudiantes. Por ejemplo, en la clase 13 (líneas 81-114), E1 quiere escribir la mayor parte de los datos del problema de programación lineal en la tabla de distribución (sin ser necesario). Eso, repercutió al definir incorrectamente la función objetivo, por la idea ya no sólo de seguir las etapas estrictamente en ese orden (que Emi les ha indicado), sino que E1 también quiere uniformizar las soluciones de los problemas, al grado de forzar los datos para que la escritura de los mismos y del procedimiento sea lo más similar posible a los anteriores. Acto seguido, Emi interviene (líneas 172-183) para aclararles que no siempre todos los datos del problema se deben incluir en la tabla de distribución, sino que se debe distinguir cuáles son útiles en la tabla de distribución o en las restricciones o donde se utilicen. Entonces, ¿podríamos decir también que detrás de una forma uniforme de enseñanza se limita o se acota el pensamiento matemático de los estudiantes?

[16] E3 es la etiqueta correspondiente al Estudiante número 3.

Por otra parte, Emi da evidencia contundente de su ética profesional, especialmente en el caso muy particular de E9[17], como ejemplo de su vocación de enseñanza. E9 tiene la peculiaridad de ser una estudiante que cuenta con una deficiencia visual muy severa y siempre muestra empatía con Emi por aprender (más que otros de sus compañeros que no tienen esa deficiencia). Emi continuamente, durante la clase, muestra interés especial por E9 (acercándose varias veces a ella para ayudarla), Emi ha construido y preparado materiales didácticos especialmente para que E9 aprenda el contenido, por ejemplo a hacer gráficas en el subtema de programación lineal pues E9 sabía leer las gráficas pero no hacerlas[18].

Emi comenta en la entrevista que ya antes sufría como profesora al tratar de que un estudiante al que no le guste estudiar aprenda matemáticas. Aunque a veces no lo logre, al menos trata de que cuando alguien quiere que le enseñe matemáticas, poner todo lo que esté de su parte. Sin embargo, enfatiza que ahora cree que conoce el verdadero sufrimiento como profesora, porque se le dificulta saber cómo enseñar a E9 programación lineal, sobre todo por las dificultades a las que se ha enfrentado, por ejemplo, enseñar a E9 a hacer gráficas sin material adecuado para ello, problema que se ve agravado por el hecho de que cuando dé las explicaciones del contenido tiene que estar pensando en que la persona que la está oyendo no ve la pizarra, lo cual aumenta el reto de enseñar matemáticas. En el libro de texto que E9 tiene en Braille se aborda el subtema de programación lineal, en el cual aparecen las gráficas hechas, pero el problema que Emi detecta es cómo enseñarla a hacerlas, pues en el examen de selectividad que E9 presentará al terminar este curso es demasiado probable que deba

[17] E9 es la etiqueta correspondiente a la estudiante número 9.

[18] En una de las ocasiones que Emi se acerca a ayudar a E9 para hacer la gráfica, E9 va marcando la escala, apoyándose del material que Emi le preparó (con una tabla de caucho y regletas de plástico), E9 va graficando cada una de las rectas que formarán la región factible (en un folio blanco en el que debe dibujar cada recta y segmento que haga (lo cual no es fácil para una persona con deficiencia visual muy severa), con un bolígrafo especial para ciegos (con el cual las rectas quedan tan resaltadas que se pueden palpar con los dedos) y con escuadras y reglas graduadas a Braille) y cuando ya tiene hecho eso, Emi pasa el dedo de E9 por cada una de las rectas y le va diciendo "si tiene que ser mayor igual es esto", "si tiene que ser menor igual es esto", para indicarle la región que se consideraría en cada uno de esos dos casos, es así como juntas van determinando la región factible para resolver el problema de programación lineal. Cabe mencionar que E9 mostró gran entusiasmo al **hacer** una gráfica por primera vez.

resolver un problema de programación lineal y ahí necesitaría hacer la gráfica y solucionarlo. Está claro que aun y cuando un profesor cuente con 21 años de experiencia cada día aparecen nuevos retos para **saber cómo enseñar matemáticas**.

Es notorio un tipo de conocimiento que pudiera no ser percibido en los subdominios del CME como tal, porque tal vez más que un conocimiento es un reconocimiento al trabajo del profesor. Durante los años de trabajo del profesor en enseñanza en el mismo instituto, a través de sus acciones y su empeño por preocuparse y ocuparse del aprendizaje de los estudiantes, va formando fama y con ello un respeto[19] por parte de los estudiantes. Eso puede influir positivamente en los estudiantes cuando el profesor les pide realizar un ejercicio y enseguida los estudiantes se ponen a trabajar. Posiblemente una de las razones del éxito de Emi en esa circunstancia se debe al respeto que ella se ha ganado como profesional, pues de lo contrario a los estudiantes tal vez les daría lo mismo y continuarían apáticos o fingiendo hacer el ejercicio. Atribuimos eso como éxito de Emi debido a que fue evidente el aumento de participación e implicación de los estudiantes en la resolución del problema de programación lineal[20].

Sin embargo, cuando Emi obtiene los resultados del primer examen, siente tristeza y decepción porque a pesar de que dedicó más tiempo del programado para explicar ese subtema, los resultados no fueron buenos (sólo uno de trece estudiantes aprobó). En un primer instante, le interesa averiguar las causas de la falta de éxito, por ello en la siguiente clase va cuestionando a cada uno de ellos cómo se preparó para el examen y después de escuchar sus respuestas, Emi se sobrepone y trata de concienciarlos de que deben estudiar mucho más. Tras ello, los informa de que, harán otro examen de

[19] La propia Emi reconoce el respeto que le tienen sus alumnos y considera que si el grupo no hubiera tenido ese respeto, posiblemente no le hubiese sido tan fácil manejar el salón de clase, o que tal vez se tendría que ganar el respeto trabajando más.

[20] Hay que aclarar que el respeto al profesor puede favorecer la actitud de los estudiantes para hacer un ejercicio (como puedo observarse); sin embargo, no lo soluciona todo, pues algunas veces ni eso hace trabajar a algunos estudiantes.

recuperación y seguirán repasando[21] el subtema antes de dicho examen. En el examen de recuperación todos aprobaron excepto E5 (quien no asistió a varias clases[22]). Emi se acercó a ella y acordaron que le aplicaría otro examen de recuperación. Esto puede ser una muestra de la preocupación por la motivación e interés por las matemáticas que Emi desea transmitir a sus estudiantes. Emi comentó en la entrevista que ella generalmente trata de poner todo lo que esté de su parte para que el alumno aprenda y que en E5 vio una esperanza y por eso trata de "rescatarla". Añade que sólo en casos que de plano son imposibles, son en los que desiste. Ella menciona también que lo que ella pretende siempre es transmitirles el gusto por las matemáticas, por el trabajo y el esfuerzo personal, que trata de ayudarlos en todo lo que puede y nunca les desanima, de tal forma que cuando ellos comprueban que tienen éxito se motivan ellos solos.

Más aún, Emi es conciente de que en el primer examen puede suceder que la mayoría de los estudiantes no apruebe el examen y que con ello los propios estudiantes se den cuenta de su fracaso, ante lo cual, ella les hace un examen de recuperación esperando obtener mejores resultados.

De lo anterior, habría que plantearse el papel que juega el examen de recuperación en la enseñanza de las matemáticas en bachillerato. Después del examen de recuperación Emi nota el cambio de actitud de los estudiantes hacia el aprendizaje de los contenidos.

Queremos destacar un dato importante que aporta Emi en la entrevista, ella expresa que para enseñar matemáticas, además de saber matemáticas y saber transmitirlas, hay que querer ser profesor, relacionando "querer ser profesor" con la vocación para ser profesor, que sienta gusto por enseñar matemáticas, porque

---

[21] El día del repaso, los estudiantes participan más y levantan su mano para ir preguntando a Emi si está bien lo que van haciendo y ella los felicita porque al menos su actitud es favorable y les comenta: "¡Suele aprenderse más de los fallos!"

[22] Inclusive, cuando un estudiante no ha asistido a algunas clases anteriores (por diversos motivos), Emi le ayuda desde la pizarra, explicándole paso a paso el ejemplo o ejercicio que esté presentando.

" [...] eso lo captan los alumnos y eso a los alumnos les trasmite una buena sensación, en el sentido de decir, pues no debe ser tan mala la matemática y a lo mejor no es tan malo aprender, entonces un poco como por contagio porque si a mi me gusta una cosa, intento que a los demás también les guste, entonces ese papel me parece que sí es importante" (Emi, entrevista)

Para cerrar este apartado, queremos mencionar que Emi comentó en la entrevista que a ella lo que la motiva a enseñar matemáticas a estudiantes de bachillerato es prepararlos para la universidad, ayudarles a cruzar el puente entre las matemáticas elementales que ellos conocen y las matemáticas superiores que tendrán que afrontar cuando lleguen a la universidad.

V.2.2. El caso Aly

Al igual que en el caso de Emi, para explicar el caso de Aly recurrimos tanto a la información de las clases grabadas, como a las notas de campo, la entrevista y los cuestionarios, con la intención de triangular los datos y dar cuenta de cada caso lo mejor posible.

Primero queremos comentar que Aly es una profesora con 13 años de experiencia, licenciada en Matemáticas, que imparte el curso de Matemáticas en el último año de bachillerato a 12 estudiantes de la especialidad Científico-Tecnológico[23]. Las transcripciones de las clases grabadas corresponden al tema de Álgebra[24], que incluye 3 subtemas: matrices, determinantes y resolución de sistemas de ecuaciones.

Atendiendo a la pregunta de investigación: *¿qué conocimiento matemático para la enseñanza pone en juego el profesor en la práctica?*, continuamos explicándola con el caso.

[23] Existen varias especialidades en bachillerato: científico-tecnológico, ciencias de la salud, ciencias sociales, humanidades, música o artes; de las cuales los estudiantes deben elegir una de ellas.

[24] En el curso se deben impartir 3 temas: Álgebra, Geometría y Análisis Matemático, con una duración aproximada de 3 meses para cada tema, 4 clases de 50 minutos a la semana.

De los subdominios del conocimiento matemático para la enseñanza identificados en el caso de Aly, iniciando con el *conocimiento común del contenido*, podemos afirmar que se distinguen dos momentos centrales en los que se activa. Uno consiste en presentar una propiedad, regla, método, teorema o definición de un concepto, donde se pueden activar los descriptores referentes a saber la definición de un concepto, regla, propiedad, método o teorema que está presentando, y a saber usar los términos y la notación matemática formal (que aparece en las definiciones formales). El segundo momento central se desarrolla al hacer o revisar un ejemplo o ejercicio o hacer una demostración de una regla o teorema. En ese segundo momento puede poner en acción una serie de descriptores referentes a: saber la operatividad, propiedades (en cuanto a su uso), utilidad o aplicación de un concepto; o saber hacer la demostración.

Existe otro descriptor que puede poner en acción en cualquiera de esos dos momentos: saber que la notación es muy importante en matemáticas y que por ello se debe anotar matemáticamente con precisión todo lo que se haga, de manera clara y organizada. Queremos destacar que en algunas ocasiones primero da la definición del concepto y luego el ejemplo, o viceversa, es decir, en ese sentido el orden de los momentos puede ser indistinto.

El *conocimiento especializado del contenido* (CEC) evidenciado de Aly está más orientado a saber la causa matemática de los errores comunes de los estudiantes y a conocer aspectos matemáticos de especial importancia para la enseñanza, lo que le permite hacer notar o distinguir la importancia de un aspecto matemático específico para enseñar el contenido matemático. Aly tiene 13 años de experiencia impartiendo cursos de Matemáticas, con lo cual su CEC puede corresponder al conocimiento matemático a usar en la enseñanza obtenido de su experiencia.

No hubo evidencia del *horizonte matemático* en las clases observadas, pero en la entrevista Aly muestra poseer un *horizonte matemático* muy cercano a los cursos que ella imparte. La afirmación anterior se basa en que ella sabe la relación que existe entre el tema de Álgebra y Geometría de este curso, por ejemplo al trabajar las posiciones relativas entre dos o tres planos desde el punto de vista matricial, o al visualizar en un plano sus ecuaciones. También relaciona sistemas de ecuaciones previamente estudiados en secundaria (sistemas de 2x2) con sistemas de ecuaciones estudiados en bachillerato (sistemas de orden 3x3 o más). Hay que considerar que ella imparte clases de matemáticas a estudiantes de secundaria y bachillerato en el mismo instituto.

Respecto a los descriptores del *conocimiento del contenido y estudiantes*, evidenciados en el caso de Aly, podemos comentar los siguientes. Aly sabe escuchar e interpretar el conocimiento o pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje usual, habitualmente cuando los estudiantes participan de forma oral, expresan su pensamiento o razonamiento matemático utilizando su lenguaje usual (común) o en proceso de adquisición del nuevo concepto (mezcla de lenguaje matemático y lenguaje usual) y Aly escucha el lenguaje común de sus estudiantes, lo interpreta y lo orienta al contenido que ella desea presentar en esa clase.

Ella sabe de las dificultades que pudieran tener sus estudiantes sobre el contenido matemático que presenta (en relación con operaciones de temas anteriores, eg. con operaciones algebraicas: operaciones con polinomios, factorización de estos y resolución de ecuaciones de grado ≥ 3). Igualmente, sabe que los estudiantes pueden atascarse en algunos detalles de la solución del problema y perder el sentido del mismo. Sabe también que algunos detalles en el proceso para llegar a la solución del problema implican el riesgo de parecer más importantes a algunos estudiantes, hasta el punto de desviar su atención hasta hacerles perder el sentido del problema, impidiendo que logren terminar de resolverlo.

Aly prevé la confusión que pudiera tener un alumno con algún aspecto del contenido que se esté viendo en clase. Igualmente, prevé que los estudiantes se pueden quedar con una imagen inadecuada del contenido, por ejemplo prever que los estudiantes pudieran suponer una idea errónea sobre alguna propiedad matemática que se cumple con los números reales pero no con las matrices; y que esa confusión o imagen inadecuada los puede llevar a una equivocación. Por esa razón, siente la necesidad de hacer una aclaración o comentario con posterioridad.

Ella sabe que los estudiantes son proclives a equivocarse al hacer determinado cálculo de un número o de un signo, provocado por un despiste al hacer una(s) operación(es) o por no dominar el contenido que se les está presentando (eg. saber que los estudiantes se pueden equivocar en los signos al calcular un determinante de orden 3). Además, sabe que los estudiantes podrían hacer cálculos mecánicamente sin saber realmente lo que están haciendo (eg. multiplicar por A inversa sin considerar si debe ser por la derecha o por la izquierda para despejar X de la ecuación matricial AX=C). También sabe que los estudiantes deben proceder ordenadamente respetando las convenciones matemáticas, que deben fijarse en acomodar adecuadamente lo que hacen o de lo contrario pueden caer en algún error (eg. sabe que al calcular la matriz inversa los estudiantes pueden equivocarse al colocar los valores resultantes de las incógnitas, es decir, que no tengan cuidado al acomodarlos adecuadamente en la posición inicial propuesta al plantear con esas incógnitas los elementos de la matriz inversa).

Asimismo, Aly sabe que los estudiantes pueden ponerse a hacer cálculos sin antes fijarse si pueden usar una propiedad y de esa forma terminar el ejercicio más rápidamente, porque no necesitarían hacer tantos cálculos, sólo justificar la propiedad que utilicen; además prevé que los estudiantes no vean que una igualdad la pueden usar en un sentido o en otro, es decir, prevé que los estudiantes pueden ver la igualdad de una propiedad o ecuación de izquierda a derecha pero no de derecha a izquierda.

Aly sabe que los estudiantes al resolver problemas extensos tienden a olvidar algún cálculo que ya habían realizado al inicio y no aprovecharlo cuando sea necesario nuevamente para solucionar el mismo problema. Es más, sabe que los estudiantes pueden resolver fácilmente alguna parte operacional (algún sistema de ecuaciones, alguna ecuación de segundo grado o algún determinante) del procedimiento y por ello algunas veces sólo anota el resultado de algunas operaciones, sin desarrollarlas.

Ella sabe que un tema será más comprensible para los estudiantes si se les presenta a través de un ejemplo concreto que aparece en el libro de texto, porque cuentan con dicho apoyo para estudiar tanto el ejemplo[25] como el tema en sí. Sabe también que en general al hacer ejemplos (no necesariamente del libro de texto), los estudiantes entenderán "mejor" el ejemplo si antes de empezar a hacerlo les remarca las principales características del concepto que se ilustrará con el ejemplo.

[25] Cuando en el libro de texto están muy simplificados los pasos, Aly intenta aclarárselos más en la pizarra.

Ella sabe que a los estudiantes les puede parecer extraño aplicar por primera vez una regla que estaba diseñada para otro caso o para otra situación del contenido, en particular, sabe que a los estudiantes les puede parecer extraño usar la regla de Cramer en un sistema compatible indeterminado y que por ello no la utilicen, a pesar de que se cumplan las condiciones para aplicar dicha regla.

Podemos notar que en los descriptores del *conocimiento del contenido y estudiantes* de Aly, existen varios relacionados primordialmente con equivocaciones que pudieran cometer los estudiantes ya sea por que se confunden, porque se despistan, porque tienen una imagen inadecuada o una idea errónea del contenido, o porque hacen cálculos mecánicos sin saber realmente lo que están haciendo.

Otros descriptores evidenciados en Aly, pero más relacionados con la falta de atención de los estudiantes al aprender el contenido, hacen referencia a que los estudiantes no se fijen, o no vean primero si pueden usar alguna propiedad (y terminar más rápido), o que no vean que pueden ver la igualdad de una propiedad o ecuación matemática en dos sentidos: en particular, que no detecten la igualdad de derecha a izquierda; o que, al abordar problemas extensos, los estudiantes desaprovechen algún cálculo realizado al inicio del problema y olviden utilizarlo en los últimos pasos de tal problema a causa de la larga extensión del mismo.

Pero además existen otros de distinta índole. Nos referimos, por un lado, a escuchar e interpretar el pensamiento o razonamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje común y luego orientarlo al contenido que está enseñando; y a conocer las dificultades que pudieran tener sus estudiantes cuando ella presente el contenido. Por otro lado, están también los descriptores relacionados con saber lo que los estudiantes pueden comprender o entender "mejor", ya sea porque cuenten con un recurso material (libro de texto) o porque ella les haga notar algún aspecto del contenido para mayor comprensión de éste.

Finalmente, en este subdominio cabe hacer notar que en ocasiones Aly da por hecho que los estudiantes ya saben hacer algunas operaciones de temas anteriores y por ello sólo anota el resultado, sin detallar el procedimiento.

En referencia al *conocimiento del contenido y enseñanza*, pudimos establecer algunas "categorías" o agrupamientos de los descriptores respecto a un "*issue*": *Ejemplos; ayudas; gestión de la participación; traducir; hacer notar o remarcar; alertar; preparar actividades y forma de presentar o representar.*

Respecto a *ejemplos*, Aly sabe con qué ejemplo o ejercicio empezar, cuándo y cuáles usar para enfatizar, reforzar o generalizar cierta idea matemática. Sabe que la aplicación del concepto en un ejemplo le es útil para inducir luego la definición del concepto. Sabe que una de las potencialidades de un ejemplo, explícitamente al desarrollarlo, es utilizarlo para destacar los aspectos relevantes del contenido matemático que pretende enseñar ese día en clase. Sabe usar ejemplos con datos concretos, en lugar de desarrollar propiedades de forma general o con ejemplos genéricos, para explicar el contenido. Sabe, además, qué ejercicios dejar a los estudiantes de deberes para que practiquen.

Aly sabe qué *ayudas* dar a los estudiantes en situaciones de confusión o dificultad, para que puedan dar solución a un ejercicio o resolver un problema. También sabe que una "buena" estrategia para que los estudiantes comprendan o hagan el ejemplo, ejercicio o problema, consiste en explicarles o hacerles hincapié en lo que quiere que hagan y para qué quiere que lo hagan, o simplemente explicarles de lo que trata el ejemplo, ejercicio o problema. Igualmente, sabe cómo señalar a los estudiantes algún dato del problema que no aparece explícito y que luego será necesario para dar solución a un ejercicio o resolver un problema.

En cuanto a incitar e impulsar la participación de los estudiantes para favorecer y enfocar su aprendizaje al contenido matemático que desea enseñar, proponemos el *"issue" gestión de la participación*. A este respecto, Aly sabe qué *preguntas* formular al explicar el contenido matemático para presentar un nuevo concepto, una nueva propiedad o una clasificación; para ir guiando la solución de un ejemplo o ejercicio, resolver un problema o hacer una representación gráfica; para invitar a los estudiantes a participar en la respuesta de un ejercicio. En la misma línea, lanza preguntas, no necesariamente a cierto estudiante, para presentar o mostrar específicamente lo más importante del contenido que está enseñando (algunas veces son contestadas por ella misma y otras los estudiantes).

Cuenta en su bagaje como docente con el conocimiento para discernir qué *respuestas* ha de aceptar por parte de los estudiantes, cuáles interrumpir, cuáles ignorar o cuáles destacar, para alcanzar los objetivos de la enseñanza del contenido trazados por ella para esa clase. Sabe cómo orientar una respuesta correcta a un lenguaje matemático aceptado en la matemática escolar; en particular, cuando se atiende o enfoca a una convención matemática (el profesor debe saber cómo orientar o enfocar las respuestas correctas sobre el contenido matemático expresadas por los estudiantes, al lenguaje aceptado matemáticamente, eg. cuando Aly pregunta de qué orden es la matriz y E5[26] contesta correctamente -que no adecuadamente-, que es de 2x3, E5 primero dice el número de columnas y luego el de filas, tras lo cual Aly vuelve a preguntarle para que se de cuenta de que en el lenguaje matemático se debe decir primero el número de filas y luego el de columnas, y de ese modo enfatizar ante el grupo dicha convención). Sabe cómo aprovechar las respuestas incorrectas de los estudiantes, corregirlas y utilizarlas para explicar ante el grupo algún aspecto del contenido; también sabe cómo aprovechar la discusión que se presenta en el grupo con la intervención de varios estudiantes para hacerles notar algún aspecto incorrecto del contenido.

Además, Aly sabe cómo transferir e interpretar la *pregunta y/o respuesta* de un estudiante y luego contestar a forma de explicación para todos los estudiantes y sabe cómo gestionar la participación de los estudiantes para que participen activamente y *hagan el ejercicio o problema* y que no sólo copien lo que ella hace.

Otro *"issue"* es *traducir*, en cuanto a convertir. A este respecto Aly sabe usar lenguaje común o más familiar a los estudiantes o una forma más explícita, más detallada, al explicar el contenido matemático para que los estudiantes lo comprendan "mejor" (eg. sabe que los estudiantes pueden comprender "mejor" las propiedades de los determinantes si se las dice en lenguaje más familiar a los estudiantes, escribe en los ejemplos detalladamente los pasos de la solución y utiliza términos más conocidos para ellos). Igualmente, sabe cómo traducir a los estudiantes la actividad matemática presentada por otro estudiante o cómo traducir alguna actividad matemática del libro de texto a su lenguaje usual.

[26] E5 es la etiqueta correspondiente al estudiante número 5.

En cuanto al *"issue" hacer notar o remarcar*, Aly sabe cómo hacerles notar, remarcar, destacar o aclarar, puntualmente, lo más importante del contenido que está enseñando. Ella sabe cómo hacerles notar la importancia de algún aspecto característico del método, propiedad, regla o concepto que presenta; y también la similitud que existe entre distintos conceptos. De modo similar, intenta hacerles notar herramientas o aspectos relevantes en los datos de un ejercicio o problema. Así pues, algunas veces destaca, de manera puntual, lo más sustancial del contenido cuando así lo considera oportuno.

Respecto al *"issue" alertar*, Aly sabe cómo plantearles una situación hipotética para prevenirlos de error, anticipa el posible error y luego los pone en una posible situación de riesgo en la que pueden cometer el error, para hacerles notar cuál sería ese error. Ella se adelanta a una situación que podría presentárseles a los estudiantes en ejercicios posteriores, con el objetivo de que tengan idea de lo que deben hacer ante una situación similar a la que les plantea. También sabe cómo hacerles señalamientos sobre errores que cometieron algunos estudiantes en el examen, para *alertar* a los demás sobre los errores que se cometen y de alguna forma prevenirlos para que no cometan el mismo error. Cabe destacar que en una ocasión, cuando ella los alerta al decirles "cuidadito con las cuentas", ella trata de prevenirlos de equivocaciones al hacer operaciones aritméticas porque ella misma sintió temor de equivocarse.

En el *"issue" preparar actividades*, en el caso de Aly obtuvimos evidencia de dos aspectos concretos, que no consisten propiamente en un compendio de actividades pero que están relacionados con preparar actividades. Ella sabe cómo prepararles a los estudiantes una actividad con la que explicarles el método de Gauss-Jordán para calcular la matriz inversa; al observar que en el libro de texto no está la explicación para calcular la inversa con ese método ella les preparó también las soluciones a los ejercicios del examen para que los estudiantes revisen cómo se resuelven y afiancen el contenido matemático del tema presentado (la actividad consiste en discutir en clase las fotocopias que les preparó en las que se explica cómo calcular la inversa con ese método y tres ejemplos resueltos en los que aparecen las transformaciones elementales necesarias, hasta llegar a la matriz inversa).

En cuanto al último *"issue", formas de presentar o representar el contenido*, encontramos evidencias del conocimiento de Aly al respecto, las cuales comentamos seguidamente. Ella sabe introducir un concepto mediante la relación de conceptos matemáticos vistos anteriormente. Sabe cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan "mejor" el contenido que presenta. Sabe cómo evocar un concepto(s), un ejemplo, ejercicio, problema o procedimiento equivalente visto(s) o hecho(s) anteriormente, para presentar un nuevo concepto o un ejemplo del nuevo concepto, para que los estudiantes traigan a la mente ese contenido o se hagan una idea de cómo se resuelve el nuevo problema. Aly sabe usar la analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último: por ejemplo, para explicar las propiedades de la suma con matrices, ella recurre a la analogía de las propiedades de la suma con los números reales; además, usa la analogía del cuadrado y el rectángulo en cuanto a la forma de la matriz para hacerles notar la diagonal principal de ésta. También sabe cómo aprovechar como antecedente lo que ha visto acerca de un concepto para abordar el siguiente.

Aly sabe presentar/representar la definición de un concepto en forma genérica y no únicamente con números concretos al presentar el concepto de matriz con una matriz genérica de orden mxn. Ella expresa en la entrevista que los estudiantes de esta especialidad (científico-tecnológica) deben irse acostumbrando poco a poco a la notación formal.

La profesora sabe rescatar la idea del contenido matemático que esté presentando, tras la digresión en su discurso. Por ejemplo, después de comentarles extensamente que el sistema se puede escribir como AX=C, Aly retoma la idea principal del ejemplo, escribir el sistema en forma matricial AX=C para resolver el sistema.

Ella sabe, además, cómo explicarles la utilidad, aplicación, dirección/orientación del contenido en temas siguientes (en su curso), ella considera que este es un aspecto muy importante para que los estudiantes le vean sentido al contenido y no vean todos los contenidos disjuntos.

Aly considera que los estudiantes aprenden por repetición, sobre todo en el tema de Álgebra. Es por ello que, al enseñar un método, hay que ofrecer a los estudiantes una explicación que les sirva de modelo que pueda ser extrapolado a la solución de ejercicios o problemas similares, pues de lo contrario los propios estudiantes difícilmente encontrarían por sí solos el camino para llegar a la solución. Así pues, les expone dos o tres ejemplos tipo y luego les deja de deberes otros parecidos porque, expresa en la entrevista, si les deja un problema que no tenga mucho que ver con lo que ellos han visto en clase, nadie lo hace y entonces no le sirve de nada. Influenciada por esto, ella sabe qué es lo que hay que repetir y cómo, para aclarar dudas del contenido a los estudiantes o reafirmar algunos aspectos del contenido.

Cuando Aly presenta una demostración, método, procedimiento, solución a un problema, un ejemplo o un ejercicio, sabe cómo explicar una parte o toda la estrategia que se requiere para realizarlos. Sabe cómo usar la comparación entre algunas formas de hacer un ejercicio o entre varias representaciones, comparar distintos métodos de resolución de ejercicios o decirles otra forma de resolver un mismo ejercicio, para destacar a los estudiantes los aspectos del contenido en los que se deben de fijar.

Aly sabe, además, que con determinada representación los estudiantes visualizarán “mejor” o se harán una imagen concreta sobre algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante, eg. cuando escribe 2y como 2y+0 para que los estudiantes vean el término 2y como dos sumandos cuando apliquen la propiedad de los determinantes (donde una fila hay dos sumandos). Ella conoce la potencialidad de los esquemas gráficos para representar un contenido y por ello, por ejemplo, usa esquemas gráficos para indicarles la trayectoria que deben seguir para calcular el determinante con la regla de Sarrus.

Más aún, Aly sabe cómo remarcarles los aspectos más relevantes del contenido para concluir un ejemplo o la presentación de un tema. Normalmente para concluir la presentación de un ejemplo, concepto, método o regla, vuelve a remarcarles de manera resumida lo que se hizo. Y sabe cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente.

Respecto a los descriptores del *conocimiento curricular*, directamente de la práctica obtuvimos evidencia de tres de ellos. Aly sabe qué temas se deben ver posteriormente en el curso; sabe qué contenidos aparecen y cómo están organizados en el libro de texto. Y sabe qué contenidos deben aprender los estudiantes aunque no aparezcan en el libro de texto, simplemente por ser parte del currículo.

Los principales materiales curriculares consultados por Aly para este tema (Álgebra) son: los contenidos del currículo promulgado por la Consejería de Educación, el libro de texto, extractos de corte didáctico tomados de internet, y el temario para el examen de selectividad propuesto por la Universidad[27].

Aparte de los subdominios del CME podemos comentar algunos descriptores respecto al *conocimiento pedagógico general*.

Cabe mencionar que en ocasiones, cuando un estudiante está haciendo el ejercicio de deberes en la pizarra, ella aprovecha para acercarse al lugar de otro(s) estudiante(s) y aclararle(s) las dudas sobre los deberes. Además, cuando han sido sólo uno o dos estudiantes los que han realizado los deberes, Aly gestiona su participación de forma que aporten una parte de la solución o la solución completa, pero fomentando también la participación del resto de los estudiantes. Al hacer o revisar los deberes en clase, ella interrumpe e ignora la respuesta del estudiante que hizo sus deberes para que también los demás estudiantes intenten resolver el ejercicio. Ella tiene una forma de acercarse a revisar lo que han hecho los estudiantes y cómo lo han hecho, por ejemplo, les pregunta qué resultados han obtenido ellos y qué procedimientos usaron, después de que un estudiante ha hecho el ejercicio en la pizarra.

Continuando con el *conocimiento pedagógico general* evidenciado en Aly, queremos comentar que ella muestra conocimiento tanto para controlar la indisciplina o

[27] Las profesoras en el último año de bachillerato, tienen la encomienda de prepararlos para ese examen, y es la universidad la institución que realiza los exámenes de selectividad y propone un temario a ser evaluado en el que se establecen unos objetivos y contenidos mínimos en cada uno de los diferentes contenidos de la asignatura.

distracción en el aula, como para atraer o llamar la atención de los estudiantes cuando están haciendo actividades que no son de la asignatura. Cuando alguno de los estudiantes está despistado, ella lo nombra expresamente, le llama la atención y el estudiante reacciona. Y hace lo mismo si un estudiante se le está durmiendo (entran a las 7:45 am y los martes tienen con ella la primera clase). En ocasiones, cambia de sitio a los estudiantes que están causando indisciplina en el grupo o, en otras, les ayuda a participar haciéndoles preguntas para atraer su atención y cuando de plano una situación se desborda saca a algún estudiante del aula.

Ella llama la atención a algún estudiante delante de todos por olvidar un tópico que habían visto recientemente y reprende a los estudiantes porque no hacen los deberes o no estudian lo que vieron la clase anterior o porque no hicieron los ejercicios y sólo copian la solución que ella anota en la pizarra. No obstante, cuando un estudiante está distraído, ella lo invita a que ponga atención en la clase y que por lo menos vaya copiando lo que se va haciendo en la pizarra.

Continuando con lo anterior, Aly tiene una forma de motivar/exigir a los estudiantes que hagan una demostración, los ejemplos o los ejercicios (normales o de deberes), por ejemplo, les comenta a los estudiantes que ni siquiera intentaron hacer los ejercicios que había dejado como deberes: "si en esto que es tan facilito no nos paramos a intentarlo, pues esto ya se va complicando más cada vez"; o los anima a que hagan la demostración de la regla de Cramer, haciéndoles notar que cuentan con las propiedades de los determinantes para hacerla más rápido. Otra forma de motivarlos para que hagan los ejercicios que les dejó de deberes a fin de que practiquen de cara al próximo examen, consiste en comentarles que vayan haciendo los ejercicios y, si tienen alguna duda sobre alguno de ellos, brindarles la ocasión de resolverla en clase antes del examen. Ella les informa que esos ejercicios pueden aparecer en el examen y les añade que si el día del examen llegan sin haber trabajado los ejercicios, no serán capaces de contestar o resolver adecuadamente las preguntas del examen. Aly les deja deberes (que hagan ejercicios parecidos al (a los) que hicieron en esa clase), y luego toma en cuenta a los que sí hicieron sus deberes en el momento de revisar en clase alguno de esos ejercicios que había dejado de deberes.

Ella tiene una forma de preguntarles si les ha quedado claro lo que acaban de hacer: ella se acerca al lugar de los estudiantes cuando levantan su mano porque tienen dudas, luego se las pregunta y después se las explica. Ella, además, normalmente les pregunta cuando terminan de hacer un ejercicio: "¿de acuerdo?" o "¿queda claro esto?" o "¿esto lo entendéis todos?". Sin embargo, en una ocasión un estudiante le hizo una pregunta sobre un paso en un procedimiento en el que se aplicaba la propiedad distributiva y Aly se lo explica pero le comenta que *"es una pregunta un poco tonta",* y el estudiante le contesta que él no entendía ese paso[28].

Cuando los estudiantes le piden un "hueco"[29] para plantearles sus dudas concretas fuera de clase y ella se lo concede, Aly expresa que la buena disposición del profesor para explicarles sus dudas fuera del horario de clase es muy agradecida por los estudiantes y que eso se refleja en su mayor implicación para hacer los ejercicios o problemas.

A continuación queremos agregar algunas caracterizaciones evidenciadas o expresadas explícitamente por Aly que puedan ayudar a entender más el caso.

Aly comenta en la entrevista que es mejor abordar todos los temas aunque se les dedique poco tiempo, porque de dedicarles más tiempo se quedarían cortos en otros apartados del temario ya que no daría tiempo de verlos, lo cual bajo ninguna circunstancia se debe permitir.

Una de las mayores preocupaciones que Aly manifiesta tanto en las clases observadas como en la entrevista es su preocupación por cubrir los contenidos a tiempo y comenta que se ve muy presionada por el tiempo y que eso tiene implicaciones al impartir el curso, concretamente en Álgebra. Así pues, hace menos problemas porque

---

[28] El estudiante preguntó que no entendía por qué $a_{11}(-1)^2(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})$ daba $a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$ y ella le explica que se usa la propiedad distributiva y que es como si tuviera 3(2.7-5.2)=3.2.7-3.5.2 (tal y como Aly lo anotó. Aly, notas de campo, clase del 29/10/08).

[29] "Hueco" se refiere a un intervalo de tiempo disponible que tenga la profesora dentro del instituto para que escuche y explique sus dudas de manera personal.

“[...] eso requiere más tiempo, requiere un planteamiento más serio que no es el “cacharreo” de resolver una ecuación de primer grado o segundo grado en el que es la formulita y ya está.” (Aly, entrevista).

Es decir, prioriza las operaciones o ecuaciones sobre la *resolución de problemas*, por motivo de tiempo.

Posteriormente, en la entrevista, vuelve a hacer énfasis en que en los cursos de bachillerato

“[...] vamos contrarreloj, no nos podemos permitir un método de aprendizaje basado en el auto-descubrimiento.” **(Aly, entrevista).**

Inclusive, cuando quedan pocos minutos para que la clase termine, Aly optimiza el tiempo aprovechando esos momentos finales para que los estudiantes practiquen, en lugar de dejarlos ir.

Atribuimos que para Aly el factor tiempo puede ser un motivo por el cual, en muchas ocasiones, no muestre evidencia de cerciorarse si los estudiantes (la mayoría) van comprendiendo lo que se va haciendo y que no sólo copien lo que ella va haciendo en la pizarra.

En cuanto a la formación en didáctica de las matemáticas de Aly, ella comenta en la entrevista que las principales fuentes de las que adquirió su formación pedagógica para enseñar matemáticas son:

- De un curso del CAP[30] antes de hacer su oposición.
- De su experiencia como estudiante, es decir, de sus propios profesores.
- De su propia práctica profesional.
- De sus compañeros, cuando entre ellos comentan cómo afrontar determinados conceptos, qué actividades se adaptan mejor que otras, etc.

[30] CAP corresponde a las siglas de Curso de Aptitud Pedagógica que se impartía en las universidades españolas para capacitar a licenciados universitarios de cara a la docencia en educación secundaria y bachillerato.

Aly menciona en la entrevista que normalmente el profesorado (de matemáticas de bachillerato) conoce muy bien sus materias pero falla más en la parte didáctica y de acercamiento al alumnado de esas edades (ella comenta que ese aspecto es compartido con ella por otros colegas de matemáticas de distintos institutos en conversaciones informales entre ellos).

Ella reconoce la influencia de los estudiantes en su conocimiento didáctico del contenido y en la entrevista expresa:

"A veces pasa que con alguna pregunta o algún comentario que te hacen los alumnos tú percibes que hay algún aspecto que no queda claro tal y como tú lo planteas y hay que reconsiderarlo de nuevo. Este tipo de situaciones te hacen aprender qué forma es mejor para exponer un concepto, no sólo para un curso sino para siempre." (Aly, entrevista).

Cabe señalar que en las clases observadas Aly muestra tener muy buena destreza para hacer las cuentas, hace rápidamente operaciones numéricas de forma mental. Sin embargo, en una de las clases observadas los estudiantes estuvieron aún más inquietos e indisciplinados que en las sesiones anteriores. Aly considera que se debe a que venían de hacer un examen en otra materia minutos antes de entrar a su clase. La mayoría de los estudiantes estaban más inquietos que días anteriores. En este tipo de clases entra en juego la ***eficacia del profesor***, ya que, como ella misma comenta, Aly sentía mucho estrés porque tenía que estar concentrada en explicar el contenido y a la vez en pedir a los estudiantes que se callaran y se comportaran. Cabe mencionar que ella hizo la demostración de la regla de Cramer y más de la mitad de los estudiantes aprovecharon para armar más desorden, mostrar aburrimiento y dedicarse a actividades disruptivas (pasarse cosas, hablar entre compañeros de una fila a otra, etc.).

Queremos cerrar este caso comentando que cuando a Aly se le pregunta qué se necesita para enseñar matemáticas, ella expresa que primero se requiere que al profesor le gusten mucho las matemáticas, luego haber aprendido bien esos conocimientos y saberlos transmitir. De esa respuesta podemos deducir que los dos últimos aspectos están relacionados con los dos dominios del CME (conocimiento del contenido y conocimiento didáctico del contenido, respectivamente). No obstante, hay que destacar que el primer aspecto, "que le gusten mucho las matemáticas", no es un conocimiento en sí, pero, sin embargo, ella lo distingue como un elemento que juega un papel importante para enseñar matemáticas.

V.3. Comparación de los dos casos (comparación de los descriptores del CME evidenciados en la profesora Emi y en la profesora Aly)

Antes de comenzar la comparación queremos dejar en claro que el hecho de no poseer evidencia del descriptor no necesariamente significa que no se posea el conocimiento relativo al mismo, de hecho, al final de la comparación comentamos algunas razones por las que los descriptores de un caso no se evidencian en el otro en los distintos subdominios del conocimiento matemático para la enseñanza.

Primer[31] subdominio del conocimiento del contenido.

CCC

Descriptores

CCC1. Saber la definición del concepto, regla, propiedad, teorema o método que presenta.
CCC2. Saber usar términos matemáticos y notación matemática (que aparece en las definiciones formales).
CCC3. Saber que la notación es muy importante en matemáticas.
CCC4. Saber la operatividad, propiedades (en cuanto a su uso), utilidad o aplicación (en cuanto a mecanismo o proceso) de un concepto.
CCC5. Saber hacer la demostración de un teorema o una regla.

Descriptores identificados en cada profesora

Emi	CCC1	CCC2	CCC3	CCC4	-
Aly	CCC1	CCC2	CCC3	CCC4	CCC5

Podemos observar que cuatro de los cinco descriptores del CCC se evidencian en ambos casos, pero no sucede lo mismo con el CCC5 en el caso de Emi. Como el CCC5 consiste en saber hacer la demostración de una regla o teorema, consideramos que, dado que el curso de Emi es Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales, es el propio

[31] Las etiquetas, primer, segundo o tercer no indican orden de importancia ni de continuidad.

enfoque del curso el que podría normar el hecho de que Emi se preocupe más por las aplicaciones y no propiamente por las demostraciones como sucede en el caso de Aly, por ser su curso orientado a estudiantes de Científico Tecnológico, donde sí se debe exigir más rigor matemático a los estudiantes.

Los cuatro descriptores del CCC fijos en los dos casos, consideramos que son permanentes porque por la propia definición de los descriptores son conocimientos y habilidades que pueden ser normalmente adquiridos en su formación escolar y que pudieran ser esperados en estas dos profesoras, que precisamente elegimos por ser reconocidas como buenas profesionales por sus colegas y sus estudiantes.

Segundo subdominio del conocimiento del contenido.

CEC

Descriptores

CEC1. Saber el significado de los conceptos.
CEC2[32]. Saber los pasos ocultos: conocer la procedencia y las razones matemáticas por las que funcionan los procedimientos.
CEC4. Saber la causa matemática de los errores comunes de los estudiantes.
CEC5. Conocer aspectos matemáticos de especial importancia para la enseñanza, lo que le permite hacer notar o distinguir la importancia de un aspecto matemático específico para enseñar el contenido matemático.

Descriptores identificados en cada profesora

Emi	-	CEC2	CEC4	CEC5
Aly	CEC1	-	CEC4	CEC5

En el CEC evidenciado por las dos profesoras, permanecen en los dos casos el CEC4 y CEC5, pero no sucede lo mismo con el CEC1 y CEC2. El CEC4 y CEC5 podríamos decir que son conocimientos matemáticos para la enseñanza que están un poco más enfocados a la **enseñanza**, al conocimiento matemático para la enseñanza adquirido por su experiencia como profesoras, de hecho, es el potencial matemático y el uso exclusivo de ese conocimiento matemático en la enseñanza lo que los distingue del CC-En; mientras que el CEC1 y CEC2 podríamos decir que están más enfocados a la parte

[32] El CEC3 no aparece aquí porque es un descriptor que nosotros proponemos pero que no fue evidenciado en ninguno de los dos casos que estudiamos.

matemática, es decir, siguen siendo conocimiento matemático para la enseñanza pero requieren un fuerte **sustento matemático** que se usará luego para enseñar matemáticas. Con lo cual podríamos decir que el CEC1 y CEC2 requieren o exigen más de un empeño personal del profesor por el aprendizaje de sustentos puramente matemáticos que le ayuden a explicarse el significado de los conceptos y de las razones matemáticas por las que funcionan los procedimientos que enseña; dependerá así del propio conocimiento matemático adquirido por el profesor para enseñar a *posteriori* a sus estudiantes su CEC1 y CEC2 alcanzado.

Tercer subdominio del conocimiento del contenido.

HM

Descriptores

HM1. Conocer las similitudes (las relaciones) entre varios conceptos matemáticos de un mismo tema o unidad.
HM2. Saber que un contenido está relacionado con otro más general (aunque no aborde esa forma más general en ese grupo porque el programa no lo incluye).
HM3. Saber la aplicación del contenido en otras áreas.

Descriptores identificados en cada profesora

Emi	HM1	HM2	HM3
Aly	HM1	HM2	-

Dos de los descriptores del HM son fijos en los dos casos, se trata de conocimientos de un "horizonte" matemático muy cercano a ellas. En lo que se refiera al HM1, por estar definido como conocer las relaciones entre varios conceptos matemáticos de un mismo tema o unidad, puede ser lógico que si un profesor ha impartido un curso de matemáticas durante varios años, conozca al menos cómo se relacionan los conceptos de un mismo tema o unidad. En cuanto al HM2 que también es fijo, igualmente es un conocimiento muy cercano a ellas. En el caso de Emi consiste en saber que el contenido que está enseñando está relacionado con otro más general, ella lo sabe porque ha impartido ese contenido de manera más general a estudiantes de la especialidad de Científico Tecnológico en cursos anteriores; en el caso de Aly se refiere a un conocimiento matemático que ella ha impartido en secundaria y en este curso de bachillerato lo está impartiendo de manera más general, pero es cercano porque ella imparte cursos de matemáticas en secundaria y bachillerato en el mismo instituto.

El HM3 sólo se evidenció en Emi, podríamos esperar casi de manera natural que se mostrara en ella, si consideramos que el descriptor se refiere a saber la aplicación del concepto en otras áreas y la asignatura es Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales. De hecho, las aplicaciones del concepto de las que Emi dio evidencia, son en Sociología y Economía, áreas contempladas en el currículo para aplicar el concepto de matriz.

Primer[33] subdominio del conocimiento didáctico del contenido (CDC).

CC-Es

Descriptores

CC-Es1. Saber escuchar e interpretar el conocimiento o pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje (común o en proceso de adquisición del nuevo concepto –mezcla de lenguaje común con matemático).
CC-Es2. Saber las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre el contenido matemático.
CC-Es3. Prever la confusión que pudiera tener el alumno con algún aspecto específico del contenido que se esté viendo en clase.
CC-Es4. Prever (anticipar) que los estudiantes no saben o no recuerdan un concepto o propiedad matemática.
CC-Es5. Prever (anticipar) que los estudiantes se pueden quedar con una imagen o idea inadecuada del contenido.
CC-Es6. Saber lo que a los estudiantes les parecerá cansado y aburrido de un contenido matemático específico.
CC-Es7. Saber que los estudiantes pueden equivocarse al hacer determinado cálculo de un número o de un signo (más leve), provocado por un despiste al hacer una(s) operación(es) o transformación(es), o por no dominar el contenido que se les está presentando.
CC-Es8. Saber que los estudiantes deben proceder ordenadamente respetando las convenciones matemáticas, para evitar confusiones y errores.
CC-Es9. Saber que los estudiantes podrían hacer cálculos mecánicamente sin saber realmente lo que están haciendo.
CC-Es10. Saber que a los estudiantes se les puede ocurrir una respuesta intuitiva para resolver un problema.
CC-Es11. Prever que los estudiantes no vean que un problema es equivalente a otro; o que no vean que una igualdad la pueden usar en un sentido o en otro.
CC-Es12. Saber que los estudiantes pueden ponerse a hacer cálculos sin antes fijarse en si pueden usar una propiedad.
CC-Es13. Saber que para los estudiantes será más comprensible un tema si lo ven con un ejemplo concreto (que puede aparecer en el libro de texto).
CC-Es14. Saber que los estudiantes entenderán "mejor" el ejemplo si antes de empezar

[33] Las etiquetas, primer, segundo o tercer no indican orden de importancia ni de continuidad.

a hacerlo se les remarcan las principales características del concepto que se usará en el ejemplo.
CC-Es15. Saber que los estudiantes pueden atascarse en algunos detalles de la solución del problema y perder el sentido del problema.
CC-Es16. Saber que a los estudiantes les puede parecer extraño usar por primera vez un método o regla que estaba diseñado para otro caso o situación del contenido.
CC-Es17. Saber que los estudiantes, al resolver problemas extensos, pueden olvidar algún cálculo que ya habían hecho al inicio y no aprovecharlo cuando se utilice nuevamente para solucionar el mismo problema.
CC-Es18. Prever que los estudiantes divaguen definiendo más variables de las que necesitan para resolver un problema.
CC-Es19. (Antes CC-En-Es6) Saber que los estudiantes pueden resolver fácilmente alguna parte operacional (algún sistema de ecuaciones, alguna ecuación de segundo grado, algún determinante) del procedimiento.

Descriptores identificados en cada profesora

Emi	CC-Es1	CC-Es2	CC-Es3	CC-Es4	CC-Es5	CC-Es6	CC-Es7	CC-Es8	CC-Es9	CC-Es10
Aly	CC-Es1	CC-Es2	CC-Es3	-	CC-Es5	CC-Es6	CC-Es7	CC-Es8	CC-Es9	-

En los descriptores del CC-Es1 al CC-Es10, las dos profesoras no muestran evidencias comunes en los descriptores CC-Es4 y CC-Es10. Aly no manifiesta prever o anticipar que los estudiantes no saben o no recuerdan un concepto o propiedad matemática vista en cursos previos, es decir, no hace algún comentario que nos dé indicio de ello, eso lo podemos constatar debido a que ella, muchas de las veces, da por hecho que los estudiantes pueden resolver fácilmente una parte operacional del procedimiento, algún sistema de ecuaciones, alguna ecuación de segundo grado o algún determinante, y por eso, sólo anota los resultados (CC-Es19). Esto hace una distinción entre Aly y Emi porque Emi da evidencia de desglosar más detalladamente algún procedimiento o concepto visto en cursos anteriores.

Respecto al CC-Es10, Aly no da evidencia de saber que a los estudiantes se les puede ocurrir una respuesta intuitiva para resolver un problema, pues durante las clases observadas no se dio una situación propicia para que apareciera ese descriptor, es decir, no hubo resolución de problemas en los que pudiéramos evidenciar eso con mayor facilidad, como sucedió en el caso de Emi al resolver problemas de programación lineal.

De los descriptores del CC-Es1 al CC-Es9 que permanecieron fijos en los dos casos, hablaremos más adelante cuando mencionemos lo referente a los descriptores comunes en el CC-Es.

Continuación de los descriptores identificados en cada profesora

Emi	CC-Es11	-	CC-Es13	-	-	-	-	CC-Es18	-
Aly	CC-Es11	CC-Es12	CC-Es13	CC-Es14	CC-Es15	CC-Es16	CC-Es17	-	CC-Es19

Podemos observar que las dos profesoras no dan evidencias comunes de los descriptores CC-Es12 y del CC-Es14 al CC-Es19. Respecto al CC-Es12, Emi no muestra evidencia de saber que los estudiantes pueden ponerse a hacer cálculos sin antes fijarse en si pueden usar una propiedad. Atribuimos que eso se debe al propio tópico en el cual se evidenció en Aly, pues en el tópico "propiedades de los determinantes", se propone una serie de ejercicios que pueden resolverse más fácilmente si se utilizan las propiedades de los determinantes. Por ello, Aly prevé la importancia de que se fijen en si pueden usar una propiedad, justificarla y terminar más rápido el ejercicio.

En cuanto al descriptor CC-Es14, Emi no da evidencia de saber que los estudiantes entenderán "mejor" el ejemplo si antes de empezar a hacerlo les remarca las principales características del concepto que usará en el ejemplo. Consideramos que eso se debe al propio estilo de enseñanza de Emi y de Aly. Aly muestra evidencia de este descriptor porque ella cree que de esa forma los estudiantes lograrán comprender mejor el concepto y el ejemplo.

Respecto al CC-Es15, CC-Es16 y CC-Es17, Emi no muestra evidencia de saber que los estudiantes pueden atascarse en algunos detalles de la solución del problema y perder el sentido del problema; ni de saber que a los estudiantes les puede parecer extraño usar la primera vez un método o regla que estaba diseñado para otro caso o situación del contenido; tampoco de saber que los estudiantes al resolver problemas extensos, pueden olvidar algún cálculo que ya habían hecho al inicio y no aprovecharlo cuando se requiera nuevamente para solucionar el mismo problema. Esto se debe a que, durante las clases observadas de Emi, no se dan situaciones propicias para que aparezcan esos tres descriptores. Es decir, no podemos decir que Emi no cuente con esos conocimientos, porque simplemente no hubo situaciones en las que se hubiese podido presentar y evidenciar que no tiene los conocimientos expuestos en estos tres descriptores (obsérvese que no haber situaciones propicias para que aparezca el descriptor, en este caso, es diferente a que sea el propio tópico o enfoque a la especialidad del curso lo que provoque que no se den las situaciones, pues el tópico puede ser el mismo, pero lo que sucede es que es la situación la que no se presenta).

Por último, en cuanto a los descriptores de los que ellas no muestran evidencias comunes, en el descriptor CC-Es18 (del CC-Es19 hablamos anteriormente al empezar a comentar acerca del CC-Es), es el propio tópico (programación lineal) el que puede provocar que no hayamos conseguido obtener evidencia de que Aly[34] sepa que los estudiantes divaguen definiendo más variables de las que necesitan para resolver el problema, y con ello, pierdan el tiempo en eso y no logren resolverlo.

En los descriptores comunes del CC-Es1 al CC-Es9, CC-Es11 y CC-Es13 podemos decir lo siguiente.

Las dos profesoras muestran conocimiento para escuchar e interpretar el razonamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje común o en su lenguaje en proceso de adquisición del nuevo concepto (lenguaje en el que los estudiantes mezclan lenguaje común con lenguaje matemático).

Ellas dan evidencia de que conocen de las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre el contenido matemático que están enseñando, y a la vez saben lo que a los estudiantes les parecerá cansado y aburrido de un contenido matemático específico.

Emi y Aly saben que para los estudiantes será más comprensible un tema si lo ven con un ejemplo concreto que aparece en el libro de texto. Cabe mencionar que en el caso de Aly, ella usa el libro de texto fielmente para los tres tópicos del tema de Álgebra,

[34] Cabe retomar que los tópicos del tema de Álgebra que imparte Aly son: Matrices, Determinantes y Resolución de Sistemas de Ecuaciones. Y los tópicos del tema de Álgebra que imparte Emi son: Matrices, Sistemas de Ecuaciones Lineales y Programación Lineal.

mientras que Emi lo utiliza más sólo en el tercer tópico (programación lineal) debido a las necesidades especiales de E9 (mejor detalladas en la sección anterior donde explicamos el caso de Emi).

Las dos profesoras prevén la confusión que pudiera tener el alumno con algo que se esté viendo en clase o posteriormente en otras clases o cuando los estudiantes se pueden quedar con una imagen o idea inadecuada del contenido. Y cuando eso sucede, normalmente les hacen un comentario a los estudiantes para prevenirlos.

Ellas saben, además, que los estudiantes podrían hacer cálculos mecánicamente sin saber realmente lo que están haciendo y que los estudiantes pueden equivocarse al hacer determinado cálculo de un número o de un signo, provocado por un despiste al hacer una operación o transformación, o por no dominar el contenido que se les está presentando. Saben también que es muy importante que los estudiantes tengan cuidado y procedan ordenadamente respetando las convenciones matemáticas para evitar confusiones y errores al escribir las soluciones de los problemas.

Emi y Aly prevén que los estudiantes no vean o no se fijen en que un problema es equivalente a otro o que no se den cuenta de que una igualdad la pueden usar en un sentido o en otro, lo cual pudiera ser una causa que les impediría a los estudiantes resolver el problema.

Segundo subdominio del CDC.

CC-En

Debido a que en este subdominio contamos con distintas categorías o "issues", para facilitar la lectura y comprensión de ésta, presentamos los descriptores por categoría o "issue".

- *Ejemplos*

Descriptores

CC-En1. Saber con qué ejemplo o ejercicio empezar, cuándo y cuáles usar para enfatizar, reforzar o generalizar cierta idea.

CC-En2. Saber que la aplicación del concepto en un ejemplo le es útil para inducir luego la definición del concepto.
CC-En3. Saber que una de las potencialidades de un ejemplo, en concreto al desarrollarlo, es utilizarlo para destacar los aspectos relevantes del contenido matemático que pretende enseñarles ese día en clase.
CC-En4. Saber usar ejemplos con datos concretos, en lugar de desarrollar propiedades de forma general o con ejemplos genéricos, para explicar el contenido.
CC-En5. Saber que al explicar un ejemplo o un ejercicio, es importante que los estudiantes vean que los resultados obtenidos del ejemplo o ejercicio tienen un significado concreto.
CC-En6. Saber qué ejercicios dejarles de deberes para que practiquen.

Descriptores identificados en cada profesora

Emi	CC-En1	CC-En2	CC-En3	CC-En4	CC-En5	CC-En6
Aly	CC-En1	CC-En2	CC-En3	CC-En4	CC-En5	CC-En6

En ambos casos las profesoras usan constantemente varios ejemplos para distintas razones. Ellas saben que la aplicación del concepto en un ejemplo le es útil para inducir luego la definición del concepto, una regla, propiedad, teorema o método). Desde un principio saben con qué ejemplo o ejercicio empezar, cuándo y cuáles usar para enfatizar, reforzar o generalizar cierta idea, las dos saben también que, al desarrollar un ejemplo, pueden aprovecharlo para destacar aspectos relevantes del contenido matemático que pretenden enseñar ese día.

Un aspecto evidenciado en las dos profesoras fue que, al presentar las propiedades, de las matrices por ejemplo, ambas usaron ejemplos con datos concretos. En lugar de demostrar formalmente las propiedades, ellas usan un ejemplo con datos concretos para hacerles ver que se cumplen o, cuando sea el caso, que no se cumplen. Inclusive en el caso de Aly, en el que sus estudiantes son de la especialidad de científico tecnológico, ella misma expresa en una la entrevista que a los estudiantes hay que irlos acostumbrando poco a poco al rigor matemático. Tampoco hace demostraciones formales de las propiedades (excepto cuando hizo la demostración de la regla de Cramer), sino que usa ejemplos con datos concretos. Nos decantamos por atribuir eso al efecto de sus creencias sobre cómo presentar las propiedades, de tal modo que una vez que deciden hacerlo con ejemplos con datos concretos más que hacer la demostración formal, entra en juego el papel importante del primer descriptor, respecto a saber qué ejemplo les es útil para presentarlas. Además, al terminar la clase, ellas saben qué ejercicios dejarles de deberes para que practiquen en casa.

Es notorio en los dos casos que ellas saben que al explicar un ejemplo o ejercicio es importante que los estudiantes vean que los resultados obtenidos del ejemplo o ejercicio tienen un significado concreto. En particular, saben de la importancia de que los ejemplos sean contextualizados. Sin embargo, su esfuerzo por hacer ese tipo de ejemplos sólo se notó en el primer subtema (matrices) pero no en los otros dos, tanto en un caso como en otro.

- *Ayudas*

Descriptores

CC-En7. Saber qué ayudas dar a los estudiantes en situaciones de confusión o dificultad, para que puedan dar solución a un ejercicio o resolver un problema.
CC-En8. Saber que una "buena" estrategia para que los estudiantes comprendan o hagan un ejemplo, ejercicio o problema, consiste en explicarles o hacerles hincapié en lo que quiere que hagan y para qué quiere que lo hagan o simplemente explicarles de lo que trata el ejercicio o problema.
CC-En9. Saber cómo señalar a los estudiantes algún dato del problema que no aparece explícito y que luego se usará para dar solución a un ejercicio o resolver un problema.

Descriptores identificados en cada profesora

Emi	CC-En7	CC-En8	CC-En9
Aly	CC-En7	CC-En8	CC-En9

En ambos casos, las profesoras muestran conocimiento respecto a saber qué ayudas dar a los estudiantes cuando están confundidos o tienen dificultad para solucionar un ejercicio o resolver un problema. Cuando ellas lo consideran oportuno, saben cómo señalar a los estudiantes algún dato del problema que no aparece explícito y que luego se utilizará para solucionar el ejercicio o resolver un problema. Además ambas saben que una "buena" estrategia para hacer un ejercicio o problema de modo que los estudiantes lo entiendan o lo hagan, consiste en explicarles detalladamente la actividad y hacerles hincapié en lo que quiere que hagan y para qué quiere que lo hagan, o simplemente explicarles de lo que trata el ejercicio o problema.

Habitualmente ellas han hecho previamente los ejercicios o problemas que encomiendan a sus estudiantes. Con ello se hacen una idea de las posibles confusiones o dificultades que pueden tener los estudiantes, y de esa manera también pueden distinguir algún dato implícito del problema que no puedan deducir fácilmente los estudiantes y entonces deciden comentarlo en clase para que los estudiantes den la solución al ejercicio o resuelvan el problema. Ambas consideran que les funciona la estrategia de comentarles lo que quiere que hagan o explicarles de qué trata el ejercicio o problema antes de que los estudiantes empiecen a hacerlo, es decir, les interesa que primero los estudiantes tengan claro lo que van a hacer y que luego lo hagan.

- *Gestión de la participación*
    - *Preguntas* (saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático)

Descriptores

CC-En10. Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático, para hacer ver a los estudiantes que la respuesta de un estudiante es equivocada y orientar la pregunta a la respuesta que el profesor(a) quiere escuchar.
CC-En11. Saber qué preguntas formular, no necesariamente a cierto estudiante, para presentar o mostrar específicamente lo más importante del contenido que está enseñando (algunas veces las contesta ella misma y otras los estudiantes).
CC-En12. Saber qué preguntas formular para presentar un nuevo concepto, una nueva propiedad o una clasificación.
CC-En13. Saber qué preguntas formular sobre el contenido para involucrar a estudiantes pasivos.
CC-En14. Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático para gestionar por lo menos una participación pasiva de los demás estudiantes, cuando existe un diálogo entre el profesor y un determinado estudiante, para que se planteen el porqué de lo que se va exponiendo en el diálogo.
CC-En15. Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático para ir guiando la solución de un ejemplo o ejercicio, resolver un problema o hacer una representación gráfica.

Descriptores identificados en cada profesora

Emi	CC-En10	CC-En11	CC-En12	CC-En13	CC-En14	CC-En15
Aly	-	CC-En11	CC-En12	-	-	CC-En15

En este apartado podemos observar que en los dos casos ambas coinciden en saber qué preguntas formular básicamente en tres momentos de la instrucción: para presentar lo más importante del contenido que están enseñando, para ir guiando la solución de un ejemplo o ejercicio, o para hacer preguntas para separar un tópico del nuevo a presentar.

Sin embargo, en el caso de Aly no se muestra evidencia de tres descriptores, el primero de ellos referente a saber qué preguntas formular para hacerles ver a los estudiantes que es equivocada la respuesta de un estudiante y orientar la pregunta a la respuesta que ella quiere escuchar; el segundo, concerniente a saber qué preguntas formular sobre el contenido a un estudiante que normalmente no participa en clase; o el tercero, relativo a saber qué preguntas formular para gestionar por lo menos una participación pasiva de los demás estudiantes, cuando existe un diálogo entre el profesor y un determinado estudiante para que se planteen el porqué de lo que se va exponiendo en el diálogo.

La ausencia de estos tres últimos descriptores en el caso de Aly es reflejo del propio estilo de enseñanza de Aly. Como comentamos al explicar el caso de Aly en la sección anterior, ella usa largos monólogos y no gestiona mucho la participación de los estudiantes, por tanto es natural que eso se note en esta comparación.

- *Respuestas*

Descriptores

CC-En16. Saber qué respuestas de los estudiantes aceptar, cuáles interrumpir, cuáles ignorar o cuáles destacar, para alcanzar los objetivos de la enseñanza del contenido trazados por la profesora para esa clase.
CC-En17. Saber cómo orientar una respuesta correcta a un lenguaje matemático aceptado en la matemática escolar, es decir, atendiendo o enfocado a una convención matemática.
CC-En18. Saber cómo aprovechar las respuestas incorrectas de los estudiantes para hacerles ver las consecuencias de éstas en el contenido matemático.
CC-En19. Saber cómo aprovechar la respuesta de un estudiante, corregirla y utilizarla para explicar algún aspecto del contenido.
CC-En20. Saber cómo aprovechar la respuesta de un estudiante, referente al contenido, para corregir la de otro.
CC-En21. Saber cómo aprovechar las respuestas de los estudiantes aportadas en la discusión que se presenta en el grupo para hacerles notar algún aspecto incorrecto del contenido.

Descriptores identificados en cada profesora

Emi	CC-En16	CC-En17	CC-En18	CC-En19	CC-En20	CC-En21
Aly	CC-En16	CC-En17	-	CC-En19	-	CC-En21

Podemos observar que en el caso de Aly no obtuvimos evidencia del CC-En18 y el CC-En20, lo cual está directamente relacionado con el apartado anterior *Preguntas,* en donde comentamos la carencia de gestión de la participación en el caso de Aly, pues si ella no da mucha oportunidad de que los estudiantes participen, entonces reduce más la posibilidad de que los estudiantes expresen sus respuestas y por tanto la ocasión de aprovechar las respuestas incorrectas de los estudiantes para hacerles ver las consecuencias de éstas en el contenido matemático o de aprovechar la respuesta de un estudiante, en lo que se refiere al contenido, para corregir la de otro.

En los restantes cuatro descriptores en los que coincide con Emi, las respuestas son provenientes de las preguntas realizadas en los tres momentos comentados al inicio de *Preguntas.* Por consiguiente, podemos decir que como es de esperarse, a mayor gestión de la participación, mayor matización en cuanto a saber cómo y qué respuestas aprovechar, cuáles interrumpir, cuáles ignorar o cuáles destacar, para orientar el contenido matemático a los objetivos de la enseñanza del contenido planteados por la profesora.

- *Preguntas y respuestas*

Descriptor

CC-En22. Saber cómo transferir e interpretar la pregunta y/o respuesta de un estudiante y luego contestar a forma de explicación para todos los estudiantes.

Descriptor identificado en cada profesora

Emi	CC-En22
Aly	CC-En22

- *Para que hagan los ejercicios*

Descriptor

CC-En23. Saber cómo gestionar la participación de los estudiantes para que participen activamente y hagan el ejercicio o problema y que no sólo copien lo que ella hace.

Descriptor identificado en cada profesora

Emi	CC-En23
Aly	CC-En23

Las dos profesoras coinciden tanto en el CC-En22 como en el CC-En23, pues son referidos a dos aspectos que pueden presentarse comúnmente en el estilo de enseñanza del profesor de Matemáticas en bachillerato: por un lado, transferir e interpretar la pregunta y/o respuesta de un estudiante y luego aprovecharla para contestarla a forma de explicación para todos los estudiantes; y por el otro, gestionar la participación de los estudiantes para que participen activamente y hagan el ejercicio o problema y que no sólo copien lo que ella hace.

- *Traducir*

Descriptores

CC-En24. Saber cómo "traducir" a los estudiantes la actividad matemática presentada por otro estudiante o cómo "traducir" alguna actividad matemática del libro de texto a su lenguaje usual.
CC-En25. Saber usar lenguaje común o más familiar a los estudiantes o una forma más explícita, más detallada, al explicar el contenido matemático para que los estudiantes lo comprendan "mejor".

Descriptores identificados en cada profesora

Emi	CC-En24	CC-En25
Aly	CC-En24	CC-En25

Las dos profesoras dan evidencia de saber cómo traducir a los estudiantes la actividad matemática presentada por otro estudiante o alguna actividad matemática del libro de texto a su lenguaje usual, pero sobre todo saben que en la enseñanza es muy importante saber usar lenguaje común o más familiar a los estudiantes o una forma más explícita, más detallada al explicar el contenido matemático, para que los estudiantes lo comprendan mejor.

- *Hacer notar/remarcar/destacar*

Descriptor

CC-En26. Saber cómo hacerles notar, remarcar, destacar o aclarar, puntualmente, lo más importante del contenido que está enseñando.

Descriptor identificado en cada profesora

Emi	CC-En26
Aly	CC-En26

En las clases observadas de las dos profesoras, es notoria la estrategia común de saber cómo hacerles notar, remarcar, destacar o aclarar, puntualmente, lo más importante del contenido que están enseñando. Este descriptor es de los más frecuentes, pues aparece en casi todas las clases y varias veces. Este *hacer notar* lo utilizan para muchas razones: para hacer notar la aplicación de un concepto; algún aspecto característico del concepto, regla, propiedad, teorema o método; o la similitud que existe entre varios conceptos. Es una forma de llamar la atención de los estudiantes hacia aspectos del contenido que quieren enfatizar o que tomen en cuenta los estudiantes.

- *Alertar/Prevenir*

Descriptores

CC-En27. Saber cómo plantearles una situación hipotética para prevenirlos de error.
CC-En28. Saber cómo hacerles señalamientos sobre errores que cometieron algunos estudiantes en el examen, para alertar a los demás sobre los errores que se cometen y de alguna forma prevenirlos de ese error.

Descriptores identificados en cada profesora

Emi	CC-En27	CC-En28
Aly	CC-En27	CC-En28

Ambas coinciden en estos dos descriptores, pues sienten la necesidad de hacerles saber a los estudiantes medidas preventivas para que cometan el menor número de errores posible, por eso saben cómo plantearles una situación hipotética para prevenirlos de error y saben cómo hacer señalamientos concretos ante todo el grupo sobre errores que cometieron algunos estudiantes en el examen, para alertar a los demás sobre los erroresque se cometen y de alguna forma prevenirlos de esos errores.

- *Preparar actividades*

Descriptor

CC-En29. Saber cómo prepararles un compendio de actividades a los estudiantes, para que afiancen el contenido matemático que les está enseñando.

Descriptor identificado en cada profesora

Emi	CC-En29

Aly	CC-En29

En este descriptor las dos profesoras coinciden porque tienen claro que hay que saber cómo prepararles actividades a los estudiantes para que afiancen el contenido matemático que les están enseñando. Ambas saben que en clase son pocos los minutos para profundizar en el contenido y, de alguna manera, ven en eso una salida óptima para que los estudiantes se preparen, practiquen y estudien el contenido abordado en la clase.

- *Forma de presentarlo/representarlo*

Descriptores

CC-En30. Saber cómo introducir un concepto, por ejemplo mediante la relación de conceptos matemáticos vistos anteriormente.
CC-En31. Conocer diferentes formas para introducir un tópico matemático, por ejemplo introducir el tema con algún dato histórico o breve reseña histórica de ese contenido matemático o dar una breve reseña/anécdota histórica para contextualizar un tópico.
CC-En32. Saber distintas formas de presentar/representar la definición de un concepto: en forma genérica y no con números concretos.
CC-En33. Conocer la estrategia de pregunta-respuesta para relacionar unos conceptos con otros hasta llegar al deseado.
CC-En34. Saber cómo remarcarles los aspectos más relevantes del contenido para concluir un ejemplo o la presentación de un tema.
CC-En35. Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente.
CC-En36. Saber cómo explicarles la utilidad, aplicación, dirección/orientación del contenido en temas siguientes.
CC-En37. Saber, tras la digresión en su discurso, rescatar la idea del contenido matemático que esté presentando.
CC-En38. Saber “poderosas” analogías para presentar o representar el contenido matemático. Saber que al usar la analogía de un objeto matemático con un objeto común para aproximarse más al lenguaje usual de los estudiantes, puede hacer que los estudiantes logren entender “mejor” el significado de un contenido matemático.
CC-En39. Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último.
CC-En40. Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución.
CC-En41. Saber qué es lo que hay que repetir y cómo, para aclarar dudas del contenido a los estudiantes o reafirmar algunos aspectos del contenido.
CC-En42. Saber cómo usar la comparación entre algunas formas de hacer un ejercicio o entre varias representaciones, para destacar a los estudiantes los aspectos del contenido en los que se deben fijar.
CC-En43. Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán “mejor” algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto.

CC-En44. Conocer la potencialidad de los esquemas gráficos para representar un contenido.
CC-En45. Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan "mejor" el contenido que presenta, saber cómo evocar un concepto(s), un ejemplo, ejercicio, problema o procedimiento equivalente visto(s) o hecho(s) anteriormente, para presentar un nuevo concepto o un ejemplo del nuevo concepto, para que los estudiantes traigan a la mente ese contenido o se hagan una idea de cómo se resuelve el nuevo problema.
CC-En46. Saber cómo dar más confianza a los estudiantes en el resultado que han obtenido del ejemplo o ejercicio.

Descriptores identificados en cada profesora

Emi	CC-En30	CC-En31	CC-En32	CC-En33	CC-En34	CC-En35	CC-En36	CC-En37	CC-En38	CC-En39
Aly	CC-En30	-	CC-En32	-	CC-En34	CC-En35	CC-En36	CC-En37	CC-En38	CC-En39

Emi	CC-En40	CC-En41	CC-En42	CC-En43	CC-En44	CC-En45	CC-En46
Aly	CC-En40	CC-En41	CC-En42	CC-En43	CC-En44	CC-En45	CC-En46

Las dos profesoras dan evidencia de varios conocimientos que tienen en común en cuanto a su forma de presentar o representar el contenido, excepto en dos descriptores, el CC-En31 y CC-En33. Consideramos que la causa de eso está relacionada con el propio estilo de enseñanza (creencias personales sobre la enseñanza y aprendizaje) de cada profesora, porque para Emi es importante introducir un tema con algún dato histórico o una breve reseña histórica de ese contenido matemático para contextualizar el tópico que presentará. Además, Emi usa la estrategia de pregunta-respuesta para relacionar unos conceptos con otros hasta llegar al deseado. Ella es capaz de utilizar esas formas de presentar el contenido por su propia manera de enseñar y porque cuenta con el conocimiento para ello.

Por otra parte, de los quince descriptores en los que ambas presentan evidencias podemos decir lo siguiente.

Las dos profesoras saben cómo introducir un concepto mediante la relación de conceptos matemáticos vistos anteriormente y, cuando presentan o representan la definición de un concepto, algunas veces lo hacen utilizando una forma genérica.

Cuando ellas exponen el contenido, saben que al usar la analogía de un objeto matemático con un objeto común para aproximarse más al lenguaje usual de los estudiantes, puede hacer que los estudiantes entiendan “mejor” el significado de un contenido matemático. Además, saben usar la analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual para explicar este último; también saben cómo evocar un contenido matemático previo para que los estudiantes comprendan “mejor” el contenido que presentan o un procedimiento equivalente visto o hecho anteriormente para presentar un nuevo concepto o un ejemplo del nuevo concepto, para que los estudiantes traigan a la mente ese contenido o se hagan una idea de cómo se resuelve el problema.

Ellas saben que con determinada representación los estudiantes visualizarán “mejor” o se harán una imagen concreta sobre algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante. Ambas conocen la potencialidad de los esquemas gráficos para representar el contenido y saben cómo usar la comparación entre varias representaciones o formas de hacer un ejercicio, para destacar a los estudiantes los aspectos del contenido en los que se deben fijar y cuando los estudiantes tienen dudas sobre el contenido, ellas saben qué es lo que hay que repetir y cómo para aclararles sus dudas (o reafirmar algunos aspectos del contenido).

Las dos profesoras, en ocasiones, dan explicaciones extensas, pero normalmente saben rescatar la idea del contenido matemático que están presentando, tras la digresión en su discurso.

En varias ocasiones, ellas les proponen algunos ejercicios o problemas a los estudiantes para que los realicen y entonces intervienen para explicarles una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución, y si los ejercicios o problemas que les propusieron a los estudiantes están en el libro de texto, se lo hacen saber a los estudiantes para que ellos lo estudien en su libro y adquieran más confianza para hacer los ejercicios.

Emi y Aly, cuando van a concluir un ejemplo o la presentación de un tema, saben cómo remarcarles los aspectos más relevantes del contenido, saben cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente; inclusive, saben cómo explicarles la utilidad, aplicación, dirección u orientación del contenido en temas subsecuentes.

Tercer subdominio del CDC.

CC

Descriptores

CC1. Saber qué contenidos aparecen y cómo están organizados en el libro de texto.
CC2. Saber qué temas se deben ver posteriormente en el curso.
CC3. Saber qué contenido deben aprender los estudiantes aunque no aparezca en el libro de texto.

Descriptores identificados en cada profesora

Emi	CC1	CC2	-
Aly	CC1	CC2	CC3

Como podemos observar, Emi no presenta evidencia del CC3 correspondiente a saber qué contenido deben aprender los estudiantes aunque no aparezca en el libro de texto. Consideramos que eso se debe a que es un descriptor más propio de un profesor que sigue fielmente el libro de texto y por tanto no tendría por qué presentarse necesariamente en Emi, pues ella sólo siguió el libro de texto fielmente en el tercer subtema del curso (programación lineal) por las necesidades específicas de la estudiante con deficiencia visual severa (esto último aparece más detallado en la explicación del caso de Emi); y en ese caso, todo lo que Emi quería enseñar en ese subtema estaba en el libro de texto.

Ellas coinciden en los otros dos descriptores porque son dos aspectos curriculares mínimos que puede tener un profesor de bachillerato, saber qué contenidos y cómo están organizados en el libro de texto y saber qué temas verán posteriormente en el curso.

CPG

Descriptores

CPG1. Tener estrategias para controlar la indisciplina o distracción en el aula, para

atraer la atención de los estudiantes o llamar la atención a los estudiantes cuando están comportándose de manera impropia para una clase.
CPG2. Habilidad para tranquilizarlos y motivarlos, haciéndoles algún(os) comentario(s) cuando ve a los estudiantes agobiados, decepcionados de ellos mismos o preocupados por el trabajo de clase que tienen que hacer; o porque se consideren incapaces de aprender un método para hacer ejercicios o procedimientos.
CPG3. Motivar, re-encomendar o exigir a los estudiantes que hagan una demostración, los ejemplos o los ejercicios (normales o de deberes).
CPG4. Preguntarles si les ha quedado claro lo que acaban de hacer, si tienen más dudas, de explicarles las dudas (explicando en la pizarra), ver si van entendiendo lo que han visto; acercarse al lugar de los estudiantes cuando levantan la mano porque tienen alguna duda; o porque ponen cara "rara".
CPG5. Tomar en cuenta a los que sí hicieron sus deberes al momento de revisar en clase algún ejercicio que había dejado de deberes.
CPG6. Controlar al estudiante que sí hizo sus deberes (tareas) para que también trabajen y participen otros estudiantes, al hacer o revisar los deberes en clase.
CPG7. Una forma de acercarse a revisar lo que han hecho los estudiantes y cómo lo han hecho.

Descriptores identificados en cada profesora

Emi	CPG1	CPG2	CPG3	CPG4	CPG5	CPG6	CPG7
Aly	CPG1	-	CPG3	CPG4	CPG5	CPG6	CPG7

De estos descriptores podemos observar que Aly no da evidencias del CPG2. Lo atribuimos a que no muestra el conocimiento suficiente para saber cómo motivar a los estudiantes cuando se sienten decepcionados de ellos mismos (eg. por considerarse incapaces de aprender un método o resolver problemas). Aly no mostró hacerles algún comentario a los estudiantes para motivarlos o tranquilizarlos al verlos agobiados, decepcionados de ellos mismos o preocupados por el trabajo de clase que tienen que hacer o porque se consideren incapaces de realizar la actividad matemática encomendada por la profesora. Inclusive, Aly reconoce en la entrevista que ese aspecto de la motivación le falla un poco, porque no sabe cómo encontrar el equilibrio entre presentar el contenido de una forma más interesante a los estudiantes pero sin perder el rigor matemático. Y expresa también que no sabe muy bien cómo tratar a los estudiantes de esa edad (estudiantes de 17-18 años de edad) porque no sabe qué decirles o cómo tratarlos en algunas situaciones de ese tipo.

Sin embargo, las dos profesoras muestran evidencias comunes respecto a los otros seis descriptores. Ambas tienen sus estrategias para controlar la indisciplina de los estudiantes o su distracción en el aula, para atraer la atención de los estudiantes o llamarles la atención cuando se dedican a actividades ajenas a la clase. Ellas tratan de motivar constantemente a los estudiantes para que hagan los deberes y vuelvan a repasar lo que han visto últimamente. Una forma de irlo comprobando es revisar continuamente el compendio de ejercicios que les va preparando constantemente.

Emi y Aly tienen su manera de preguntarles si les ha quedado claro lo que acaban de hacer o si tienen más dudas, de explicárselas en la pizarra, de ver si van atendiendo lo que han visto, o de acercarse al lugar de los estudiantes cuando levantan la mano porque tienen alguna duda o porque ponen cara "rara".

Ambas profesoras toman en cuenta a los estudiantes que sí hicieron su tarea al momento de revisar en clase algún ejercicio que había dejado de deberes (preguntándoles qué procedimientos usaron y su resultado), pero a la vez los controlan para que también trabajen los otros estudiantes al hacer o revisar los deberes en clase, sobre todo cuando fue la minoría de estudiantes los que hicieron la tarea.

Somos conscientes de que todos los descriptores mencionados en este apartado, son obtenidos de dos profesoras y de un solo tema concreto (Álgebra) para un curso enfocado a estudiantes de la especialidad de Ciencias Sociales y otro de la especialidad de Científico Tecnológico, pero estos descriptores nos parecen interesantes y pueden ser considerados para perfeccionar la matización de los subdominios del modelo del conocimiento matemático para la enseñanza y profundizar en la comprensión de dicho modelo para el nivel bachillerato.

De todas las diferentes razones por las que los descriptores de un caso no se evidencian en el otro en los distintos subdominios del CME, podemos inferir las siguientes:

- Por el propio tópico (propiedades de los determinantes) o enfoque propuesto para esa especialidad (Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales o Científico Tecnológico).

- Por los conocimientos propios (que tiene o no) cada profesora.

- Por el estilo propio de enseñanza de cada profesora (creencias y/o convicciones personales sobre la enseñanza y el aprendizaje).

- Porque en las clases observadas, durante la enseñanza no se dan situaciones propicias para que aparezca ese descriptor.

En el siguiente apartado titulado *Discusión* mostramos una serie de descriptores que pueden servir como indicadores de los subdominios, con lo cual intentamos describir el CME del profesor de bachillerato. En nuestra propuesta incluimos no sólo los descriptores evidenciados en los dos casos que estudiamos sino que además planteamos otros, con una mirada más global hacia los sudominios del CME. Hay que destacar que en este estudio, los dos casos son de corte instrumental (Stake, 1994), en el que nuestro objetivo de investigación permanece vigente, dicho objetivo consiste en identificar los distintos subdominios del CME que el profesor pone en acción para conocerlos y entenderlos en nivel bachillerato.

V.4. Discusión

Godino (2009) señala como limitación de los modelos de CME elaborados desde las investigaciones en educación matemática el hecho de que dichos modelos incluyen categorías muy generales. Nosotros, tratando de identificar y profundizar en la comprensión de los distintos subdominios del CME que el profesor de bachillerato pone en acción, presentamos en este apartado varios descriptores o indicadores que componen los distintos subdominios correspondientes a la matización del modelo del CME en bachillerato.

Cabe mencionar que durante la explicación de los distintos subdominios del CME, por la propia cantidad de descriptores no era muy viable desarrollar ejemplos para todos. Si el lector desea obtener ejemplos más detallados de los descriptores puede consultar el capítulo de resultados (secciones V.1.2. y V.1.3. –cabe mencionar que éstas secciones a su vez provienen de la modelación del proceso de enseñanza de las dos profesoras que están en la sección IV.1.3.1 y IV.1.3.2, en las cuales puede consultar aún más detalle). Destacamos que en caso del CEC desarrollamos ejemplos más explícitos porque asumimos que a pesar de ser una de las mayores aportaciones del modelo de Ball y sus colaboradores, es uno de los subdominios definidos de forma más general y nuestra intención es, al dar detalle de ese subdominio a través de cinco descriptores, exhibirlos más ampliamente ejemplificando cada uno de ellos. Para los otros subdominios mencionamos o comentamos ejemplos, sólo en el caso en el que consideramos que la propia redacción del descriptor pudiera causar duda al lector.

CCC

En el subdominio ***conocimiento común del contenido***, diferenciamos cinco descriptores:

> **CCC1. Saber la definición del concepto, regla, propiedad, teorema o método que presenta.**
> **CCC2. Saber usar términos matemáticos y notación matemática (que aparece en las definiciones formales).**
> **CCC3. Saber que la notación es muy importante en matemáticas.**
> **CCC4. Saber la operatividad, propiedades (en cuanto a su uso), utilidad o aplicación (en cuanto a mecanismo o proceso) de un concepto.**
> **CCC5. Saber hacer la demostración de un teorema o una regla.**

El **CCC1** y **CCC2** se refieren a dos conocimientos que están estrechamente relacionados con la definición formal del objeto matemático a enseñar, sólo que en el **CCC1** queremos distinguir el hecho de que el profesor conozca lo que "dice" la definición, mientras que en el **CCC2** queremos hacer notar el conocimiento que tiene el profesor sobre el lenguaje matemático elegante y riguroso, al expresarlo de manera oral o escrita.

Por ejemplo, distinguimos el hecho de conocer en qué consiste el producto de dos matrices (**CCC1**) de saber expresarlo formalmente utilizando el símbolo Σ, es decir, $\sum_{k=1}^{n} \mathrm{a}_{\mathrm{ik}} \mathrm{b}_{\mathrm{kj}}$ (**CCC2**).

Relacionado con el **CCC2** está el **CCC3**, sólo que en el **CCC3** queremos enfatizar que el profesor sepa que la **notación** es muy importante en matemáticas para poder comunicarse matemáticamente, para familiarizarse con las convenciones matemáticas. Como ejemplos del **CCC3** podemos comentar: saber que la matriz se denota con paréntesis; saber que en una matriz, a diferencia de en una tabla, es mejor decir elementos que datos.

El **CCC4** es un descriptor relacionado al aspecto mecánico y procedimental, en este descriptor queremos hacer énfasis en la capacidad que tiene el profesor para saber hacer operaciones, a usar las propiedades o usar o aplicar el concepto de forma mecánica para hacer los ejercicios.

También discernimos otro matiz en el **CCC5**, porque se trata, en específico, de saber hacer una demostración, que implica aspectos como, por ejemplo, tener claro cuál es la hipótesis y la tesis; asimismo, al desarrollar la demostración, aparte de haber una sucesión coherente de pasos, esos pasos deben estar a su vez bien fundamentados (en su caso con axiomas o teoremas demostrados anteriormente); inclusive se debe tener idea de las estructuras lógicas básicas de las demostraciones matemáticas (eg. directo, la contradicción y el inverso). Hacer una demostración, normalmente requiere de un esfuerzo para emular los procesos de razonamiento que previamente han sido sancionados[35] por la comunidad matemática.

Cabe hacer notar que en concordancia con Ball et al. (2008), el CCC es un conocimiento matemático que no es único de los profesores. Los conocimientos explícitos en estos descriptores del CCC, son conocimientos que puede poseer cualquier otro profesional que sea capaz de hacer exitosamente las distintas tareas que los profesores de bachillerato asignan a sus estudiantes. Así, en este nivel educativo podemos decir que dicho conocimiento puede ser común entre profesores y matemáticos, profesores e ingenieros, profesores y arquitectos, etc.

---

[35] Sancionados en el mejor sentido de la palabra, es decir, acorde con la definición de *sancionar*: *"Dar fuerza de ley a una disposición o autorizar o aprobar cualquier acto, uso o costumbre"* (Real Academia de la Lengua Española).

Una vez que hemos expuesto los descriptores del CCC, nuestro siguiente paso es explicar los referentes al CEC.

CEC

Podemos distinguir cinco descriptores del ***conocimiento especializado del contenido*** del profesor (a pesar de que en los dos casos estudiados sólo obtuvimos evidencia de cuatro de ellos CEC1, CEC2, CEC4 y CEC5):

> **CEC1. Saber el significado de los conceptos.**
> **CEC2. Saber los pasos ocultos[36]: conocer la procedencia y las razones matemáticas por las que funcionan los procedimientos.**
> **CEC3. Saber qué conceptos, propiedades, reglas, etc., están tras una respuesta, pregunta o solución no estándar, inusual o inesperada de los estudiantes, lo que le permite saber si su razonamiento matemático funciona en general o no, así como justificar el pensamiento matemático que utiliza el estudiante, o describir matemáticamente el procedimiento que el estudiante está usando.**
> **CEC4. Saber la causa matemática de los errores comunes[37] de los estudiantes.**
> **CEC5. Conocer aspectos matemáticos de especial importancia para la enseñanza, lo que le permite hacer notar o distinguir la importancia de un aspecto matemático específico para enseñar el contenido matemático.**

Cabe señalar que los descriptores CEC3 y CEC4 pueden considerarse como los CEC1 y CEC2 en acción. Por su parte, el CEC5 podría incluirse en el CEC1 y CEC2, pero se destaca en el sentido de que son aspectos matemáticos que en ocasiones no poseen un

---

[36] Pasos ocultos se refiere a pasos que se dan en un procedimiento sin constancia escrita.

[37] En algún momento, el CEC4 puede verse como un caso particular del CEC3, pero queremos destacar que en el CEC4 se trata, en específico, de saber la causa matemática de los **errores comunes** de los estudiantes, mientras que el CEC3 es más amplio pues incluye el aspecto de saber la causa de los "errores" inusuales de los estudiantes, entre otros.

fundamento matemático tan profundo como en el caso del CEC1 y CEC2, sin embargo, subrayamos que es el profesor el profesional que sabe de la importancia de éstos para enseñar determinado contenido matemático y por ello siente la necesidad de hacerlos notar o distinguirlos. Por ejemplo, saber que en un determinante de orden dos se puede hablar de proporcionalidad entre filas y que en un determinante de orden tres eso se traduce a hablar de combinación lineal, quizás ese conocimiento sea común a otros profesionales (eg. con un matemático), pero es el profesor, a diferencia de estos otros, el que cae y hace caer en la cuenta de que en el determinante de orden tres al haber tres filas una se puede escribir como combinación lineal de las otras (cuando sea el caso), al explicar el subtema de determinantes.

A continuación ejemplificamos cada uno de estos descriptores del CEC.

CEC1. Saber el significado de los conceptos.

Ejemplo . En cuanto al significado del parámetro al expresar las infinitas soluciones en términos de éste.

Situación: (Aly, clase 13, líneas 42-87)
Cuando Aly explica a los estudiantes que en el conjunto de las infinitas soluciones su solución es la misma que la que propone el estudiante. La solución es $\left(1+\frac{z}{2},\frac{7z}{2},z\right)$, Aly expresa la solución como $\left(1+\lambda,7\lambda,2\lambda\right)_{\lambda\in\Re}$ con $z=2\lambda$ y el estudiante (E11) pregunta si esa solución es la misma que $\left(1+\frac{\lambda}{2},\frac{7\lambda}{2},\lambda\right)_{\lambda\in\Re}$ con $z=\lambda$.

Veamos las siguientes líneas de un trozo de la transcripción de la clase 13 de Aly, en las cuales Aly responde a E11 (frente a todo el grupo).

64 Aly: Claro que sí porque tu λ no es el mismo que mi λ, esa es tu solución x
65 igual a uno más λ partido por 2, y igual a 7λ partido por 2 y λ.
66 Ahora veamos mi solución, vamos a ponerle otra letra, digamos, α,
67 entonces mi solución es x igual a $1+\alpha$, y igual a 7α y z igual a 2α.

E2: Se multiplica en la solución de E11 por 2.
Aly: Claro, a E11 le va a salir en x el valor de 2, ¿para qué valor de λ?
Cuando λ vale 2 te queda 1 más 2 partido por 2, es 1 más 1,
2, ¿vale?
Y conmigo será la solución para α=1, es decir, la mitad
[comparado con λ=2] y también llego a la solución de x igual a
2.
El hecho es que el parámetro va recorriendo todos los números reales. Tú
vas a alcanzar tu solución y yo también la misma pero tú con un valor del
parámetro y yo con otro; distinto, pero la solución va a ser la misma. Es
decir, los números reales están presentes tanto aquí [en la solución de
E11] como aquí [en la solución de Aly]. Vale.
Entonces, es más cómodo escribirlas así [que no quede en forma de
quebrado].
Tal vez te choque un poco la primera vez que ves esto.
Esto [la solución de E11] es igual que esto [la solución de Aly], pues sí
son lo mismo.

Retomando un poco esto:

La solución es $\left(1+\frac{z}{2},\frac{7z}{2},z\right)$ y Aly expresa como solución $\left(1+\lambda,7\lambda,2\lambda\right)_{\lambda\in\Re}$ con $z=2\lambda$ y E11 $\left(1+\frac{\lambda}{2},\frac{7\lambda}{2},\lambda\right)_{\lambda\in\Re}$ con $z=\lambda$.

Aly aclara ante el grupo que en la solución de E11, para $\lambda=2$, E11 obtendrá $\boldsymbol{x=2}$. Y en la solución que ella propone, si cambia λ por α tendrá $\left(1+\alpha,7\alpha,2\alpha\right)_{\alpha\in\Re}$ y para $\alpha=1$ ella también obtiene $\boldsymbol{x=2}$. Aly intenta hacerles notar que obtendrán las mismas soluciones aunque con distinto valor del parámetro.

Con lo anterior, nosotros proponemos que un aspecto del CEC de Aly, evidenciado en este fragmento de la trascripción, es saber el significado del parámetro (que el parámetro va recorriendo todos los números reales) al expresar las infinitas soluciones de un sistema compatible indeterminado en términos de éste**. Es el profesor, a**

diferencia de otros profesionales, el que requiere del CEC para explicar a los estudiantes el significado de los conceptos matemáticos (sobre todo cuando es la primera vez que ven eso los estudiantes); en este caso, explicarles que aunque aparentemente vean que las soluciones son distintas (con distinto valor del parámetro) en el conjunto de infinitas soluciones es la misma solución. (Aly, clase 13, líneas 42-87); (Aly, clase 14, líneas 254-262).

CEC2. Saber los pasos ocultos[38]: conocer la procedencia y las razones matemáticas por las que funcionan los procedimientos.

Ejemplo. En cuanto a cuestionarse qué matemática de trasfondo puede haber para que la propiedad conmutativa del producto de los números reales no se cumpla en el producto de matrices.

De la clase 4 de Emi escribimos el siguiente aspecto del CEC:
[4.4] Saber que por la propia forma en que están definidas las operaciones con matrices, habrá algunas propiedades de los números reales que se cumplen en el producto de matrices y otras no. (350-366)

Situación: Emi les dice a los estudiantes que la definición del producto de dos matrices no es tan simple (como la suma de dos matrices o producto de un escalar por una matriz), que es bastante compleja y que entonces algunas propiedades de los números reales se cumplen en el producto de matrices y otras no. (350-366)

Eso es todo lo que Emi comenta a sus estudiantes al respecto, pero, ¿qué matemática de trasfondo puede haber ahí?, ¿cómo podría hacerse más explícito el conocimiento especializado del contenido en lo que Emi dice a sus estudiantes?
A continuación intentamos contestar a estas dos preguntas.

Sabemos que la suma de dos matrices y el producto de un escalar por una matriz están definidos como:
$A+B=(a_{ij}+b_{ij})$ y $\alpha A=(\alpha a_{ij})$ $para\ i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n\ y\ \alpha \in \Re$

[38] Pasos ocultos se refiere a pasos que se dan en un procedimiento sin constancia escrita.

sin embargo, el producto de dos matrices está definido como:

Si $A=(a_{ij})_{mxn}$ y $B=(b_{ij})_{nxp}$ entonces $AB=(c_{ij})_{mxp}$

donde $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

Es decir, el producto de dos matrices es más que sólo sumar o multiplicar número a número (como en el caso de la suma de matrices o el producto de un escalar por una matriz). Por un lado, para que se puedan multiplicar dos matrices, se debe cumplir que el número de columnas de la primera matriz debe ser igual al número de filas de la segunda, y por otro, **cada columna del producto AB es una combinación lineal de las columnas de A**, o sea, de la primera matriz factor, con lo cual ya no es tan sencillo que se cumplan las mismas propiedades que se cumplen para el producto de los números reales. Por ejemplo, en general $AB \neq BA$.

Plantearse continuamente qué matemática de trasfondo puede haber para que las propiedades se cumplan en un conjunto y no en otro, descubrir el porqué, indagar sobre las distintas estructuras algebraicas, etc.; y en sí, interesarse y ocuparse de la matemática pura que hay de trasfondo en los contenidos que enseña, puede ayudar al profesor a equiparse de herramientas matemáticas que puede usar para afrontar las diversas cuestiones matemáticas a las que se enfrenta en su quehacer diario, la enseñanza.

CEC3. Saber qué conceptos, propiedades, reglas, etc., están tras una respuesta, pregunta o solución no estándar, inusual o inesperada de los estudiantes, lo que le permite saber si su razonamiento matemático funciona en general o no, así como justificar el pensamiento matemático que utiliza el estudiante, o describir matemáticamente el procedimiento que el estudiante está usando.

Ejemplo. En cuanto a la respuesta inesperada o no estándar que pudiera dar un estudiante al calcular la suma de dos matrices.

Presentamos un caso hipotético de respuesta inusual que pudiera dar un estudiante. Suponiendo que al pedirles el profesor que calculen $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, un estudiante escribió que $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = (3,7);\ (5,9)$

Cuatro preguntas fundamentales puede hacerse el profesor:

¿Por qué ha escrito esa respuesta el estudiante?

¿Qué razonamiento matemático utiliza el estudiante para dar esa respuesta?

¿Cómo describir matemáticamente el procedimiento que el estudiante está usando?, ¿el procedimiento que utiliza, matemáticamente funciona en general?

Ante esta situación podemos considerar al menos dos opciones para el profesor:

1. Conjeturar de dónde pudo proceder esa respuesta, descubrir las razones e identificar el razonamiento matemático, describir matemáticamente el procedimiento que el estudiante usa y validar si ese procedimiento funciona en general, es simple casualidad o es erróneo, con el apoyo de la conversación con el estudiante que dio esa respuesta.
2. Conjeturar de dónde pudo proceder esa respuesta, descubrir las razones e identificar el razonamiento matemático, describir matemáticamente el procedimiento que el estudiante usa y validar si ese procedimiento funciona en general, es simple casualidad o es erróneo, sin el apoyo de la conversación con el estudiante que dio esa respuesta.

Ante esta segunda opción, podríamos pensar que el profesor se encuentre en la situación en la que sienta la necesidad de explicarles a sus estudiantes la respuesta dada por uno de ellos. Una posible explicación puede consistir en decirles que como vectores, $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ puede representar lo mismo que (3,7), que puede ser que el estudiante vea cada columna de la matriz como un vector y saber que los vectores pueden sumarse componente a componente y por ello dar el resultado de la suma de las dos matrices como (3,7); (5,9), obtenidos de sumar (2,4)+(1,3) y (3,5)+(2,4) respectivamente. El profesor pudiera justificar ese pensamiento matemático, suponiendo que el estudiante haya hecho sus cálculos de esa forma, al considerar el conjunto de matrices de orden *mxn* como un espacio vectorial (*M*), en particular, a las matrices de orden 2x2, pero espacio vectorial en cuanto a **vectores** en los que puede sumar componente a componente, olvidándose de la propiedad de cerradura de la suma en un espacio vectorial, es decir, de que la suma de *u* y *v* denotada por *u*+*v* está en *M* (*u, v є M*), a menos que el estudiante ordene el resultado que propone en una matriz de orden 2x2, de manera que quede explícito que si en este caso *u, v* son dos matrices de orden 2x2, *u*+*v* también será una matriz de orden 2x2.

El estudiante podría estar atendiendo a la convención matemática de que en el espacio **vectorial** de las matrices, **los vectores se escriben como columnas**, **pero a fin de cuenta se trata de vectores, y por ello el estudiante dé el resultado expresado en vectores separados y no en vectores agrupados en una matriz.**
El hecho de que el profesor trate de dar respuesta matemática a esas cuatro preguntas, surgidas a causa del pensamiento matemático de sus estudiantes, es lo que dará luz al CEC que el profesor necesita para la enseñanza de las matemáticas. Es decir, conjeturar de dónde pudo proceder una respuesta inesperada o inusual del estudiante, descubrir las razones matemáticas, identificar el razonamiento/pensamiento matemático que pudo generar esa respuesta, describir matemáticamente el procedimiento que el estudiante usa y validar si ese procedimiento funciona en general, es simple casualidad o es erróneo, son aspectos del CEC del profesor.

CEC4. Saber la causa matemática de los errores comunes de los estudiantes.

Ejemplo. En cuanto a saber que la causa matemática del error común de los estudiantes al aplicar la propiedad $\begin{vmatrix} a+b & e \\ c+d & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & e \\ d & f \end{vmatrix}$ (que se cumple también para filas), cuando tienen sumandos en dos filas del determinante, puede provenir de no aplicarla correctamente, al usarla dos veces al mismo tiempo, en lugar de usarla primero para una de las filas que tiene sumandos y después en la otra.
De la clase 8 de Aly escribimos el siguiente aspecto del CEC:

[8.1.1] Saber que al aplicar la propiedad $\begin{vmatrix} a+b & e \\ c+d & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & e \\ d & f \end{vmatrix}$ (que se cumple también para filas) cuando en dos filas hay sumandos, el error de los estudiantes puede provenir de no aplicar correctamente la propiedad, en particular, de aplicarla dos veces al mismo tiempo, en lugar de usar la propiedad primero en una fila y luego en otra, porque la primera vez deben dejar una fila fija. En este caso, hay que calcular $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$ sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$.

(Aly, clase 8, líneas 111-116):

Entonces hay que "descomponer" una fila y luego otra, así tenemos que

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x & 2y & 2z \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix}$$

pero $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x & 2y & 2z \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \ pues\, F_2 = 2F_1$

Entonces $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ ("descomponiendo" la tercera fila)

pero $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \ pues\, F_1 = F_3$ y en el ejercicio dan el dato de que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

Entonces $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = 1$

Hasta ahí se extendió la explicación de Aly. Queremos retomar este caso y considerar que se puede dar la situación que le propuso el estudiante E2 a Aly, que al final el resultado del ejercicio coincida al usar la propiedad dos veces al mismo tiempo, es decir,

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x+5 & 2y & 2z+3 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x & 2y & 2z \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \ pues \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2x & 2y & 2z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \ pues\, F_1 = F_3 \ y \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Aly insiste en varias ocasiones (líneas: 111-116 y 146-152) en que no deben usar la propiedad dos veces al mismo tiempo, sino usarla primero en una fila y luego en otra.

Consideramos que la profesora podría hacer algo más que sólo decirles insistentemente que *"no deben usar la propiedad dos veces al mismo tiempo sino usarla primero en una fila y luego en otra"*. Aly podría hacerles notar que, en general, se tiene que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d+e & f+g & h+i \\ j+k & l+m & n+o \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & f & h \\ j & l & n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ e & g & i \\ k & m & o \end{vmatrix}$$

porque en general $|A+B| \neq |A| + |B|$ y si desarrollamos $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d+e & f+g & h+i \\ j+k & l+m & n+o \end{vmatrix}$ tenemos que, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d+e & f+g & h+i \\ j+k & l+m & n+o \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} f+g & h+i \\ l+m & n+o \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d+e & h+i \\ j+k & n+o \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d+e & f+g \\ j+k & l+m \end{vmatrix}$

$\neq a\begin{vmatrix} f & h \\ l & n \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} g & i \\ m & o \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & h \\ j & n \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} e & i \\ k & o \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & f \\ j & l \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} e & g \\ k & m \end{vmatrix}$ pues $|A+B| \neq |A| + |B|$

$$= a\begin{vmatrix} f & h \\ l & n \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & h \\ j & n \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & f \\ j & l \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} g & i \\ m & o \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} e & i \\ k & o \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} e & g \\ k & m \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & f & h \\ j & l & n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ e & g & i \\ k & m & o \end{vmatrix}$$

Entonces $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d+e & f+g & h+i \\ j+k & l+m & n+o \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & f & h \\ j & l & n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ e & g & i \\ k & m & o \end{vmatrix}$

Es decir, la profesora podría mostrarles matemáticamente por qué no pueden aplicar la propiedad dos veces al mismo tiempo, y esto es parte de la matemática que ocupa el profesor para la enseñanza.

Otro aspecto del CEC consiste en <u>saber la(s) causa(s) matemática(s) de los errores de los estudiantes</u>, pues es él quien debe poseer la información sobre cuáles son los errores matemáticos más comunes cometidos por los estudiantes en determinado contenido. Conocer esas razones matemáticas de los errores de los estudiantes no es asunto propiamente de la matemática en sí, pero sí de la matemática que ocupa el profesor para la enseñanza. No obstante, además de saber esas causas, ocupa poner en acción, directamente en su labor docente, es decir, en la enseñanza, el conocimiento matemático adquirido de averiguarlas (*eg.* al explicar, hacer notar,

aclarar, recomendar, alertar, prevenir, preguntar, responder,…, etc. a sus estudiantes sobre el contenido).

CEC5. Conocer aspectos matemáticos de especial importancia para la enseñanza, lo que le permite hacer notar o distinguir la importancia de un aspecto matemático específico para enseñar el contenido matemático.

Ejemplo. En cuanto al conocimiento matemático que le permite al profesor hacerles notar que no hay forma de multiplicar tres matrices simultáneamente.

De la clase 4 de Emi, pudimos proponer el siguiente aspecto del CEC:

[4.4] Saber que la multiplicación de matrices es una operación binaria, y por tanto en caso de que haya que multiplicar tres matrices, les hace notar que deben anotar paréntesis o simplemente tomar en cuenta que se debe hacer primero el producto de dos matrices y luego el resultado por la otra matriz, es decir, saber que no hay forma de multiplicar tres matrices simultáneamente. (411-419)

Consideramos que para otros poseedores de conocimiento matemático, la propiedad asociativa en el producto de matrices no es más que multiplicar primero dos y luego el resultado por la tercera. Es el profesor, a diferencia de otros profesionales, el que a través de una reflexión, cae y hace caer en la cuenta de que la multiplicación es una operación binaria y que por tanto hemos de colocar paréntesis o simplemente tener en cuenta que hay que efectuar el producto de dos primero.

Con este ejemplo queremos destacar otro aspecto del CEC del profesor, el conocimiento matemático que posee, proveniente de la reflexión que tiene el profesor acerca de la importancia de aspectos matemáticos para la enseñanza, aspectos en los que es él, a diferencia de otros profesionales, el que cae y hace caer en la cuenta de éstos, de hacerlos notar y reforzarlos en la enseñanza.

Hasta ahora hemos hablado sólo de dos de los subdominos del **conocimiento del contenido** (del CCC y CEC), a continuación explicaremos los descriptores correspondientes al HM.

HM

En el ***horizonte matemático*** distinguimos seis descriptores:

> **HM1. Conocer las similitudes (las relaciones) entre varios conceptos matemáticos de un mismo tema o unidad.**
> **HM2. Saber cómo un contenido está relacionado con otro más general (incluso aunque no aborde esa forma más general en ese grupo porque el programa no lo incluye).**
> **HM3. Saber la aplicación del contenido en otras áreas.**
> **HM4. Saber cómo concretar un contenido con otro más específico.**
> **HM5. Saber cómo un contenido está relacionado con otros de cursos anteriores.**
> **HM6. Saber cómo un contenido está relacionado con otros de cursos posteriores.**

En cuanto al descriptor **HM1,** el hecho de consistir en conocer las relaciones entre varios conceptos matemáticos, suena bastante coherente con la propia definición del HM, sin embargo, estamos hablando del hecho de que dicha relación sea entre varios conceptos matemáticos de un mismo tema o unidad, es decir, de que ese horizonte sea muy próximo porque la relación entre esos contenidos sea muy cercana entre uno y otro. En realidad, lo ideal sería obtener evidencia de ese descriptor en cuanto a la relación de varios conceptos matemáticos pero no sólo de un mismo tema o unidad, sino de la relación de ese concepto en distintos tópicos, en distintos cursos y en distintas áreas, es decir, obtener evidencia de la relación del concepto intra y extramatemática.

Respecto a la relación intramatemática, presentamos además del **HM1** cuatro descriptores, el **HM2, HM4, HM5 y HM6**. Éstos están orientados a saber la aplicación del objeto matemático (a enseñar) en otros tópicos matemáticos tanto posteriores (**HM6**) como anteriores (**HM5**) o a **s**aber cómo un contenido está relacionado con otro más general (**HM2**) o a cómo concretar un contenido con otro más específico (**HM4**). Y respecto a la relación extramatemática, presentamos el descriptor **HM3**.

Con estos seis descriptores podemos hablar de tres niveles abiertos del propio *horizonte matemático*, es decir: en un primer nivel, lo correspondiente a la estrecha relación entre objetos matemáticos dentro de una misma unidad o tema; en un segundo nivel, la relación de un objeto matemático con otros que aparecen anteriores o posteriores a él o la relación de un contenido con otro más general o más específico, en las distintas etapas de escolarización[39]; y en un tercer nivel, la relación del objeto matemático con otras áreas de conocimiento (física, sociología, economía, etc.).

Si bien es cierto que el límite del *horizonte matemático* nunca será alcanzado porque por más que se profundice en el conocimiento sobre un objeto matemático, siempre será posible encontrar más y más conexiones con objetos existentes y nuevos objetos relacionados con los anteriores, al centrarse en el segundo nivel, podríamos conocer, además de nuevas conexiones entre objetos matemáticos, los orígenes del objeto matemático a enseñar y la aplicación de ese objeto con otros, así como definiciones alternativas, historias y evoluciones del objeto matemático dentro de la matemática.

Por su parte, en el tercer nivel, la orientación es hacia la aplicación del objeto matemático en otras áreas de conocimiento. De ahí también podríamos conocer otras representaciones y definiciones usadas para describir el objeto matemático, además de poder conocer, al igual que en el segundo nivel, los orígenes del objeto matemático, es decir, si consideramos que la génesis de algunos objetos matemáticos surge de otras áreas, o sea, existen objetos matemáticos cuyo origen precede de otras áreas y no propiamente de la matemática (eg. la ecuación del calor). Entonces podríamos comprender el contexto en el que surge dicho objeto, definiciones alternativas, historias y evoluciones del objeto matemático en otras áreas y entender mejor el propio objeto matemático a enseñar.

[39] Un trabajo actual con relación al HM que versa sobre la importancia del conocimiento del profesor durante la transición escolar de primaria a secundaria es estudiado en Fernández y Figueras (2010).

En este apartado, hasta el momento hemos comentado aspectos referentes a los subdominios de uno de los dos dominios del CME, es decir, del conocimiento del contenido; a continuación iniciamos la discusión respecto a los subdominos del otro dominio del CME, es decir, del conocimiento didáctico del contenido.

CC-Es

En el subdominio del ***conocimiento del contenido y estudiantes*** distinguimos 20 descriptores:

CC-Es1. Saber escuchar e interpretar el conocimiento o pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje (común o en proceso de adquisición del nuevo concepto –mezcla de lenguaje común con matemático).

CC-Es2. Saber las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre el contenido matemático.

CC-Es3. Prever la confusión que pudiera tener el alumno con algún aspecto específico del contenido que se esté viendo en clase.

CC-Es4. Prever (anticipar) que los estudiantes no saben o no recuerdan un concepto o propiedad matemática.

CC-Es5. Prever (anticipar) que los estudiantes se pueden quedar con una imagen o idea inadecuada del contenido.

CC-Es6. Saber lo que a los estudiantes les parecerá cansado y aburrido de un contenido matemático específico.

CC-Es7. Saber que los estudiantes pueden equivocarse al hacer determinado cálculo de un número o de un signo (más leve), provocado por un despiste al hacer una(s) operación(es) o transformación(es), o por no dominar el contenido que se les está presentando.

CC-Es8. Saber que los estudiantes deben proceder ordenadamente respetando las convenciones matemáticas, para evitar confusiones y errores.

CC-Es9. Saber que los estudiantes podrían hacer cálculos mecánicamente sin saber realmente lo que están haciendo.

CC-Es10. Saber que a los estudiantes se les puede ocurrir una respuesta intuitiva para resolver un problema.

CC-Es11. Prever que los estudiantes no vean que un problema es equivalente a otro; o que no vean que una igualdad la pueden usar en un sentido o en otro.

CC-Es12. Saber que los estudiantes pueden ponerse a hacer cálculos sin antes fijarse en si pueden usar una propiedad.

CC-Es13. Saber que para los estudiantes será más comprensible un tema si lo ven con un ejemplo concreto (que puede aparecer en el libro de texto).

CC-Es14. Saber que los estudiantes entenderán "mejor" el ejemplo si antes de empezar a hacerlo se les remarcan las principales características del concepto que se usará en el ejemplo.

CC-Es15. Saber que los estudiantes pueden atascarse en algunos detalles de la solución del problema y perder el sentido del problema.

CC-Es16. Saber que a los estudiantes les puede parecer extraño usar por primera vez un método o regla que estaba diseñado para otro caso o situación del contenido.

CC-Es17. Saber que los estudiantes, al resolver problemas extensos, pueden olvidar algún cálculo que ya habían hecho al inicio y no aprovecharlo cuando se utilice nuevamente para solucionar el mismo problema.

CC-Es18. Prever que los estudiantes divaguen definiendo más variables de las que necesitan para resolver un problema.

CC-Es19. (Antes CC-En-Es6) Saber que los estudiantes pueden resolver fácilmente alguna parte operacional (algún sistema de ecuaciones, alguna ecuación de segundo grado, algún determinante) del procedimiento.

CC-Es20. Saber lo que a los estudiantes les parecerá interesante, motivador o desafiante en el ejemplo que el profesor elija para enseñar el contenido.

En el descriptor **CC-Es1**, queremos destacar la capacidad que tiene el profesor para saber escuchar e interpretar el conocimiento o pensamiento matemático que expresan sus estudiantes, ya sea en lenguaje común o en un lenguaje en el que mezclan el lenguaje común con el lenguaje matemático cuando están en el proceso de adquisición del nuevo objeto matemático. En varias ocasiones, los estudiantes al articular sus preguntas, respuestas o comentarios acerca del contenido matemático, las expresan en un lenguaje familiar a ellos, sobre todo mientras se acostumbran al lenguaje matemático y a las convenciones matemáticas; y es el profesor quien pone en juego su capacidad para escuchar e interpretar ese pensamiento matemático y a su vez, poner en acción varios conocimientos para darle el tratamiento que él considere más apropiado.

El descriptor **CC-Es2** pudiera ser uno de los descriptores más generales, debido a que consiste en saber las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre un contenido matemático. Nuestra intención es destacar ese conocimiento, a sabiendas de que podríamos debatir si alguno o algunos de los demás descriptores que proponemos para el CC-Es pudieran quedar incluidos en éste. Sin embargo, consideramos conveniente dejar este descriptor general porque tal como está posiblemente dé luz sobre distintos matices en estudios posteriores.

En el descriptor **CC-Es3** queremos hacer notar el conocimiento matemático que le permite al profesor prever la confusión que pudiera tener un estudiante con algún aspecto específico del contenido que se esté viendo en clase, de tal forma que, con el propósito de evitar que los estudiantes cometan un error a causa de su confusión, el profesor normalmente hace un comentario para prevenirlos.

El descriptor **CC-Es4** consiste en el conocimiento que le permite anticipar que los estudiantes no saben o no recuerdan algún concepto o propiedad matemática y por ello considera conveniente hacerles una aclaración o comentario en el que les hace notar en qué consiste ese concepto o propiedad matemática justo en el momento en el que el profesor lo utiliza para explicar una definición de otro concepto, regla, propiedad o teorema; o cuando lo requiere para hacer un ejemplo, ejercicio o problema.

En el descriptor **CC-Es5** referido a prever que los estudiantes se pueden quedar con una imagen o idea inadecuada del contenido, cuando el profesor anticipa ese hecho, interviene y hace una aclaración o comentario como medida preventiva para evitar que los estudiantes se queden con una imagen o idea incorrecta del contenido que afecte el aprendizaje de los estudiantes.

El descriptor **CC-Es6** consiste en saber lo que a los estudiantes les parecerá cansado y aburrido de un contenido matemático específico. Normalmente, cuando el profesor cuenta con varios años de experiencia impartiendo un mismo tema, o por experiencia propia, aprende patrones de comportamiento de los estudiantes cuando presenta un contenido, de tal forma que el profesor puede formarse una imagen, en particular, de lo que a los estudiantes les parecerá cansado o aburrido.

En el descriptor **CC-Es7** queremos destacar el conocimiento que le permite saber que los estudiantes pueden equivocarse al hacer determinado cálculo de un número o de signo (más leve), provocado por un despiste al hacer una(s) operación(es) o transformación(es), o por no dominar el contenido que se les está presentando. La etiqueta "más leve" es para distinguirlo del **CC-Es9**, pues en el **CC-Es7** se trata de una equivocación al hacer un cálculo de un número o signo, causado por un despiste o porque están en el proceso de adquisición del nuevo contenido, a diferencia del **CC-Es9**, que se refiere a equivocaciones que pueden tener los estudiantes por hacer cálculos mecánicamente sin saber realmente lo que están haciendo, es decir, sin tener conciencia de lo que están realizando.

El descriptor **CC-Es8** consiste en saber que los estudiantes deben proceder ordenadamente respetando las convenciones matemáticas, para evitar confusiones y errores. En éste, queremos destacar el hecho de saber que los estudiantes deben proceder ordenadamente de acuerdo o atendiendo a las convenciones matemáticas. Nuevamente, cuando el profesor distingue esto último, hace una aclaración o comentario haciéndoles notar que deben poner atención en el orden establecido en las convenciones matemáticas, no sólo para no confundirse o equivocarse sino también para darse a entender en lenguaje matemático. Por ejemplo, saber que los estudiantes se pueden equivocar al escribir el sistema en forma matricial, que no pongan las equis debajo de las equis, las y's debajo de las y's y las z's debajo de las z's; o prever que algún estudiante pudiera escribir la solución del sistema sin seguir la convención matemática de que siempre se anota el valor de las incógnitas en el orden en que aparecen dadas (x, y, z).

En el descriptor **CC-Es10** queremos hacer distinguir que el profesor sepa que a los estudiantes se les puede ocurrir una respuesta intuitiva para resolver un problema. El evento que nos dio luz a este descriptor fue uno en el que la profesora (Emi) estaba presentando un ejemplo en el que había que resolver un problema de programación lineal. Ella sabía que a los estudiantes se les podría ocurrir dar una respuesta intuitiva (proveniente inclusive de su sentido común), pero ella quería hacerles notar que esa respuesta intuitiva no es la adecuada para solucionar el problema. Nosotros proponemos el descriptor porque queremos enfatizar el "saber que a los estudiantes se les puede ocurrir una respuesta intuitiva", es decir, destacar el hecho de que el profesor cuente con ese saber (aunque en algunos casos esa respuesta intuitiva sea la adecuada o en otros no, para resolver el problema).

El descriptor **CC-Es11** consiste en prever que los estudiantes no vean que un problema es equivalente a otro; o que no vean que una igualdad la pueden usar en un sentido o en otro. En este descriptor queremos hacer notar el conocimiento que le permite prever que los estudiantes "no vean" algún aspecto importante del contenido que pudiera ayudarles a resolver un problema. En este descriptor también podemos distinguir el obstáculo de los estudiantes para entender el significado de la igualdad (Prediger, 2010), en particular, para comprender que la igualdad la pueden ver en un sentido o en otro (por la propia propiedad simétrica en la relación de equivalencia, i.e., si a=b entonces b=a)

En el descriptor **CC-Es12** referido a saber que los estudiantes pueden ponerse a hacer cálculos sin antes fijarse en si pueden usar una propiedad, queremos destacar que el descriptor no es propiamente sobre errores que pueden cometer los estudiantes sino que corresponde a anticipar que los estudiantes pueden ponerse a hacer cálculos innecesarios cuando pueden aplicar una propiedad y terminar más rápido el ejercicio, es decir, no necesitarían hacer los cálculos sino sólo poner atención e identificar si pueden utilizar una propiedad y posteriormente justificar la propiedad que utilicen.

El descriptor **CC-Es13** consiste en saber que para los estudiantes será más comprensible un tema si lo ven con un ejemplo concreto (que puede aparecer en el libro de texto). En este descriptor hay una mezcla de dos aspectos muy importantes en la enseñanza, el "uso de ejemplos" y el "uso del libro de texto", pero en este caso nos interesa distinguir el conocimiento que le permite al profesor "saber que para los estudiantes será más comprensible un tema si ...". Similarmente en el **CC-Es14**, que consiste en saber que los estudiantes entenderán "mejor" el ejemplo si antes de empezar a hacerlo se les remarcan las principales características del concepto que se usará en el ejemplo, destacamos el conocimiento que le permite "saber que los estudiantes entenderán mejor el ejemplo si...". Ambos descriptores están estrechamente relacionados al CC-En.

En el descriptor **CC-Es15**, referido a saber que los estudiantes pueden atascarse en algunos detalles de la solución del problema y perder el sentido del problema, queremos hacer notar el conocimiento que tiene el profesor para saber que los estudiantes pueden atorarse o despistarse con algún dato de la solución y que esa sea la causa para que los estudiantes no resuelvan el ejercicio o problema. Por ejemplo, en el caso en el que el ejercicio consista en calcular el rango de una matriz y en el que el determinante de orden 3 da 0 y no se ve tan fácilmente la dependencia lineal entre filas o columnas, saber que puede haber estudiantes a quienes les preocupe o les sea más importante ver cuál sería la dependencia lineal y perder el sentido del problema, es decir, saber que este dato puede despistar a los estudiantes, que pueden estancarse ahí y no terminar de resolver el sistema de ecuaciones.

El descriptor **CC-Es16** consiste en saber que a los estudiantes les puede parecer extraño usar por primera vez un método o regla que estaba diseñado para otro caso o situación del contenido. Este descriptor fue inspirado por una situación en la que la profesora (Aly) sabía que a los estudiantes les podría parecer extraño usar la regla de Cramer en un sistema compatible indeterminado y que por ello no la utilicen a pesar de que se cumplan las condiciones para aplicar la regla de Cramer. Esto está relacionado con el hecho de que normalmente en los ejemplos que han realizado en clase han utilizado la regla de Cramer pero para sistemas compatibles determinados.

En el descriptor **CC-Es17,** referido a saber que los estudiantes al resolver problemas extensos pueden olvidar algún cálculo que ya habían hecho al inicio y no aprovecharlo cuando se utilice nuevamente para solucionar el mismo problema; queremos destacar el conocimiento que le permite al profesor saber que los estudiantes pueden olvidar alguno de varios resultados del problema y que por la propia laboriosidad o extensión del problema, cuando lo utilicen en ese mismo problema, se olviden de que ya lo tienen y vuelvan a calcularlo. Normalmente, cuando el profesor posee ese conocimiento, al hacer un ejemplo extenso, les hace notar que deben tener cuidado y aprovechar cada uno de los resultados obtenidos para resolver el problema o hacer el ejemplo o ejercicio.

El descriptor **CC-Es18** consiste en prever que los estudiantes divaguen definiendo más variables de las que necesitan para resolver un problema. Este descriptor surge específicamente de una situación en la que la profesora (Emi) quiere que los estudiantes hagan un problema de programación lineal y a ella no le interesa que los estudiantes pierdan tiempo en estar divagando la definición de más variables de las que necesitan, ya que por culpa de ello podría no darles tiempo a resolver el problema. Por lo tanto la profesora quiere que se centren en definir sólo dos variables y a partir de ahí solucionen el problema. Por ello les comenta que todos los problemas que van a hacer respecto al subtema de programación lineal se resuelven con dos variables.

En el descriptor **CC-Es19** queremos destacar el conocimiento que le permite saber que los estudiantes pueden resolver fácilmente alguna parte operacional (algún sistema de ecuaciones, alguna ecuación de segundo grado, algún determinante) del procedimiento. Ese descriptor surgió inicialmente de la situación en la que la profesora (Aly) da por hecho que los estudiantes pueden resolver sin problema una parte operacional de procedimiento y por ello sólo anota el resultado de esas operaciones sin desarrollarlas; es decir, al saber que los estudiantes pueden resolver fácilmente dos sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas y sin escribir el procedimiento, Aly sólo anota los valores resultantes de las incógnitas, cuyos valores representan la matriz inversa en el ejemplo.

El descriptor **CC-Es20**, que consiste en saber lo que a los estudiantes les parecerá interesante, motivador o desafiante en el ejemplo, ejercicio o problema que el profesor elija para enseñar el contenido, está directamente relacionado con el "uso de ejemplos", en particular con las consideraciones que toma en cuenta el profesor al seleccionar los ejemplos, ejercicios o problemas que utilizará para enseñar el contenido.

Así pues, en los descriptores del CC-Es podemos identificar conocimientos de distinta naturaleza. Algunos de ellos están orientados a diversos tipos de equivocaciones que pudieran realizar los estudiantes por diferentes razones (eg. equivocarse al hacer cálculos porque se despistaron o por hacer cálculos mecánicamente sin saber lo que están haciendo, porque se confundieron, porque no proceder ordenadamente respetando las convenciones matemáticas, porque tienen una imagen o idea inadecuada del contenido). Otros son referidos al conocimiento acerca de las dificultades o necesidades de los estudiantes, a saber escuchar el conocimiento o pensamiento que expresan los estudiantes en su lenguaje usual o en su lenguaje en proceso de adquisición del nuevo concepto en el que mezclan lenguaje común con lenguaje matemático.

También proponemos descriptores enfocados a saber lo que a los estudiantes les parecerá interesante, motivador o desafiante en el ejemplo, ejercicio o problema o a saber lo que los estudiantes pueden resolver fácilmente en alguna parte operacional del procedimiento; pero además a la habilidad que tiene el profesor para prever cuando los estudiantes no saben o no recuerdan un concepto o propiedad matemática; inclusive, a saber lo que a los estudiantes les parecerá cansado y aburrido de un contenido matemático específico.

En otros descriptores intentamos exhibir conocimientos respecto a saber que a los estudiantes se les puede ocurrir una respuesta intuitiva para resolver un problema; a saber que para los estudiantes será más comprensible un tema si lo ven con un ejemplo concreto que aparece en el libro de texto o a saber que los estudiantes entenderán "mejor" el ejemplo si antes de empezar a hacerlo se les remarcan las principales características del concepto que se usará en el ejemplo. Algunos más son expresados en términos de prever que los estudiantes no vean que un problema es equivalente a otro; o que no vean que una igualdad la pueden usar en un sentido o en otro, o que se pongan a hacer cálculos sin antes fijarse en si pueden usar alguna propiedad matemática, es decir, que no vean o se fijen en aspectos que les pueden servir para resolver más rápido un problema.

Además, proponemos otros descriptores que consisten en saber que los estudiantes pueden atascarse en algunos detalles de la solución del problema y perder el verdadero sentido del problema; o saber que los estudiantes, al resolver problemas extensos, pueden olvidar algún cálculo que ya habían hecho al inicio y no aprovecharlo cuando se utilice nuevamente para solucionar el mismo problema. Pero también hay otros referidos a saber que a los estudiantes les puede parecer extraño usar por primera vez un método o regla que estaba diseñado para otro caso o situación del contenido o a prever que los estudiantes divaguen definiendo más variables de las que necesitan para resolver un problema.

En resumen, los descriptores globales serían: Saber escuchar e interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes; conocer necesidades y dificultades de los estudiantes; prever confusiones y/o equivocaciones de los estudiantes; prever lo que los estudiantes no saben, no recuerdan, no ven o no se fijen; prever que los estudiantes se pueden quedar con una imagen inadecuada del contenido tras una explicación del profesor; prever lo que les parecerá cansado y aburrido a los estudiantes; saber lo que les parecerá interesante, motivador o desafiante; saber que a los estudiantes se les puede ocurrir una respuesta intuitiva; saber lo que para los estudiantes será más comprensible del contenido o lo que podrán resolver fácilmente; conocer obstáculos comunes de los estudiantes para llegar a la solución de un ejercicio o problema.

De tal forma que en un esfuerzo por categorizar esos descriptores globales del CC-Es podemos proponer las siguientes categorías y los descriptores que quedarían incluidos: *Escuchar e interpretar* (CC-Es1); *necesidades y dificultades* (CC-Es2); *confusiones y/o equivocaciones* (CC-Es3, CC-Es7, CC-Es8, CC-Es9); *no saben/no recuerdan/no ven/o no se fij*en (CC-Es4, CC-Es11, CC-Es12); *quedarse con una imagen inadecuada* (CC-Es5); *cansado y aburrido* (CC-Es6); *interesante, motivador o desafiante* (CC-Es20); *respuesta intuitiva* (CC-Es10); *lo que les será más comprensible o resolver fácilmente* (CC-Es13, CC-Es14, CC-Es19); *obstáculos comunes para llegar a la solución* (CC-Es15, CC-Es16, CC-Es17, CC-Es18).

Por otra parte, a continuación presentamos los descriptores correspondientes a otro de los subdominios del conocimiento didáctico del contenido, en concreto, al CC-En.

CC-En

En el subdominio ***conocimiento del contenido y enseñanza****,* establecimos algunas “categorías” o agrupamientos de los descriptores respecto a un “issue”: *Ejemplos; ayudas; gestión de la participación; traducir; hacer notar o remarcar; alertar; preparar actividades y forma de presentar o representar*. A continuación presentamos cada uno de los descriptores correspondientes a estos agrupamientos.

Ejemplos

CC-En1. Saber con qué ejemplo o ejercicio empezar, cuándo y cuáles usar para enfatizar, reforzar o generalizar cierta idea.

CC-En2. Saber que la aplicación del concepto en un ejemplo le es útil para inducir luego la definición del concepto.

CC-En3. Saber que una de las potencialidades de un ejemplo, en concreto al desarrollarlo, es utilizarlo para destacar los aspectos relevantes del contenido matemático que pretende enseñarles ese día en clase.

CC-En4 (Antes CC-En-Es4). Saber usar ejemplos con datos concretos, en lugar de desarrollar propiedades de forma general o con ejemplos genéricos, para explicar el contenido.

CC-En5. Saber que al explicar un ejemplo o un ejercicio es importante que los estudiantes vean que los resultados obtenidos del ejemplo o ejercicio tienen un significado concreto.

CC-En6. Saber qué ejercicios dejarles de deberes para que practiquen.

En el descriptor **CC-En1** queremos destacar el conocimiento de que el profesor sepa con cuál ejemplo es más conveniente iniciar y cuándo y cuáles usar para enfatizar, reforzar o generalizar cierta idea matemática. Incluye saber si empieza con ejemplos sencillos y luego de mayor laboriosidad y complejidad; o hacer un ejemplo de un problema histórico y luego resolver problemas más actuales; o hacer primero un ejemplo que viene resuelto en el libro de texto; o cuáles ejemplos le pueden ser más útiles para resaltar o fortalecer el contenido que pretende enseñar; o cuáles ejemplos le pueden ser útiles para generalizar posteriormente cierta idea matemática.

El descriptor **CC-En2** consiste en saber que la aplicación del concepto en un ejemplo le es útil para inducir luego la definición del concepto. En este descriptor queremos hacer notar el conocimiento que le permite al profesor presentar el concepto a través del ejemplo, es decir, se usa el ejemplo (o ejemplos) para inducir poco a poco a la definición del concepto, de tal forma que después del ejemplo (o ejemplos) el profesor consolida el cable de conexión entre ejemplo y definición dando la definición del concepto.

En el descriptor **CC-En3** referido a saber que una de las potencialidades de un ejemplo, en concreto al desarrollarlo, es utilizarlo para destacar los aspectos relevantes del contenido matemático que pretende enseñarles ese día en clase, queremos destacar otra de las funcionalidades del ejemplo para enseñar un contenido. En particular, el profesor aprovecha un ejemplo para enfatizar los aspectos que considera más importantes del contenido que procura enseñar en la clase. Aquí se ve reflejada, implícita o explícitamente, la capacidad que tenga el profesor para elegir los ejemplos.

El descriptor **CC-En4 (Antes CC-En-Es4)** consiste en saber usar ejemplos con datos concretos, en lugar de desarrollar propiedades de forma general o con ejemplos genéricos, para explicar el contenido. Incluye saber que al exponer un concepto, regla, propiedad, teorema o método, si utiliza ejemplos con datos o números concretos les puede quedar más clara la idea a los estudiantes, en comparación a si usa un ejemplo genérico con notación matemática elegante o si hace una demostración formal (cuando sea el caso).

En el descriptor **CC-En5**, referido a saber que al explicar un ejemplo o un ejercicio es importante que los estudiantes vean que los resultados obtenidos del ejemplo o ejercicio tienen un significado concreto, queremos destacar el papel de ver o darle significado al resultado obtenido en el ejemplo, ejercicio o problema, del interés del profesor para que los estudiantes vean una aplicación concreta del concepto. Esto podría funcionar aún mejor si la aplicación es familiar a ellos (con datos cercanos a su entorno) o donde ellos mismos son los protagonistas en el ejemplo.

El descriptor **CC-En6** consiste en saber qué ejercicios dejarles de deberes para que practiquen. Normalmente, los profesores encomiendan de deberes (tareas) ejercicios o problemas similares a los que han realizado en clase, más fáciles o más difíciles desde el punto de vista del profesor; o algunas veces les encargan de deberes que terminen algún ejemplo, ejercicio o problema que ya no dio tiempo a terminar en clase (puede ser uno(s) que el profesor estaba haciendo o uno(s) que los estudiantes estaban realizando); el profesor sabe además de qué dejarles de deberes, hasta dónde dejarles de deberes (eg. que sólo hagan el planteamiento del problema porque luego harán en clase la solución del problema).

Ayudas

CC-En7. Saber qué ayudas dar a los estudiantes en situaciones de confusión o dificultad, para que puedan dar solución a un ejercicio o resolver un problema.
CC-En8. Saber que una "buena" estrategia para que los estudiantes comprendan o hagan un ejemplo, ejercicio o problema, consiste en explicarles o hacerles hincapié en lo que quiere que hagan y para qué quiere que lo hagan o simplemente explicarles de lo que trata el ejercicio o problema.
CC-En9. Saber cómo señalar a los estudiantes algún dato del problema que no aparece explícito y que luego se usará para dar solución a un ejercicio o resolver un problema.

Del descriptor **CC-En7**, referido a saber qué ayudas dar a los estudiantes en situaciones de confusión o dificultad, para que puedan dar solución a un ejercicio o resolver un problema; queremos destacar que en ocasiones las ayudas pueden ser puntuales ("empujoncitos") para dar solución a un ejercicio o problema; o en otras, de plano llegar a ayudarles a hacer el ejercicio completo en situaciones especiales. Por ejemplo, en la situación en la que el profesor, a solicitud de ayuda de un estudiante, se acerca para explicarle personalmente, en el cuaderno del estudiante, cómo se calcula el producto de dos matrices cuadradas de orden 3, y después de repetirle varias veces el procedimiento al estudiante y ver que aparentemente el estudiante ha entendido el proceso, el profesor sin alejarse observa que el estudiante vuelve a equivocarse al hacer el producto y nuevamente le pide ayuda, entonces el profesor decide terminar de hacerle el ejercicio pero con la participación del estudiante .

El descriptor **CC-En8** consiste en saber que una "buena" estrategia para que los estudiantes comprendan o hagan un ejemplo, ejercicio o problema, consiste en explicarles o hacerles hincapié en lo que quiere que hagan y para qué quiere que lo hagan o simplemente explicarles de lo que trata el ejercicio o problema. En varias ocasiones, el profesor se desespera al ver que al proponer un ejercicio o problema, los estudiantes no hacen nada para solucionarlo, simplemente porque no entienden de qué trata el ejercicio o problema, es decir, no entienden lo que "pide" el problema o en algunas otras ocasiones no entienden qué quiere el profesor que ellos hagan o cuál es el propósito de hacerlo. Por ello, el profesor, tratando de solucionar ese problema, decide hacerles saber explícitamente lo que "pide" hacer en el ejercicio o problema y enfatizarles en concreto lo que quiere que hagan y para qué. Inclusive, cuando hace un ejemplo también se lo hace saber. Todo lo anterior, con la finalidad de que los estudiantes comprendan y hagan el ejemplo, ejercicio o problema.

El descriptor **CC-En9**, acerca de saber cómo señalar a los estudiantes algún dato del problema que no aparece explícito y que luego se usará para dar solución a un ejercicio o resolver un problema, pudiera ser parte del descriptor referente a las ayudas puntuales. Sin embargo, queremos distinguir el hecho de que esa ayuda consista específicamente en saber cómo señalar algún dato que está implícito en el problema y que juega un papel importante para poder hacer el ejercicio o resolver el problema, y por ello el profesor siente la necesidad de hacérselo saber a los estudiantes.

Gestión de la participación (GP).

GP1. Preguntas
(Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático)

CC-En10. Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático, para hacer ver a los estudiantes que la respuesta de un estudiante es equivocada y orientar la pregunta a la respuesta que el profesor(a) quiere escuchar.

CC-En11. Saber qué preguntas formular, no necesariamente a cierto estudiante, para presentar o mostrar específicamente lo más importante del contenido que está enseñando (algunas veces las contesta ella misma y otras los estudiantes).

CC-En12. Saber qué preguntas formular para presentar un nuevo concepto, una nueva propiedad o una clasificación.

CC-En13. Saber qué preguntas formular sobre el contenido para involucrar a estudiantes pasivos.

CC-En14. Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático para gestionar por lo menos una participación pasiva de los demás estudiantes,

cuando existe un diálogo entre el profesor y un determinado estudiante, para que se planteen el porqué de lo que se va exponiendo en el diálogo.

CC-En15. Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático para ir guiando la solución de un ejemplo o ejercicio, resolver un problema o hacer una representación gráfica.

El descriptor **CC-En10** consiste en saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático, para hacer ver a los estudiantes que la respuesta de un estudiante es equivocada y orientar la pregunta a la respuesta que el profesor(a) quiere escuchar. En este descriptor queremos distinguir la capacidad que tiene el profesor para saber las preguntas que ha de hacer para mostrarles a los demás estudiantes que la respuesta que ha dado uno de ellos es errónea y a la vez no salirse de la idea matemática (contenido) que desea enseñarles en esa clase.

En el descriptor **CC-En11**, referido a saber qué preguntas formular, no necesariamente a cierto estudiante, para presentar o mostrar específicamente lo más importante del contenido que está enseñando (algunas veces las contesta ella misma y otras los estudiantes); el foco está en saber qué preguntas hacerles para distinguir los aspectos matemáticos más relevantes que pretende que los estudiantes dominen y no necesariamente en saber a qué estudiante(s) hacerle(s) la pregunta. Es por ello que algunas veces el propio profesor se contesta las preguntas y otras los estudiantes.

El descriptor **CC-En12** consiste en saber qué preguntas formular para presentar un nuevo concepto, una nueva propiedad o una clasificación. Es decir, introduce una nueva pregunta y la utiliza como "*parte aguas*" para introducir el nuevo concepto, propiedad o clasificación. En este descriptor queremos destacar la capacidad que tiene el profesor para saber las preguntas que ha de hacer para presentar un nuevo contenido, pero también la utilidad que le da el profesor a esas preguntas, pues le sirven para separar el contenido que acaban de ver y el nuevo contenido que les va a presentar, por ello la expresión *"parte aguas"*.

En el descriptor **CC-En13,** acerca de saber qué preguntas formular sobre el contenido para involucrar a estudiantes pasivos, nos interesa destacar el saber del profesor sobre las preguntas que ha de articular para hacer partícipes en la presentación del contenido a estudiantes que comúnmente no se atreven a hacerlo.

El descriptor **CC-En14**, consiste en saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático para gestionar por lo menos una participación pasiva de los demás estudiantes, cuando existe un diálogo entre el profesor y un determinado estudiante, para que se planteen el porqué de lo que se va exponiendo en el diálogo. En este descriptor queremos distinguir el saber del profesor acerca de las preguntas que ha de hacer para tomar en cuenta a los demás estudiantes y no sólo al estudiante con el que principalmente establece la discusión, de modo que todos participen activamente en el contenido. Es decir, no se trata de participar por participar sino de participar tomando como eje rector el contenido matemático que se está discutiendo.

En el descriptor **CC-En15,** referido a saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático para ir guiando la solución de un ejemplo o ejercicio, resolver un problema o hacer una representación gráfica, queremos destacar el saber qué preguntas ha de hacer, específicamente, para ir efectuando el proceso necesario para desarrollar la solución de un ejemplo, ejercicio o problema o simplemente para elaborar una representación gráfica.

GP2. Respuestas

CC-En16. Saber qué respuestas de los estudiantes aceptar, cuáles interrumpir, cuáles ignorar o cuáles destacar, para alcanzar los objetivos de la enseñanza del contenido trazados por la profesora para esa clase.

CC-En17. Saber cómo orientar una respuesta correcta a un lenguaje matemático aceptado en la matemática escolar, es decir, atendiendo o enfocado a una convención matemática.

CC-En18. Saber cómo aprovechar las respuestas incorrectas de los estudiantes para hacerles ver las consecuencias de éstas en el contenido matemático.

CC-En19. Saber cómo aprovechar la respuesta de un estudiante, corregirla y utilizarla para explicar algún aspecto del contenido.

CC-En20. Saber cómo aprovechar la respuesta de un estudiante, referente al contenido, para corregir la de otro.

CC-En21. Saber cómo aprovechar las respuestas de los estudiantes aportadas en la discusión que se presenta en el grupo para hacerles notar algún aspecto incorrecto del contenido.

El descriptor **CC-En16**, consiste en saber qué respuestas de los estudiantes aceptar, cuáles interrumpir, cuáles ignorar o cuáles destacar, para alcanzar los objetivos de la enseñanza del contenido trazados por la profesora para esa clase. Este descriptor es uno de los más completos en cuanto a gestión de la participación en la enseñanza del contenido, específicamente, en cuanto a las respuestas de los estudiantes, pues integra varios aspectos del conocimiento del profesor a ese respecto, tanto saber cuáles admitir (y algunas veces completar), cuáles detener, cuáles no tomar en cuenta o cuáles recalcar; sin perder de vista el(los) objetivo(s) del contenido matemático que quiere enseñar ese día.

En el descriptor **CC-En17** acerca de saber cómo orientar una respuesta correcta a un lenguaje matemático aceptado en la matemática escolar, es decir, atendiendo o enfocado a una convención matemática, queremos hacer notar el saber del profesor en cuanto a hacerles saber que su respuesta es correcta, pero no adecuada matemáticamente. Esto se presenta normalmente en situaciones en las que el estudiante apenas está adquiriendo el nuevo contenido, o sea, un nuevo concepto, regla, propiedad, teorema o método y su razonamiento es correcto. Pero, además de realizar razonamientos correctos, el estudiante debe acostumbrarse a saber expresarlos adecuadamente de acuerdo a las convenciones establecidas en la matemática. Por ejemplo, en el caso de la profesora Aly, cuando un estudiante (E5) contesta de manera correcta que el orden de una matriz es de 2 columnas y 3 filas, luego Aly interviene para comentarle que su respuesta es correcta pero que matemáticamente debe decir primero el número de filas y luego el de columnas, es decir, el orden de la matriz es 3x2.

El descriptor **CC-En18**, consiste en saber cómo aprovechar las respuestas incorrectas de los estudiantes para hacerles ver las consecuencias de éstas en el contenido matemático. En este descriptor queremos distinguir la capacidad que tiene el profesor para saber cómo sacar provecho de las respuestas erróneas que expresan los estudiantes, en particular, para saber hacerles notar o saber hacerles pensar cómo afectaría eso matemáticamente. En este sentido, el profesor les plantea aspectos como "qué pasaría si..." o "qué pasaría en el caso que..." para hacer partícipes a los estudiantes y provocar conciencia sobre ese aspecto en el contenido.

En el **CC-En19** el foco está en saber cómo aprovechar la respuesta, corregirla y usarla para explicar algún aspecto del contenido. En este sentido, este descriptor pudiera tener algo de similar al **CC-En18** (en cuanto a respuestas erróneas de los estudiantes), pero aquí el enfoque está en que el profesor corrige la idea equivocada de un estudiante y la aprovecha porque le sirve para explicar algún aspecto referente al contenido matemático que le interesa enseñar en esa clase.

En el descriptor **CC-En20**, que versa sobre saber cómo aprovechar la respuesta de un estudiante, referente al contenido matemático, para corregir la de otro; queremos destacar la capacidad del profesor para saber cómo sacar provecho de la respuesta de un estudiante para señalar los errores de la del otro y así corregir el contenido matemático y reorientarlo a lo que el profesor desea enseñarles.

El descriptor **CC-En21** consiste en saber cómo aprovechar las respuestas de los estudiantes aportadas en la discusión que se presenta en el grupo para hacerles notar algún aspecto incorrecto del contenido. En este descriptor pretendemos distinguir la capacidad que tiene el profesor para saber sacar provecho a la discusión que se suscita acerca del contenido matemático y saber cómo sacar a relucir alguna parte incorrecta del contenido que se está debatiendo en la discusión.

GP3. Preguntas y respuestas

CC-En22. Saber cómo transferir e interpretar la pregunta y/o respuesta de un estudiante y luego contestar a forma de explicación para todos los estudiantes.

En este descriptor queremos enfatizar varias fases del conocimiento del profesor, en cuanto a saber transferir de lenguaje común a lenguaje matemático o para traducir o dar sentido matemático al lenguaje en el que mezclan lenguaje común y lenguaje matemático; y así poder interpretar la pregunta y/o respuesta que expresan los estudiantes; y luego aprovechar para explicar, en ese momento, la respuesta (cuando hacen una pregunta) ante todos los estudiantes o para hacerles notar a los estudiantes lo que puede proceder matemáticamente respecto a la respuesta que hayan expresado.

GP4. Para que hagan los ejercicios

CC-En23. Saber cómo gestionar la participación de los estudiantes para que participen activamente y hagan el ejercicio o problema y que no sólo copien lo que ella hace.

En este descriptor pretendemos hacer notar la capacidad del profesor para saber cómo propiciar la participación activa de los estudiantes para que hagan ejercicios o problemas sobre el contenido matemático que acaba de explicar, para evitar que los estudiantes sólo "fotocopien" de manera manuscrita en sus cuadernos lo que él va haciendo. Por ejemplo, en el caso de la profesora Aly, ella invita a los estudiantes a que calculen $|A_z|$ usando la regla de Cramer, después de que ella calculó en la pizarra $|A_x|$ y $|A_y|$.

Traducir

CC-En24. Saber cómo "traducir" a los estudiantes la actividad matemática presentada por otro estudiante o cómo "traducir" alguna actividad matemática del libro de texto a su lenguaje usual.

CC-En25. Saber usar lenguaje común o más familiar a los estudiantes o una forma más explícita, más detallada, al explicar el contenido matemático para que los estudiantes lo comprendan "mejor".

El descriptor **CC-En24** hace referencia al conocimiento que tiene el profesor sobre cómo traducir a los estudiantes lo que está haciendo otro, o bien alguna actividad matemática del libro de texto. Para ello utiliza lenguaje común o combina lenguaje formal con lenguaje común o simplemente lo expresa de una forma más detallada. Por ejemplo, cuando les traduce a los estudiantes lo que hace otro, cuando este otro hace un ejercicio o resuelve un problema en la pizarra; o cuando les traduce la definición formal que está en el libro de texto.

En el descriptor **CC-En25**, referido a saber usar un lenguaje común o más familiar a los estudiantes o una forma más explícita, más detallada, al explicar el contenido matemático para que los estudiantes lo comprendan "mejor", queremos enfatizar el saber del profesor en cuanto al lenguaje que utiliza, propiamente al explicar el contenido, para hacer explícito ese contenido; en otras palabras, saber cómo hacerlo más claro para que se entienda "mejor" o se hagan una mejor idea, lo cual puede servir para que los estudiantes se involucren más en el contenido cuando el profesor lo explica.

Hacer notar/remarcar/destacar

CC-En26. Saber cómo (y cuándo) hacerles notar, remarcar, destacar o aclarar, puntualmente, lo más importante del contenido que está enseñando.

Éste es un descriptor en el que el profesor hace explícito su saber respecto a cómo (y cuándo) enfatizar o esclarecer de manera específica lo que considera más relevante del contenido que está explicando. Incluye saber cómo hacer notar o aclarar algún aspecto característico del concepto, regla, propiedad, teorema o método que está presentando; la estrategia para hacer un ejercicio o resolver un problema; la parte matemática más importante del ejemplo, ejercicio o problema; o la similitud que existe entre varios conceptos que está presentando. El "cuándo" lo hemos escrito entre paréntesis en el descriptor porque en ocasiones es a iniciativa del profesor saber en qué momento hacerles notar o aclararles dichos aspectos, pero en otras, es debido a la intervención de algún(os) estudiante(s). Cuando aparece este descriptor el profesor algunas veces usa las frases: "fijaros aquí...", "mirad que" o "atención aquí...".

Alertar/prevenir

CC-En27. Saber cómo plantearles una situación hipotética para prevenirlos de error.

CC-En28. Saber cómo hacerles señalamientos sobre errores que cometieron algunos estudiantes en el examen, para alertar a los demás sobre los errores que se cometen y de alguna forma prevenirlos de ese error.

En el descriptor **CC-En27** queremos destacar el saber cómo plantearles una situación hipotética, adelantándose a una situación que podrían tener los estudiantes en ejercicios posteriores, para que a partir de ahí los estudiantes piensen en esa situación y tengan cuidado. Además, trata de que los estudiantes se hagan una idea de lo que deben hacer ante una situación similar a la que les plantea y si es preciso, prevenirlos de error.

El descriptor **CC-En28** es un descriptor en el que queremos distinguir el saber cómo hacerles una serie de señalamientos referentes a errores concretos que efectuaron algunos estudiantes en el examen y aprovecharlos para avisar a los demás de los errores que cometen sus pares y de cierta manera prevenirlos de esos errores.

Preparar actividades

> **CC-En29. Saber cómo prepararles un compendio de actividades a los estudiantes, para que afiancen el contenido matemático que les está enseñando.**

En este descriptor queremos destacar la capacidad del profesor para saber cómo prepararles varias actividades a los estudiantes con el objetivo de que consoliden (refuercen) los contenidos que les ha impartido en clase. Incluye saber cómo prepararles detalladamente, de manera concienzuda y con sustento matemático, distintos recursos para que practiquen y ensayen antes del examen o con posterioridad al examen (cuando los estudiantes tienen la oportunidad de presentar luego un examen de recuperación) e, inclusive, la elaboración de materiales para que los estudiantes comparen sus soluciones paso a paso (eg. las soluciones de los ejercicios propuestos o de los ejercicios del examen, detalladas meticulosamente paso a paso).

Forma de presentarlo/representarlo

En esta categoría o “issue” distinguimos 17 descriptores:

> **CC-En30. Saber cómo introducir un concepto mediante la relación de conceptos matemáticos vistos anteriormente.**

CC-En31. Conocer diferentes formas para introducir un tópico matemático con algún dato histórico o breve reseña histórica de ese contenido matemático o saber dar una breve reseña/anécdota histórica para contextualizar un tópico.

CC-En32. Saber distintas formas de presentar/representar la definición de un concepto: en forma genérica y no con números concretos.

CC-En33. Conocer la estrategia de pregunta-respuesta para relacionar unos conceptos con otros hasta llegar al deseado.

CC-En34. Saber cómo remarcarles los aspectos más relevantes del contenido para concluir un ejemplo o la presentación de un tema.

CC-En35. Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente.

CC-En36. Saber cómo explicarles la utilidad, aplicación, dirección/orientación del contenido en temas siguientes.

CC-En37. Saber, tras la digresión en su discurso, rescatar la idea del contenido matemático que esté presentando.

CC-En38. Saber "poderosas" analogías para presentar o representar el contenido matemático. Saber que usar la analogía de un objeto matemático con un objeto común para aproximarse más al lenguaje usual de los estudiantes puede hacer que los estudiantes logren entender "mejor" el significado de un contenido matemático.

CC-En39. Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último.

CC-En40. Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución.

CC-En41. Saber qué es lo que hay que repetir y cómo, para aclarar dudas del contenido a los estudiantes o reafirmar algunos aspectos del contenido.

CC-En42. Saber cómo usar la comparación entre algunas formas de hacer un ejercicio o entre varias representaciones, para destacar a los estudiantes los aspectos del contenido en los que se deben fijar.

CC-En43. (Antes CC-En-Es3). Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto.

CC-En44. Conocer la potencialidad de los esquemas gráficos para representar un contenido.

CC-En45 (Antes CC-En-Es7). Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan "mejor" el contenido que presenta, saber cómo evocar un concepto(s), un ejemplo, ejercicio, problema o procedimiento equivalente visto(s) o hecho(s) anteriormente, para presentar un nuevo concepto o un ejemplo del nuevo concepto, para que los estudiantes traigan a la mente ese contenido o se hagan una idea de cómo se resuelve el nuevo problema.

CC-En46. Saber cómo dar más confianza a los estudiantes en el resultado que han obtenido del ejemplo o ejercicio.

Los descriptores **CC-En30, CC-En31 y CC-En32** están relacionados con saber cómo introducir un tópico matemático, pero cada uno tiene un matiz específico. El **CC-En30** se refiere a saber cómo introducir un concepto mediante la relación de conceptos matemáticos vistos anteriormente; mientras que el **CC-En31** consiste en conocer diferentes formas para introducir un tópico matemático con algún dato histórico o breve reseña histórica de ese contenido matemático o saber dar una breve reseña/anécdota histórica para contextualizar un tópico. En cuanto al **CC-En32,** trata acerca de saber distintas formas de presentar/representar la definición de un concepto: en forma genérica y no con números concretos.

El descriptor **CC-En30** aparece normalmente cuando el profesor da un repaso del contenido abordado anteriormente para introducir el concepto. Este descriptor puede presentarse a través de un recorrido deductivo, es decir, partiendo de lo general a lo particular, relacionando varios conceptos matemáticos familiares a los estudiantes, por ejemplo la profesora Emi, para presentar el concepto de matriz, empieza por comentarles que "el Álgebra es parte de las matemáticas que durante muchos siglos se ocupaba de resolver ecuaciones,...." hasta aterrizar en que a un grafo se le puede asociar una matriz (Álgebra → Sistemas de ecuaciones → matrices → tipos de ejercicios → problemas → grafos → matriz); pero también podría mostrarse mediante un recorrido inductivo partiendo de lo particular a lo general, aunque luego habría que retomar el concepto principal.

En el **CC-En31** se ha de saber cómo usar datos, reseñas o anécdotas históricas del tópico matemático al introducir dicho tópico en la clase. Y en el **CC-En32** debe tener habilidad para saber cómo presentar una definición utilizando la notación formal, rigurosa y elegante matemáticamente.

Por otra parte, el descriptor **CC-En33** consiste en conocer la estrategia de pregunta-respuesta para relacionar unos conceptos con otros hasta llegar al deseado. En este descriptor el matiz está en la estrategia que utiliza para ir ligando los conceptos vistos anteriormente.

Los descriptores **CC-En34**, **CC-En35 y CC-En36** normalmente se hacen explícitos cuando el profesor va a concluir la explicación de un ejemplo o de un tema matemático e inmediatamente presentar el siguiente. El **CC-En34** consiste en saber cómo remarcarles los aspectos más relevantes del contenido para concluir un ejemplo o la presentación de un tema. Por ello puede ser mostrado cuando el profesor cierra (recapitula) a forma de resumen o concentrado lo más importante del ejemplo o del tema que acaba de explicar. En cuanto a los dos descriptores siguientes, el **CC-En35** se refiere a saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente, y el **CC-En36** trata acerca de saber cómo explicarles la utilidad, aplicación, dirección u orientación del contenido en temas que les enseñará posteriormente en el mismo curso. Éstos descriptores pueden aparecer cuando el profesor aprovecha el cierre de un contenido matemático para presentar el siguiente o cuando al profesor le interesa simplemente detenerse para situarlos y hacerles ver lo que han realizado hasta el momento y lo que falta por hacer.

Por otro lado, en el descriptor **CC-En37**, que consiste en saber, tras la digresión en su discurso, rescatar la idea del contenido matemático que esté presentando, queremos destacar la capacidad del profesor para saber recuperar la idea principal del contenido que pretende enseñar ese día en clase, después de hablar en su discurso sobre asuntos que ya que no tengan mucha conexión o íntimo enlace con el contenido que está tratando o que puedan desviar de la idea primordial.

En cuanto a los descriptores **CC-En38** y **CC-En39,** éstos son referidos a saber usar analogías para presentar o representar el contenido matemático, pero cada uno tienen un matiz específico. Por ejemplo, en el **CC-En38** el foco está en saber que al usar la analogía de un objeto matemático con uno común o más cercano a los estudiantes podría conseguir que los estudiantes logren entender "mejor" el significado del contenido que pretende enseñar; mientras que en el **CC-En39** el enfoque está en saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último. Es decir, en el **CC-En39** el profesor se apoya en los contenidos abordados anteriormente para aprovechar la posible familiaridad y dominio que los estudiantes tengan sobre éstos y hacerles notar lo análogo o lo diferente entre los anteriores y el que él quiere presentar en esa clase.

En el descriptor **CC-En40** queremos distinguir el saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución. En este descriptor se destaca la capacidad del profesor para saber cómo comentarles los puntos clave, los pasos que hay que seguir para lograr hacerla(o). Es el propio profesor el que considera que es importante hacérselos saber, para que los estudiantes comprendan lo qué hay que hacer y la(lo) realicen exitosamente.

El descriptor **CC-En41** consiste en saber qué es lo que hay que repetir y cómo, para aclarar dudas del contenido a los estudiantes o reafirmar algunos aspectos del contenido. Este descriptor está relacionado con la concepción que tiene el profesor acerca de que el estudiante aprende por repetición. Lo que destacamos en este descriptor es el saber qué y cómo hay que repetir para esclarecer las dudas del tópico matemático que está presentando; o para distinguir o afianzarles los aspectos del contenido que considera más importantes; o simplemente repetir el procedimiento por los estudiantes que no asistieron a la clase anterior.

En el descriptor **CC-En42**, referido a saber cómo usar la comparación entre algunas formas de hacer un ejercicio o entre varias representaciones, para destacar a los estudiantes los aspectos del contenido en los que se deben fijar, queremos enfatizar el conocimiento que le permite al profesor saber cómo utilizar la comparación para hacerles notar diferentes particularidades relevantes del contenido matemático. Por ejemplo, comparar distintas técnicas para resolver sistemas de ecuaciones lineales, para hacerles notar en qué deben poner atención en cada técnica; o comparar dos formas distintas de calcular la matriz inversa (diagonalizando o usando la adjunta) en un ejercicio; o comparar distintas matrices denotadas con la representación gráfica para cada tipo de sistema (compatible determinado (SCD), compatible indeterminado (SCI) o incompatible (SI)) para hacerles notar que se tienen que fijar en la tercera fila del sistema en una matriz ampliada para distinguir un SCD, un SCI y un SI; etc.

Los descriptores **CC-En43** y **CC-En44** están interrelacionados con la visualización y los esquemas gráficos. El **CC-En43** consiste en saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. En este descriptor se hace una conexión entre contenido-representación-visualización-imagen. El foco está en saber qué representación es la más adecuada utilizar para lograr esa conexión. Un caso particular del **CC-En43** es el **CC-En44**, que trata acerca de conocer la potencialidad de los esquemas gráficos para representar un contenido. Podemos comentar dos ejemplos de este último: uno, en cuanto a saber que un esquema gráfico es muy útil para representar la división de las filas y de las columnas para que se hagan una imagen de cómo efectuar el producto de dos matrices, para hacerles notar que deben seguir un orden establecido para hacer el producto y no confundir la fila y columna que deben multiplicar; otro, respecto a saber que si usa un esquema gráfico (cuadrado y rectángulo) para presentarles la definición de diagonal principal y diagonal secundaria, los estudiantes visualizarán mejor esos dos términos.

En el descriptor **CC-En45 (CC-En-Es7)** el foco está en "saber evocar... para...". El descriptor consiste en saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan "mejor" el contenido que presenta, saber cómo evocar un concepto(s), un ejemplo, ejercicio, problema o procedimiento equivalente visto(s) o hecho(s) anteriormente, para presentar un nuevo concepto o un ejemplo del nuevo concepto, para que los estudiantes traigan a la mente ese contenido o se hagan una idea de cómo se resuelve el nuevo problema. Un ejemplo de este descriptor es referido a saber evocar las propiedades de las operaciones en los números reales para hacer una analogía (o diferencia en su caso) con las propiedades de las operaciones con matrices para que los estudiantes tengan una idea de lo que van a hacer entonces.

El descriptor **CC-En46** consiste en saber cómo dar más confianza a los estudiantes en el resultado que han obtenido del ejemplo o ejercicio. Por ejemplo, comparar la solución que obtuvieron en el ejemplo que hicieron en la pizarra con la del libro de texto para que los estudiantes sepan que pueden revisarlo ahí y con ello adquirir seguridad y confianza.

Hasta aquí lo referente a los descriptores del **CC-En**. Enseguida presentamos los descriptores correspondientes al conocimiento curricular, el cual es otro de los subdominios del conocimiento didáctico del contenido.

CC

En el subdominio del ***conocimiento curricular*** distinguimos 3 descriptores:

> **CC1. Saber qué contenidos aparecen y cómo están organizados en el libro de texto.**
> **CC2. Saber qué temas se deben ver posteriormente en el curso.**
> **CC3. Saber qué contenido deben aprender los estudiantes aunque no aparezca en el libro de texto.**

Los tres descriptores son muy básicos y pudieran ser demasiado próximos a un profesor de cualquier nivel educativo (primaria, secundaria, bachillerato, etc.) por la propia forma en la que están definidos, pues en el primero bastaría con saber qué contenidos están en el libro de texto y cómo están organizados; en el segundo, con saber qué temas verán durante todo ese curso que está impartiendo; y en el tercero, con saber los contenidos promulgados por la consejería de educación (sílabo) y los del libro de texto, y saber cuáles de ellos deben aprender los estudiantes aun en el caso de que no aparezcan en el libro de texto.

Sin embargo, el *conocimiento curricular* es más que lo que pueden exhibir estos tres descriptores, pues cabe mencionar que este subdominio tiene sus orígenes en el trabajo de Shulman (1986), en el que al explicar lo referente al *conocimiento curricular*, expresa que

"El currículo es representado por el rango completo de programas diseñados para la enseñanza de temas específicos a un nivel determinado, la variedad de materiales educativos disponibles en relación con esos programas, y el conjunto de características que sirven como indicaciones y contraindicaciones para el uso de determinados materiales en circunstancias particulares" (Shulman, 1986, p.10)

Por tanto, podríamos proponer otros descriptores redactados por ejemplo en los términos de conocer los objetivos de determinados materiales curriculares acerca del contenido a enseñar o conocer cómo evaluar un material curricular. Es decir, descriptores en los que se ponga de relieve que el *conocimiento curricular* incluye el conocimiento que tenga el profesor acerca de diversos programas y materiales curriculares exclusivamente diseñados para enseñar un contenido matemático específico. Cabe distinguir que en Matemáticas, en nivel bachillerato, es notoria la ausencia de materiales curriculares meramente preparados y estudiados con un enfoque de corte didáctico que sean difundidos y divulgados para enseñar un contenido específico en ese nivel educativo.

Al estudiar los distintos subdominios del CME, encontramos también algunos descriptores respecto al ***conocimiento pedagógico general*** que, aunque no es un subdominio explícito en el modelo de Ball et al. (2008), son aspectos que consideramos que también juegan un papel importante en el CME.

CPG

Respecto al ***conocimiento pedagógico general*** distinguimos 7 descriptores:

CPG1. Conocer estrategias para controlar la indisciplina o distracción en el aula, para atraer la atención de los estudiantes o llamar la atención a los estudiantes cuando están comportándose de manera impropia para una clase.

CPG2. Conocimiento y habilidad discursiva para hacer comentarios para tranquilizar y motivar a los estudiantes cuando los ve agobiados, decepcionados de ellos mismos o preocupados por el trabajo de clase que tienen que hacer; o

porque se consideren incapaces de aprender un método para hacer ejercicios o procedimientos.

CPG3. Conocimiento y habilidad discursiva para motivar, re-encomendar o exigir a los estudiantes que hagan una demostración, los ejemplos o los ejercicios (para hacer en clase o de deberes).

CPG4. Conocimiento y habilidad discursiva para preguntarles si les ha quedado claro lo que acaban de hacer, si tienen más dudas; para ver si van entendiendo lo que han visto; para acercarse al lugar de los estudiantes cuando levantan la mano porque tienen alguna duda o porque ponen cara "rara".

CPG5. Saber cómo estimular a los estudiantes que sí hicieron sus deberes (tareas).

CPG6. Conocer cómo controlar al estudiante que sí hizo sus deberes (tareas) para que también trabajen y participen otros estudiantes, al hacer o revisar los deberes en clase.

CPG7. Conocimiento y habilidad para acercarse a revisar lo que han hecho los estudiantes y cómo lo han hecho.

Los descriptores **CPG1** y **CPG6** son referidos a *saber cómo controlar en la clase* tanto la indisciplina o desobediencia de los estudiantes en la clase como al estudiante que sí hizo sus deberes (para que al revisar los deberes en clase trabajen los que no hicieron sus deberes y no sólo participe el que sí los hizo).

En el descriptor **CPG2** queremos destacar la capacidad discursiva del profesor para saber qué comentarios hacer a los estudiantes en situaciones en las que sienten que nunca podrán aprender o hacer lo que la profesora presenta. Mientras que en el **CPG3** queremos distinguir la capacidad discursiva del profesor para motivar, re-encomendar o en ocasiones exigir a los estudiantes que desarrollen las tareas o actividades que les asigna para hacer en clase o en casa.

En el descriptor **CPG4** pretendemos hacer notar el conocimiento y habilidad discursiva que tiene el profesor para saber cómo hacer para que los estudiante pregunten sus dudas y aclarárselas o para constatar que van siguiendo lo que está presentando en la clase. Y en el **CPG7** queremos destacar el conocimiento y habilidad para acercarse a los estudiantes para revisar lo que han hecho y cómo lo han hecho, por ejemplo, hacerles algunas preguntas a los estudiantes para saber los procedimientos que ellos usaron y los resultados que ellos obtuvieron en los dos apartados de un problema después de que uno de los estudiantes lo ha resuelto en la pizarra.

El **CPG5** es referido a saber cómo estimular a los estudiantes que sí hicieron sus deberes (tareas). Incluye, por ejemplo, tomar en cuenta a los que sí hicieron sus deberes al momento de revisar en clase algún ejercicio que había dejado de deberes.

Terminamos este apartado aportando en una tabla todos los descriptores que proporcionamos en esta parte. Y posteriormente mostramos los descriptores del modelo del CME en bachillerato representados en la Figura 5.1.

Tabla V.1. Descriptores del CME en bachillerato

CCC	**CCC1.** Saber la definición del concepto, regla, propiedad, teorema o método que presenta.
	CCC2. Saber usar términos matemáticos y notación matemática (que aparece en las definiciones formales).
	CCC3. Saber que la notación es muy importante en matemáticas.
	CCC4. Saber la operatividad, propiedades (en cuanto a su uso), utilidad o aplicación (en cuanto a mecanismo o proceso) de un concepto.
	CCC5. Saber hacer la demostración de un teorema o una regla.
CEC	**CEC1.** Saber el significado de los conceptos.
	CEC2. Saber los pasos ocultos: conocer la procedencia y las razones matemáticas por las que funcionan los procedimientos.
	***[1]CEC3.** Saber qué conceptos, propiedades, reglas, etc., están tras una respuesta, pregunta o solución no estándar, inusual o inesperada de los estudiantes, lo que le permite saber si su razonamiento matemático funciona en general o no, así como justificar el pensamiento matemático que utiliza el estudiante, o describir matemáticamente el procedimiento que el estudiante está usando.
	CEC4. Saber la causa matemática de los errores comunes de los estudiantes.
	CEC5. Conocer aspectos matemáticos de especial importancia para la enseñanza, lo que le permite hacer notar o distinguir la importancia de un aspecto matemático específico para enseñar el contenido matemático.
HM	**HM1.** Conocer las similitudes (las relaciones) entre varios conceptos matemáticos de un mismo tema o unidad.
	HM2. Saber cómo un contenido está relacionado con otro más general (incluso aunque no aborde esa forma más general en ese grupo porque el programa no lo incluye).
	HM3. Saber la aplicación del contenido en otras áreas.
	***HM4.** Saber cómo concretar un contenido con otro más específico.
	***HM5.** Saber cómo un contenido está relacionado con otros de cursos anteriores.
	***HM6.** Saber cómo un contenido está relacionado con otros de cursos posteriores.
CC-Es	**Escuchar e interpretar** **CC-Es1.** Saber escuchar e interpretar el conocimiento o pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje (común o en proceso de adquisición del nuevo concepto –mezcla de lenguaje común con matemático).
	Necesidades y dificultades **CC-Es2.** Saber las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre el contenido matemático.

[1] Los descriptores marcados con * son descriptores que nosotros proponemos pero que no fueron evidenciados por Emi ni por Aly.

	Confusiones y/o equivocaciones **CC-Es3.** Prever la confusión que pudiera tener el alumno con algún aspecto específico del contenido que se esté viendo en clase. **CC-Es7.** Saber que los estudiantes pueden equivocarse al hacer determinado cálculo de un número o de un signo (más leve), provocado por un despiste al hacer una(s) operación(es) o transformación(es), o por no dominar el contenido que se les está presentando. **CC-Es8.** Saber que los estudiantes deben proceder ordenadamente respetando las convenciones matemáticas, para evitar confusiones y errores. **CC-Es9.** Saber que los estudiantes podrían hacer cálculos mecánicamente sin saber realmente lo que están haciendo.
	No saben/no recuerdan/no ven/o no se fijen **CC-Es4.** Prever (anticipar) que los estudiantes no saben o no recuerdan un concepto o propiedad matemática. **CC-Es11.** Prever que los estudiantes no vean que un problema es equivalente a otro; o que no vean que una igualdad la pueden usar en un sentido o en otro. **CC-Es12.** Saber que los estudiantes pueden ponerse a hacer cálculos sin antes fijarse en si pueden usar una propiedad.
	Quedarse con una imagen inadecuada **CC-Es5.** Prever (anticipar) que los estudiantes se pueden quedar con una imagen o idea inadecuada del contenido.
	Cansado y aburrido **CC-Es6.** Saber lo que a los estudiantes les parecerá cansado y aburrido de un contenido matemático específico.
	Interesante, motivador o desafiante ***CC-Es20.** Saber lo que a los estudiantes les parecerá interesante, motivador o desafiante en el ejemplo, ejercicio o problema que el profesor elija para enseñar el contenido.
	Respuesta intuitiva **CC-Es10.** Saber que a los estudiantes se les puede ocurrir una respuesta intuitiva para resolver un problema.
	Lo que les será más comprensible o resolver fácilmente **CC-Es13.** Saber que para los estudiantes será más comprensible un tema si lo ven con un ejemplo concreto (que puede aparecer en el libro de texto). **CC-Es14.** Saber que los estudiantes entenderán “mejor” el ejemplo si antes de empezar a hacerlo se les remarcan las principales características del concepto que se usará en el ejemplo. **CC-Es19.** Saber que los estudiantes pueden resolver fácilmente alguna parte operacional (algún sistema de ecuaciones, alguna ecuación de segundo grado, algún determinante) del procedimiento.

	Obstáculos comunes para llegar a la solución **CC-Es15.** Saber que los estudiantes pueden atascarse en algunos detalles de la solución del problema y perder el sentido del problema. **CC-Es16.** Saber que a los estudiantes les puede parecer extraño usar por primera vez un método o regla que estaba diseñado para otro caso o situación del contenido. **CC-Es17.** Saber que los estudiantes, al resolver problemas extensos, pueden olvidar algún cálculo que ya habían hecho al inicio y no aprovecharlo cuando se utilice nuevamente para solucionar el mismo problema. **CC-Es18.** Prever que los estudiantes divaguen definiendo más variables de las que necesitan para resolver un problema.
CC-En	**Ejemplos** **CC-En1.** Saber con qué ejemplo o ejercicio empezar, cuándo y cuáles usar para enfatizar, reforzar o generalizar cierta idea. **CC-En2.** Saber que la aplicación del concepto en un ejemplo le es útil para inducir luego la definición del concepto. **CC-En3**. Saber que una de las potencialidades de un ejemplo, en concreto al desarrollarlo, es utilizarlo para destacar los aspectos relevantes del contenido matemático que pretende enseñarles ese día en clase. **CC-En4.** Saber usar ejemplos con datos concretos, en lugar de desarrollar propiedades de forma general o con ejemplos genéricos, para explicar el contenido. **CC-En5.** Saber que al explicar un ejemplo o un ejercicio, es importante que los estudiantes vean que los resultados obtenidos del ejemplo o ejercicio tienen un significado concreto. **CC-En6.** Saber qué ejercicios dejarles de deberes para que practiquen.
	Ayudas **CC-En7.** Saber qué ayudas dar a los estudiantes en situaciones de confusión o dificultad, para que puedan dar solución a un ejercicio o resolver un problema. **CC-En8.** Saber que una “buena” estrategia para que los estudiantes comprendan o hagan un ejemplo, ejercicio o problema, consiste en explicarles o hacerles hincapié en lo que quiere que hagan y para qué quiere que lo hagan o simplemente explicarles de lo que trata el ejercicio o problema. **CC-En9.** Saber cómo señalar a los estudiantes algún dato del problema que no aparece explícito y que luego se usará para dar solución a un ejercicio o resolver un problema.

	Gestión de la participación (GP) **GP1. Preguntas** **(Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático)** **CC-En10.** Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático, para hacer ver a los estudiantes que la respuesta de un estudiante es equivocada y orientar la pregunta a la respuesta que el profesor(a) quiere escuchar. **CC-En11.** Saber qué preguntas formular, no necesariamente a cierto estudiante, para presentar o mostrar específicamente lo más importante del contenido que está enseñando (algunas veces las contesta ella misma y otras los estudiantes). **CC-En12.** Saber qué preguntas formular para presentar un nuevo concepto, una nueva propiedad o una clasificación. **CC-En13.** Saber qué preguntas formular sobre el contenido para involucrar a estudiantes pasivos. **CC-En14.** Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático para gestionar por lo menos una participación pasiva de los demás estudiantes, cuando existe un diálogo entre el profesor y un determinado estudiante, para que se planteen el porqué de lo que se va exponiendo en el diálogo. **CC-En15.** Saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático para ir guiando la solución de un ejemplo o ejercicio, resolver un problema o hacer una representación gráfica. **GP2. Respuestas** **CC-En16.** Saber qué respuestas de los estudiantes aceptar, cuáles interrumpir, cuáles ignorar o cuáles destacar, para alcanzar los objetivos de la enseñanza del contenido trazados por la profesora para esa clase. **CC-En17.** Saber cómo orientar una respuesta correcta a un lenguaje matemático aceptado en la matemática escolar, es decir, atendiendo o enfocado a una convención matemática. **CC-En18.** Saber cómo aprovechar las respuestas incorrectas de los estudiantes para hacerles ver las consecuencias de éstas en el contenido matemático. **CC-En19.** Saber cómo aprovechar la respuesta de un estudiante, corregirla y utilizarla para explicar algún aspecto del contenido. **CC-En20.** Saber cómo aprovechar la respuesta de un estudiante, referente al contenido, para corregir la de otro. **CC-En21.** Saber cómo aprovechar las respuestas de los estudiantes, aportadas en la discusión que se presenta en el grupo para hacerles notar algún aspecto incorrecto del contenido. **GP3. Preguntas y respuestas** **CC-En22.** Saber cómo transferir e interpretar la pregunta y/o respuesta de un estudiante y luego contestar a forma de explicación para todos los estudiantes. **GP4. Para que hagan los ejercicios** **CC-En23.** Saber cómo gestionar la participación de los estudiantes para que participen activamente y hagan el ejercicio o problema y que no sólo copien lo que ella hace.

	Traducir **CC-En24.** Saber cómo "traducir" a los estudiantes la actividad matemática presentada por otro estudiante o cómo "traducir" alguna actividad matemática del libro de texto a su lenguaje usual. **CC-En25.** Saber usar lenguaje común o más familiar a los estudiantes o una forma más explícita, más detallada, al explicar el contenido matemático para que los estudiantes lo comprendan "mejor".
	Hacer notar/remarcar/destacar **CC-En26.** Saber cómo (y cuándo) hacerles notar, remarcar, destacar o aclarar, puntualmente, lo más importante del contenido que está enseñando.
	Alertar/prevenir **CC-En27.** Saber cómo plantearles una situación hipotética para prevenirlos de error. **CC-En28.** Saber cómo hacerles señalamientos sobre errores que cometieron algunos estudiantes en el examen, para alertar a los demás sobre los errores que se cometen y de alguna forma prevenirlos de ese error.
	Preparar actividades **CC-En29.** Saber cómo prepararles un compendio de actividades a los estudiantes, para que afiancen el contenido matemático que les está enseñando.
	Forma de presentarlo/representarlo **CC-En30.** Saber cómo introducir un concepto mediante la relación de conceptos matemáticos vistos anteriormente. **CC-En31.** Conocer diferentes formas para introducir un tópico matemático con algún dato histórico o breve reseña histórica de ese contenido matemático o saber dar una breve reseña/anécdota histórica para contextualizar un tópico. **CC-En32.** Saber distintas formas de presentar/representar la definición de un concepto: en forma genérica y no con números concretos. **CC-En33.** Conocer la estrategia de pregunta-respuesta para relacionar unos conceptos con otros hasta llegar al deseado. **CC-En34.** Saber cómo remarcarles los aspectos más relevantes del contenido para concluir un ejemplo o la presentación de un tema. **CC-En35.** Saber cómo aprovechar los aspectos relevantes del contenido que se han realizado o conseguido hasta el momento, para orientar el contenido a enseñar posteriormente. **CC-En36.** Saber cómo explicarles la utilidad, aplicación, dirección/orientación del contenido en temas siguientes. **CC-En37.** Saber, tras la digresión en su discurso, rescatar la idea del contenido matemático que esté presentando. **CC-En38.** Saber "poderosas" analogías para presentar o representar el contenido matemático. Saber que al usar la analogía de un objeto matemático con un objeto común para aproximarse más al lenguaje usual de los estudiantes, puede hacer que los estudiantes logren entender "mejor" el significado de un contenido matemático. **CC-En39.** Saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último. **CC-En40.** Saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución.

	CC-En41. Saber qué es lo que hay que repetir y cómo, para aclarar dudas del contenido a los estudiantes o reafirmar algunos aspectos del contenido. **CC-En42.** Saber cómo usar la comparación entre algunas formas de hacer un ejercicio o entre varias representaciones, para destacar a los estudiantes los aspectos del contenido en los que se deben fijar. **CC-En43.** Saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán "mejor" algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto. **CC-En44.** Conocer la potencialidad de los esquemas gráficos para representar un contenido. **CC-En45.** Saber cómo evocar un contenido matemático previo (trabajado anteriormente -en clases o cursos anteriores-) para que los estudiantes comprendan "mejor" el contenido que presenta, saber cómo evocar un concepto(s), un ejemplo, ejercicio, problema o procedimiento equivalente visto(s) o hecho(s) anteriormente, para presentar un nuevo concepto o un ejemplo del nuevo concepto, para que los estudiantes traigan a la mente ese contenido o se hagan una idea de cómo se resuelve el nuevo problema. **CC-En46.** Saber cómo dar más confianza a los estudiantes en el resultado que han obtenido del ejemplo o ejercicio.
CC	**CC1.** Saber qué contenidos aparecen y cómo están organizados en el libro de texto.
	CC2. Saber qué temas se deben ver posteriormente en el curso.
	CC3. Saber qué contenido deben aprender los estudiantes aunque no aparezca en el libro de texto.

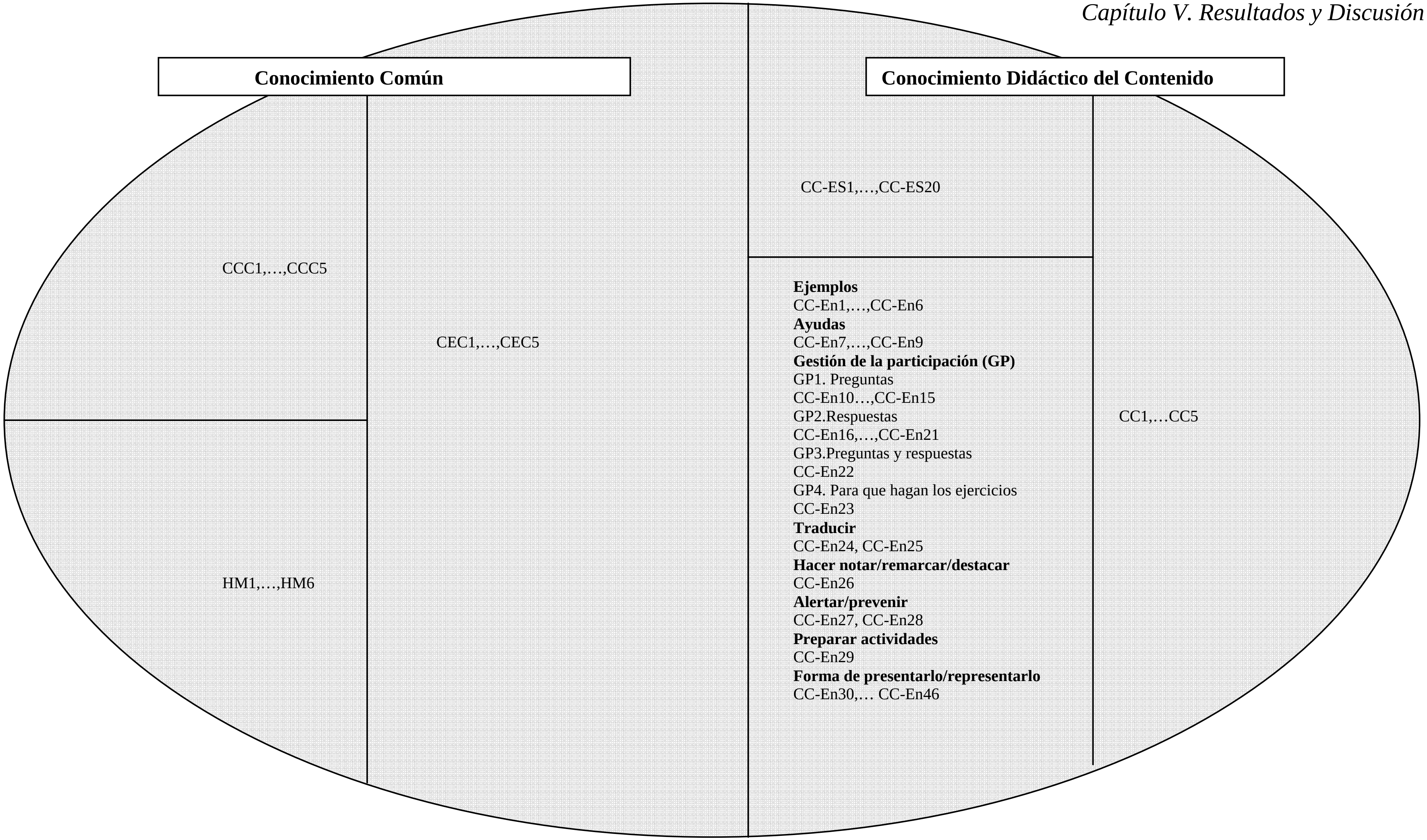


Figura 5.1. Descriptores del modelo del CME en bachillerato

Finalmente hay que estar atentos a la profundización de estos descriptores y a la aparición de otros, en estudios posteriores, en los que se podrían analizar en otros temas y ver si "sobreviven", ¿cuáles sí?, ¿cuáles no? y ¿por qué?

Es de nuestro interés que los descriptores o indicadores que proporcionamos en este modelo del MKT en bachillerato permitan identificar y comprender los distintos subdominios del MKT y que funjan como banco de dimensiones que ayuden a analizar a otros profesores, así como a tener en cuenta en la formación inicial y continua del profesorado de bachillerato.

CAPÍTULO VI. CONCLUSIONES

VI.1. Respecto a los descriptores de los subdominios

Ball y sus colaboradores reconocen que los subdominios del conocimiento matemático para la enseñanza (CME) aún requieren de refinamiento y revisión (Ball et al. 2008). La definición de los distintos subdominios del CME es muy general (Godino, 2009) y la noción del CME propuesta por Ball y sus colegas es muy joven, lo cual implica que las investigaciones acerca de la **especificidad** de los subdominios del CME estén en proceso de maduración. Por estos motivos, la distinción y esclarecimiento de la frontera que separa a los subdominios es aún muy ambigua[1]. Por ejemplo, tratar de discernir la diferencia entre CCC y CEC en algunos casos resulta complicado, como la misma Ball y su equipo de investigación reconocen (Ball et al., 2008, p. 403). Sin lugar a duda, por tanto, resulta lógico esperar que, con los descriptores que presentamos en cada subdominio, se produzca discusión en cuanto a si alguno(s) de ellos corresponde más a un subdominio que a otro, lo cual puede ser natural hasta cierto punto en una discusión de esa índole.

De hecho, entre quienes llevamos a cabo investigaciones en las que tomamos en cuenta al CME y presentamos ejemplos o comentamos caracterizaciones acerca de alguno(s) de los subdominios, uno de los fenómenos que se está dando actualmente consiste en que un ejemplo o una característica que para un investigador corresponde a un subdominio, para otro corresponde más a otro subdominio. Ante esta situación, podríamos en el mejor de los casos, al realizar un esfuerzo mutuo, discutir y decidir concienzudamente bajo consenso, a través de discusiones científicas entre investigadores expertos en estudios del CME de distintos tópicos matemáticos (aritmética, álgebra, cálculo, etc.) e incluso de distintos niveles educativos (primaria, secundaria, bachillerato, etc.), la unificación de categorizaciones centrales que sustenten la especificidad de los subdominios del CEC.

Sin embargo, si nos referimos a la importancia de los modelos teóricos en términos de Godino (2009) -los *"modelos teóricos que describen los tipos de conocimientos que los*

[1] Utilizamos aquí la palabra "ambigua" en el siguiente sentido de la definición de la Real Academia de la Lengua Española (RAE), Ambigua: "Dicho especialmente del lenguaje: Que puede entenderse de varios modos o admitir distintas interpretaciones y dar, por consiguiente, motivo a dudas, incertidumbre o confusión". RAE

profesores deben poner en juego para favorecer el aprendizaje de los estudiantes, […] son necesarios para organizar los programas de formación inicial o permanente, y para evaluar su eficacia" (p. 14)-, podemos entender y compartir la idea de quienes consideren que lo más esencial no es decidir si un descriptor o característica está en un subdominio o en otro, sino el hecho de que el profesor posea esa característica de ese subdominio del CME.

No obstante, lo que nosotros queremos enfatizar en esta investigación es la riqueza que puede brindar el conocer la caracterización o matización de los subdominios del CME expresada en descriptores en cuanto a ayudar a identificar y comprender los distintos subdominios del CME y que éstos a su vez funjan como banco de dimensiones que ayuden a analizar a otros profesores, así como a tener en cuenta en la formación inicial y continua del profesorado de bachillerato.

Una de las utilidades de las categorías de conocimiento de los contenidos para la enseñanza que Ball y su equipo de investigación sugieren consiste en *"[…] que pueden dar información para el diseño de materiales de apoyo para los profesores, así como para la formación docente y desarrollo profesional."* (Ball et al. 2008, p. 405)

A continuación comentamos las conclusiones generales respecto a los descriptores de los distintos subdominios del CME que presentamos en este trabajo. Cabe recordar que en el dominio del conocimiento del contenido están ubicados el conocimiento común del contenido, el conocimiento especializado del contenido y el horizonte matemático. Y en el dominio del conocimiento didáctico del contenido se localiza el conocimiento de contenido y estudiantes, el conocimiento de contenido y enseñanza y el conocimiento curricular.

En el modelo del CME propuesto por Ball et al. (2008), el *conocimiento común del contenido* (CCC) se distingue por ser un conocimiento matemático que incluye las habilidades necesarias para resolver las tareas que los estudiantes están realizando y por ser un conocimiento no necesariamente único de los profesores. En este estudio, los conocimientos propuestos en los descriptores referentes a este subdominio del CME incluyen saber la definición del concepto, regla, propiedad, teorema o método; saber usar los términos y notación matemática formal; saber que la notación es muy importante en matemáticas; saber hacer la parte mecánica o procedimental (hacer operaciones, aplicar propiedades, etc.) del contenido que esté presentando y de temas de cursos anteriores que se utilizan en el nuevo contenido; además de saber hacer la demostración de un teorema o una regla (eg. regla de Cramer).

En bachillerato es posible que mucho del conocimiento matemático de los contenidos sea común entre los profesores y otros, como los matemáticos, ingenieros, arquitectos, físicos, etc.; más aún, con cualquier persona que sea capaz de realizar correctamente las tareas matemáticas (eg. hacer las operaciones, utilizar los métodos y resolver problemas).

En nivel de bachillerato podemos esperar que los profesores de matemáticas manifiesten poseer un buen dominio del CCC, si consideramos que gran parte de ellos tiene como formación una licenciatura en matemáticas, a diferencia de un profesor de otro nivel educativo, que durante su formación además de matemáticas debe cursar español (lengua), ciencias naturales, historia, civismo, etc. Como consecuencia de ello, se aumenta la posibilidad de que un profesor de bachillerato tenga, principalmente, dominio sobre el concepto, regla, propiedad, teorema o método que pretende enseñar, una buena manipulación de términos y notación matemática, así como del conocimiento sobre la operatividad que requiere para realizar las tareas que asigna a sus estudiantes.

Sin embargo, ese buen dominio parece ir descendiendo si se trata de saber la utilidad o aplicación del concepto, es decir, cuanto más se pretenda alcanzar el *horizonte matemático* de ese concepto. ¿Será porque en la cultura escolar en la formación matemática casi sólo se enseña el concepto y a operar con él, sin detenerse apenas a pensar en la utilidad o aplicación posterior (o anterior) del concepto (regla, propiedad, ..., etc.) en la propia matemática o en otras áreas? Es decir, que durante la adquisición de fundamentos matemáticos en su formación en la licenciatura de matemáticas (estamos hablando de una formación en la que es notoria la carencia de una formación específica para ejercer en el futuro como profesor de matemática en bachillerato) la aplicación didáctica no es necesariamente un foco de aprendizaje.

Otra pregunta interesante es ¿cuál es el conocimiento matemático que, a diferencia de otros profesionales, hace especial la actividad del profesor? A este respecto, para Ball et al. (2008), el *conocimiento especializado del contenido* (CEC) es referido al conocimiento matemático puro que requiere el profesor para afrontar las múltiples tareas para la enseñanza del contenido. A nuestro juicio, una de las mayores aportaciones del modelo de Ball y su grupo de investigación es lo referente al CEC por la propia forma en que está definido y porque es uno de los subdominios del CME que, de profundizar en la comprensión de éste, más puede ayudar a mejorar la propuesta y elaboración de los contenidos matemáticos a enseñar a **los profesores** durante su formación, pues al conocer el CEC con mayor profundidad, estaríamos en la posibilidad de aplicar esa mejora una vez que sepamos qué matemática necesita **el profesor** para enseñar determinado contenido.

Sin embargo, como comentamos al inicio de este capítulo, Ball y sus colaboradores reconocen la complejidad para discernir en algunos casos la diferencia entre CCC y CEC. En nuestro estudio, una de las primeras problemáticas a las que nos enfrentamos fue esa. En particular, nuestro interés giraba en torno a saber determinar hasta dónde podría ser considerado el conocimiento del contenido como conocimiento común del contenido y qué tendría que pasar para hablar de conocimiento especializado del contenido, es decir, para hacer la distinción entre el CCC y CEC en nivel bachillerato. Pues considerábamos que en nivel de primaria posiblemente podría ser más fácil distinguir el conocimiento común del especializado por tratarse, en ocasiones, como en el caso de saber sumar, de un conocimiento común entre el profesor y el señor del kiosco que diariamente lo requiere en su trabajo. Sin embargo, en bachillerato, tal vez se hable de un conocimiento que ya no es tan común entre cualquier ciudadano, pues, por ejemplo, saber calcular la matriz inversa de una matriz por adjuntos, quizás ya no sea tan común entre el profesor y el señor del kiosco, pero sí puede ser común entre el profesor y otros adultos o profesionales que sepan hacer las tareas matemáticas que el profesor encomienda a sus estudiantes.

Después de varias discusiones en el SIDM[2], una forma que se deduce para diferenciar el CCC del CEC es la siguiente: El CCC podría decirse que consiste del conocimiento

[2] El SIDM en la Universidad de Huelva es un seminario dirigido a estudiantes de postgrado en el que los doctores y estudiantes discuten y argumentan ideas que fomentan y favorecen las tesis y en general los trabajos de ambos. Es un espacio formado para presentar protocolos de investigación, avances de tesis y

matemático que puede poseer cualquier persona que sea capaz de resolver con éxito las tareas asignadas por el profesor a los alumnos, mientras que el CEC se caracteriza por la utilización de los conocimientos matemáticos específicos para la enseñanza (un "*background*" basado en los conocimientos matemáticos especializados del profesor para enseñar a los estudiantes un contenido específico de matemáticas). El uso exclusivo de los conocimientos matemáticos por parte del profesor es la razón de caracterizar ese conocimiento como CEC.

Con base en lo anterior, en los descriptores correspondientes al CEC hacemos notar que este conocimiento incluye saber el significado de los conceptos; saber el por qué en los procedimientos, conocer la procedencia y las razones matemáticas por las que funcionan los procedimientos; saber qué conceptos, propiedades, reglas, etc. están tras una respuesta, pregunta o solución no estándar, inusual o inesperada de los estudiantes, lo que le permite saber si su razonamiento matemático funciona en general o no, así como justificar el pensamiento matemático que utiliza el estudiante, o describir matemáticamente el procedimiento que el estudiante está usando; saber la causa matemática de los errores comunes de los estudiantes; así como conocer aspectos matemáticos de especial importancia para la enseñanza, lo que le permite hacer notar o distinguir la importancia de un aspecto matemático específico para enseñar el contenido matemático.

A diferencia de otros profesionales, el profesor requiere el CEC para explicar a los estudiantes el significado de los conceptos matemáticos (sobre todo cuando es la primera vez que se presentan tales conceptos a los estudiantes). Esto implica que el profesor ha de cuestionarse qué matemática de trasfondo puede haber en el contenido matemático que va a enseñar; que se pregunte, indague e investigue la razón matemática de ese contenido; que desarrolle su curiosidad, su inquietud por descubrir, conocer y saber las razones matemáticas por las que funciona cierto concepto, definición, teorema, etc., es decir, el contenido en sí que va a enseñar; o tratar de explicarse qué pasos matemáticos están ocultos en un procedimiento. Este proceso puede permitir al profesor

---

analizar y descomprimir pensamientos aportados por grandes investigadores de Didáctica de la Matemática.

enriquecerse con herramientas matemáticas para su trabajo, con lo cual puede adquirir CEC para la enseñanza de las matemáticas.

Otros aspectos del CEC del profesor consisten en que logre conjeturar de dónde pudo proceder una respuesta inesperada o inusual del estudiante, descubrir las razones matemáticas, identificar el razonamiento/pensamiento matemático que pudo generar esa respuesta, argumentar matemáticamente el procedimiento que el estudiante usa y validar si ese procedimiento funciona en general, es simple casualidad o es erróneo.

Un aspecto más del CEC viene motivado por las preocupaciones y acciones del profesor referidas a saber la(s) causa(s) matemática(s) de los errores de los estudiantes, ya que él ha de contar con la información y la habilidad necesarias para detectar y explicarse matemáticamente los errores más comunes que cometen sus estudiantes al enseñar determinado contenido. Es decir, ser consciente del fundamento matemático de tales errores de los estudiantes es una tarea de la enseñanza que concierne al profesor. Más aún, además de saber esas causas, es preciso poner en funcionamiento, en el proceso de enseñanza, el conocimiento matemático adquirido de averiguarlas (eg. al explicar, hacer notar, aclarar, recomendar, alertar, prevenir, preguntar, responder, etc. a sus estudiantes sobre el contenido).

Es el profesor el que hace caer en la cuenta de aspectos matemáticos para la enseñanza, es él quien siente la necesidad de aclarar y hacer notar a los estudiantes diversas distinciones matemáticas que para otros profesionales pueden ser unas simples propiedades.

Nosotros pensamos que en el CEC del profesor resulta muy destacable el conocimiento matemático que se acumula a través de la reflexión del docente sobre la importancia de aspectos matemáticos para la enseñanza, aspectos en los que el profesor, en contraste con otros profesionales, cae y hace caer en la cuenta de éstos. Es decir, él es el encargado de aclararlos, hacerlos notar y reforzarlos.

El aspecto anterior se encuentra estrechamente ligado al CCC, su rasgo diferenciador es que es el profesor quien cae y hace caer en la cuenta de tales aspectos matemáticos dado que les otorga una importancia primordial a la hora de enseñar determinado contenido matemático.

En nuestro criterio, el interés analítico por la matemática pura que subyace de los contenidos que imparte el docente son aspectos del CEC susceptibles de ayudar al profesor a adquirir herramientas matemáticas con las que pueda abordar diversas cuestiones matemáticas con las que se enfrenta en su labor cotidiana, la enseñanza.

Otro de los subdominios del conocimiento del contenido en el modelo para el CME de Ball et al. (2008) es el *horizonte matemático* (HM). En este subdominio se le da un enfoque particular al conocimiento respecto a cómo se relacionan los distintos temas de matemáticas durante su trayectoria curricular. Los descriptores que presentamos en este subdominio están dados en términos de conocer las similitudes (las relaciones) entre varios conceptos matemáticos de un mismo tema o unidad; saber cómo un contenido está relacionado con otro más general (incluso aunque no aborde esa forma más general en ese grupo porque el programa no lo incluye); saber cómo concretar un contenido con otro más específico; saber cómo un contenido está relacionado con otros de cursos anteriores o posteriores; y saber la aplicación del contenido en otras áreas.

Con los descriptores del HM intentamos distinguir el saber que tiene el profesor sobre la relación intra y extramatemática del concepto y hacemos notar tres niveles abiertos del HM: en un primer nivel, el conocer la interrelación entre objetos matemáticos dentro de una misma unidad o tema; en un segundo nivel, la relación de un objeto matemático con otros anteriores o posteriores a él, o la relación de un contenido con otro más general o más específico, en las distintas etapas educativas; y en un tercer nivel, la relación del objeto matemático con otras áreas científicas (eg. física, química, sociología, economía, etc.).

Hacemos hincapié en que el límite del *horizonte matemático* nunca será alcanzado pues por muy profundo que sea el conocimiento que se alcance sobre un objeto matemático, nunca se elimina la posibilidad de establecer más conexiones con objetos existentes y nuevos objetos relacionados con los anteriores. En el segundo y tercer nivel se podría profundizar en los siguientes conocimientos dentro de la matemática o en otras áreas (respectivamente): Conocer, aparte de nuevas conexiones entre objetos matemáticos, la génesis del objeto matemático a enseñar y la aplicación de ese objeto con otros, lo cual puede dar pie a la comprensión del contexto de la génesis de dicho objeto; así como conocer otras representaciones, definiciones alternativas, historias y evoluciones del objeto matemático y, con ello, entender mejor al propio objeto matemático a enseñar.

En el subdominio *horizonte matemático* es importante la relación de los distintos contenidos que imparte el profesor, pero su riqueza está en no sólo saber que los contenidos se relacionan sino en saber **cómo** se relacionan. Al saber que los contenidos se relacionan, está implícito el papel que juega el *conocimiento curricular*, pues a través de éste, puede saber, de los distintos programas (programaciones), por ejemplo, los temas que hay que enseñar en secundaria y en bachillerato. Pero en el *horizonte matemático* hay aspectos muy interesantes, tales como: saber cómo se relacionan los conocimientos matemáticos, o saber de qué forma los aprendizajes de un mismo tópico van evolucionando a lo largo de la escolaridad.

Por otro lado, Ball y sus colegas (Ball et al., 2008) definen el subdominio del *conocimiento de contenido y estudiantes* (CC-Es) como la amalgama del entendimiento del contenido y saber lo que los alumnos pueden pensar o hacer matemáticamente, y distinguen en este subdominio las habilidades que tienen los profesores para predecir lo que a los alumnos les parecerá fácil, difícil, interesante, aburrido, estresante o motivador.

Los descriptores que proponemos en este subdominio incluyen saber escuchar e interpretar el conocimiento o pensamiento matemático que expresan los estudiantes en su lenguaje (común o en proceso de adquisición del nuevo concepto –mezcla de lenguaje común con matemático); saber las necesidades y dificultades de los estudiantes sobre el contenido matemático; prever la confusión que pudiera tener el alumno con algún aspecto específico del contenido que se esté viendo en clase; prever (anticipar) que los estudiantes no saben o no recuerdan un concepto o propiedad matemática; prever (anticipar) que los estudiantes se pueden quedar con una imagen o idea inadecuada del contenido; saber lo que a los estudiantes les parecerá cansado y aburrido de un contenido matemático específico.

Otros descriptores están redactados en términos de saber que los estudiantes pueden equivocarse al hacer determinado cálculo de un número o de un signo, provocado por un despiste al hacer una(s) operación(es) o transformación(es), o por no dominar el contenido que se les está presentando; saber que los estudiantes deben proceder ordenadamente respetando las convenciones matemáticas, para evitar confusiones y errores; saber que los estudiantes podrían hacer cálculos mecánicamente sin saber realmente lo que están haciendo; saber que a los estudiantes se les puede ocurrir una respuesta intuitiva para resolver un problema; prever que los estudiantes no vean que un problema es equivalente a otro, o que no vean que una igualdad la pueden usar en un sentido o en otro; saber que los estudiantes pueden ponerse a hacer cálculos sin antes fijarse en si pueden usar una propiedad; saber que para los estudiantes será más comprensible un tema si lo ven con un ejemplo concreto que aparece en el libro de texto; saber que los estudiantes entenderán “mejor” el ejemplo si antes de empezar a hacerlo se les remarcan las principales características del concepto que se usará en el ejemplo.

En el CC-Es, presentamos además otros descriptores referentes a saber que los estudiantes pueden atascarse en algunos detalles de la solución del problema y perder el sentido del problema; saber que a los estudiantes les puede parecer extraño usar por primera vez un método o regla que estaba diseñado para otro caso o situación del contenido; saber que los estudiantes, al resolver problemas extensos, pueden olvidar algún cálculo que ya habían hecho al inicio y no aprovecharlo cuando se utilice nuevamente para solucionar el mismo problema; prever que los estudiantes divaguen definiendo más variables de las que necesitan para resolver un problema; saber que los estudiantes pueden resolver fácilmente alguna parte operacional (algún sistema de ecuaciones, alguna ecuación de segundo grado, algún determinante) del procedimiento; y saber lo que a los estudiantes les parecerá interesante, motivador o desafiante en el ejemplo, ejercicio o problema que el profesor elija para enseñar el contenido.

De esos descriptores podemos destacar distintas naturalezas del *conocimiento del contenido y estudiantes* incluidas en ellos: Saber *escuchar e interpretar* el pensamiento matemático de los estudiantes; conocer *necesidades y dificultades* de los estudiantes; prever *confusiones y/o equivocaciones* de los estudiantes; prever lo que los estudiantes *no saben, no recuerdan, no ven o no se fijen*; prever que los estudiantes se pueden *quedar con una imagen inadecuada* del contenido tras una explicación del profesor; prever lo que les parecerá *cansado y aburrido* a los estudiantes; saber lo que les parecerá *interesante, motivador o desafiante*; saber que a los estudiantes se les puede ocurrir una *respuesta intuitiva*; saber lo que para los estudiantes será *más comprensible del contenido* o lo que podrán *resolver fácilmente*; conocer *obstáculos comunes* de los estudiantes para llegar a la solución de un ejercicio o problema. Así pues, de acuerdo con Hill, Ball, y Schilling (2008b), el foco del CC-Es es saber cómo los estudiantes piensan, saben, o aprenden ese contenido particular.

Ball et al. (2008), en el subdominio *conocimiento del contenido y enseñanza* (CC-En), destacan la conjunción del entendimiento del contenido y su enseñanza, conjunción que involucra el entendimiento del contenido matemático y su familiaridad con los principios pedagógicos para enseñar ese contenido. Incluye las habilidades que tienen los profesores para saber qué representaciones son más adecuadas para enseñar un contenido específico y para determinar lo que diversos métodos y procedimientos producen en la enseñanza. También incluye la capacidad que tiene el profesor para decidir con qué ejemplo empezar, cuáles usar para profundizar en el contenido, qué aportaciones de los alumnos tomar en cuenta, cuáles ignorar y cuáles destacar para usarlas posteriormente o saber cuándo aclarar más una idea, cuándo hacer una nueva pregunta o encomendar una nueva tarea para fomentar más el pensamiento matemático de los alumnos.

En los descriptores del CC-En hacemos notar distintas categorías o agrupamientos de los descriptores respecto a un “issue”: *Ejemplos; ayudas; gestión de la participación; traducir; hacer notar o remarcar; alertar; preparar actividades y forma de presentar o representar*.

En la primera categoría, *ejemplos*, proponemos los descriptores redactados en términos de saber con qué ejemplo o ejercicio empezar, cuándo y cuáles usar para enfatizar, reforzar o generalizar cierta idea; saber que la aplicación del concepto en un ejemplo le es útil para inducir luego la definición del concepto; saber que una de las potencialidades de un ejemplo, en concreto al desarrollar el ejemplo, es utilizarlo para destacar los aspectos relevantes del contenido matemático que pretende enseñarles ese día en clase; saber usar ejemplos con datos concretos, en lugar de desarrollar propiedades de forma general o con ejemplos genéricos, para explicar el contenido; saber que al explicar un ejemplo o un ejercicio, es importante que los estudiantes vean que los resultados obtenidos del ejemplo o ejercicio tienen un significado concreto; saber qué ejercicios dejarles de deberes para que practiquen.

Coincidimos con Rowland et al. (2009, p.72) en que "*los ejemplos son usados todo el tiempo en la enseñanza de las matemáticas y para algunas razones diferentes*". En nuestro estudio se puede observar que las profesoras hacen uso de los ejemplos para distintas razones, tanto para presentar después del ejemplo la definición del concepto, como para aprovechar el ejemplo para hacer hincapié en los aspectos más relevantes del contenido o para enfatizar, reforzar o generalizar cierta idea. Además, pudimos observar su conocimiento acerca de qué ejercicios dejarles de deberes para que practiquen y su preferencia por usar ejemplos con datos concretos en lugar de desarrollar propiedades de forma general o ejemplos genéricos para explicar el contenido. Asimismo, ambas profesoras dieron evidencia de su interés en que los estudiantes vean un significado concreto en los resultados obtenidos del ejemplo o ejercicio.

En la categoría *ayudas*, los descriptores que sugerimos se refieren a saber qué ayudas dar a los estudiantes en situaciones de confusión o dificultad, para que puedan dar solución a un ejercicio o resolver un problema; saber que una "buena" estrategia al hacer un ejemplo, ejercicio o problema para que los estudiantes lo comprendan o lo hagan, consiste en explicarles o hacerles hincapié en lo que quiere que hagan y para qué quiere que lo hagan o simplemente explicarles de lo que trata el ejercicio o problema; y saber cómo señalar a los estudiantes algún dato del problema que no aparece explícito y que luego se usará para dar solución a un ejercicio o resolver un problema.

Durante la enseñanza de un contenido se suscitan varias situaciones en el aula, y una de ellas se da cuando el profesor propone ejercicios o problemas para resolver. Y en ese momento los estudiantes deben resolverlos porque es parte del "*contrato didáctico*"[3]. Sin embargo, hay momentos en los que los estudiantes ni siquiera han empezado a

[3] El *contrato didáctico* es un término muy acuñado en la Teoría de Situaciones fundada por Brousseau; *grosso modo*, el *contrato didáctico* está dado por la relación del profesor con el alumno, es decir, está formado por un conjunto de comportamientos del profesor que son esperados por el alumno y un conjunto de comportamientos del alumno que son esperados por el profesor (Brousseau, 1989).

hacerlos porque no tienen idea de por dónde comenzar o porque no tienen mucha intención de iniciar, y es ahí cuando el profesor interviene para dar ayudas, que algunas veces pueden ser puntuales (“empujoncitos”) pero que en otras incluso pueden llegar hasta el punto de ayudar a resolver el ejercicio completo, principalmente en situaciones especiales (eg. en situaciones en las que el profesor ya intentó dar varias ayudas puntuales y observa que no son suficientes para lograr que el estudiante logre solucionar el ejercicio o el ejemplo).

En cuanto a la categoría *gestión de la participación*, hicimos una división en subcategorías: *Preguntas, respuestas, preguntas y respuestas, y para que hagan los ejercicios.*

Los descriptores correspondientes a *preguntas* se refieren a saber qué preguntas formular al explicar el contenido matemático: para hacer ver a los estudiantes que la respuesta de un estudiante es equivocada y orientar la pregunta a la respuesta que el profesor(a) quiere escuchar; para presentar o mostrar específicamente lo más importante del contenido que está enseñando (algunas veces las contesta ella misma y otras los estudiantes); para presentar un nuevo concepto, una nueva propiedad o una clasificación, es decir, introduce una nueva pregunta y la utiliza como “parte aguas” para introducir el nuevo concepto, propiedad o clasificación; para involucrar a estudiantes pasivos, es decir, saber qué preguntas formular sobre el contenido a un estudiante que normalmente no participa en clase; para gestionar por lo menos una participación pasiva de los demás estudiantes, cuando existe un diálogo entre el profesor y un determinado estudiante, de modo que se planteen el porqué de lo que se va exponiendo en el diálogo; y para ir guiando la solución de un ejemplo o ejercicio, resolver un problema o hacer una representación gráfica.

Para el profesor es muy importante que los estudiantes estén presentes en la clase no sólo físicamente sino mentalmente, pensando y razonando el contenido matemático que les está presentando. Ahí entra en juego la eficacia y conocimiento del profesor para saber cómo gestionar la participación de los estudiantes con la finalidad de fomentar y afectar lo mejor posible la enseñanza y el aprendizaje; para saber qué preguntas formular a los estudiantes al explicar el contenido y cómo conducir las respuestas a esas preguntas.

En la subcategoría *respuestas* proponemos los descriptores redactados en términos de saber qué respuestas de los estudiantes aceptar, cuáles interrumpir, cuáles ignorar o cuáles destacar, para alcanzar los objetivos de la enseñanza del contenido trazados por la profesora para esa clase; saber cómo orientar una respuesta correcta a un lenguaje matemático aceptado en la matemática escolar, es decir, atendiendo o enfocado a una convención matemática; saber cómo aprovechar las respuestas incorrectas de los estudiantes para hacerles ver las consecuencias de éstas en el contenido matemático; saber cómo aprovechar la respuesta de un estudiante, corregirla y utilizarla para explicar algún aspecto del contenido; saber cómo aprovechar la respuesta de un estudiante, referente al contenido, para corregir la de otro; y saber cómo aprovechar las respuestas de los estudiantes aportadas en la discusión que se presenta en el grupo para hacerles notar algún aspecto incorrecto del contenido.

El descriptor referente a la subcategoría *preguntas y respuestas* consiste en saber cómo transferir e interpretar la pregunta y/o respuesta de un estudiante y luego contestar a forma de explicación para todos los estudiantes, y el de la subcategoría *para que hagan ejercicios* se refiere a saber cómo gestionar la participación de los estudiantes para que participen activamente y hagan el ejercicio o problema y que no sólo copien lo que ella hace.

Cuando el profesor gestiona la participación de los estudiantes, aparte de saber qué preguntas formular, debe saber qué tratamiento dar a las respuestas, para favorecer la enseñanza del contenido que presenta e inclusive debe saber cómo controlar la gestión de la participación activa (implicación del estudiante en la solución del ejercicio o problema) de los estudiantes que tienen la costumbre de sólo estar copiando lo que el profesor hace en la pizarra. A este respecto, en esta categoría, un hecho importante a destacar consiste en que a mayor gestión de la participación, mayor riqueza en cuanto a saber cómo y qué respuestas aprovechar, cuáles interrumpir, cuáles ignorar o cuáles destacar, para orientar el contenido matemático a los objetivos de la enseñanza del contenido planteados por la profesora.

Por otro lado, el profesor también se enfrenta a saber entender las preguntas o respuestas que expresan los estudiantes en su lenguaje común o en un lenguaje en el que mezclan lenguaje común y lenguaje matemático (los estudiantes normalmente hacen esa mezcla cuando están en proceso de adquisición de un nuevo concepto), es decir, a saber transferir e interpretar de lenguaje común a lenguaje matemático. Pero el docente también afronta situaciones en las que ha de *traducir* de lenguaje matemático a lenguaje común. Respecto a este último aspecto presentamos la categoría *traducir*.

En la categoría *traducir*, los descriptores que presentamos consisten en saber cómo "traducir" a los estudiantes la actividad matemática presentada por otro estudiante o cómo "traducir" alguna actividad matemática del libro de texto a su lenguaje usual; y saber usar lenguaje común o más familiar a los estudiantes o una forma más explícita, más detallada, al explicar el contenido matemático para que los estudiantes lo comprendan "mejor".

En esta categoría se pone en juego la habilidad que posee el profesor para dominar el lenguaje matemático y el lenguaje familiar a los estudiantes, al igual que la capacidad del profesor para saber descomprimir el contenido y explicarlo de una forma más explícita y pormenorizada a los estudiantes con la intención de que lo comprendan mejor y se involucren más en el contenido cuando el profesor se lo explica.

En cuanto a la categoría *hacer notar/remarcar/destacar*, proponemos el descriptor que se refiere a saber cómo (y cuándo) hacerles notar, remarcar, destacar o aclarar, puntualmente, lo más importante del contenido que está enseñando.

Una forma que tiene el profesor de hacer saber a los estudiantes lo que considera más importante del contenido; lo más característico de un concepto, regla, propiedad, teorema o método que está presentando; la parte matemática más relevante del ejemplo, ejercicio o problema; o la similitud que existe entre varios conceptos que está presentando; consiste en hacérselos notar, remarcárselos o destacárselos, haciendo énfasis y hasta cambiando el tono de voz (normalmente lo dice más fuerte) y usando expresiones como "fijaros aquí...", "atención aquí..." o "mirad que..." al explicarles el contenido, para que los estudiantes se enteren de que eso es lo más esencial que deben aprender de lo que se les está explicando.

Respecto a la categoría *alertar o prevenir* proponemos los descriptores saber cómo plantearles una situación hipotética para prevenirlos de error y saber cómo hacerles señalamientos sobre errores que cometieron algunos estudiantes en el examen, para alertar a los demás sobre los errores que se cometen y de alguna forma prevenirlos de ese error.

En la categoría *alertar o prevenir* queremos poner de relieve el saber que posee el profesor referente a cómo plantearles medidas preventivas a los estudiantes frente a los errores más comunes que éstos comenten: por ejemplo, poner a los estudiantes en una situación susceptible de error, para hacerles notar cuál sería ese error, es decir, el profesor se adelanta a una situación de riesgo que podría presentárseles a los estudiantes en ejercicios posteriores, con la intención de que tengan idea de lo que deben hacer ante una situación parecida a la que se les plantea. Similarmente, otro ejemplo puede suscitarse en cuanto termina de entregar los exámenes ya calificados (revisados) y les hace señalamientos sobre los errores más comunes que cometieron los estudiantes (sin decir el nombre exacto del estudiante que lo cometió sino centrándose en el error) para con ello, de alguna forma, prevenirlos para que los demás no comentan el mismo error.

El descriptor referente a *preparar actividades* consiste en saber cómo prepararles un compendio de actividades a los estudiantes, para que afiancen el contenido matemático que les está enseñando.

Esta categoría nos sirve de vía para comentar que una de las mayores problemáticas para el profesor consiste en saber qué y cómo preparar actividades a los estudiantes para enseñar el contenido matemático, especialmente cuando los estudiantes saben que en los exámenes de la asignatura y en el examen de selectividad no es habitual preguntar aspectos teóricos profundos (eg. demostraciones), lo cual implica una pérdida instantánea de interés a este respecto, o cuando se percibe poca paciencia del alumnado, que pretende que todo sea de cálculo rápido, nada complicado y espera que el profesor dé una colección de ejercicios prácticos para realizar.

Esto muestra otro de los obstáculos a los que se enfrenta el profesor para enseñar matemáticas. Sabemos que ahora son otros tiempos y esta generación puede estar más acostumbrada a resolver las cosas a "golpe de ratón" y tal vez esperan que en clase les presenten los conocimientos según los hábitos cotidianos de la juventud de esta época.

El profesor tiene la encomienda de buscar el equilibrio constante y enfrentarse al reto de enseñar matemáticas de la manera más amena posible, con sustento matemático, sin caer en la tentación de convertir las aulas en simples ludotecas (con poco o sin contenido matemático) o monólogos entre él y la pizarra. Así pues, tiene que ingeniárselas para convencer y atraer al alumnado sin dejar de lado la consistencia matemática teórica, pero en la realidad, ¿cómo puede adquirir ese conocimiento el profesor?, ¿quién puede motivarlo a formarse en ese respecto?, ¿cómo hacer que gestione su propia formación y no desista cuando vea que sus esfuerzos parecen no tener frutos (al menos inmediatos)?

El profesor de ahora, además de saber cómo enseñar matemáticas, se enfrenta al reto de saber cómo enseñar matemáticas a estudiantes del siglo XXI, saber cómo enseñar a demostrar, por ejemplo, la regla de Cramer a estudiantes de bachillerato que viven cazados por un mundo cibernético y pragmático. Aquí podríamos destacar el hecho de ¿cómo potenciar los recursos "ordinarios" y tecnológicos para el aprendizaje matemático de los alumnos?, ¿qué conocimiento debe tener el profesor para afrontarlo?, ¿qué actividades debe ingeniar y preparar el profesor para enseñarles el contenido?

Por tanto, es sumamente importante saber cómo y cuáles actividades prepararles a los estudiantes tanto para trabajar en clase como para dejarles de deberes, con el objetivo de presentar, desarrollar y consolidar el contenido matemático a enseñar. Sabemos de antemano que

"El contenido matemático es el que es y no podemos cambiarlo, lo único que se puede hacer es diversificar los medios" (Profesora Aly, entrevista).

Por otro lado, en la categoría *forma de presentarlo/representarlo* proponemos varios descriptores respecto a saber cómo introducir un tópico matemático; a conocer la estrategia de pregunta-respuesta para relacionar varios conceptos hasta llegar al deseado; a saber cómo cerrar la presentación de un ejemplo o tópico matemático, por ejemplo, recapitular lo que han visto hasta ese momento, lo que les falta por ver a partir de lo que han visto o la utilidad, aplicación, dirección u orientación de ese ejemplo o tópico matemático en temas siguientes.

Además proponemos otros que se refieren a saber rescatar la idea del contenido matemático que esté presentando, tras la digresión en su discurso; a saber “poderosas” analogías para presentar o representar el contenido matemático, por ejemplo, saber que al usar la analogía de un objeto matemático con un objeto común para aproximarse más al lenguaje usual de los estudiantes, puede hacer que los estudiantes logren entender “mejor” el significado de un contenido matemático; o saber usar una analogía o diferencia entre contenidos matemáticos previos y el actual, para explicar este último.

Otros descriptores tienen que ver con saber cómo explicar una parte o toda la estrategia que se utiliza para hacer la demostración, método, procedimiento o solución; o tienen relación con saber qué es lo que hay que repetir y cómo, para aclarar dudas del contenido a los estudiantes o reafirmar algunos aspectos del contenido. Además, hay otro que consiste en saber cómo usar la comparación entre algunas formas de hacer un ejercicio o entre varias representaciones, para destacar a los estudiantes los aspectos del contenido en los que se deben fijar.

También presentamos otros descriptores respecto a saber que con determinada representación los estudiantes visualizarán “mejor” algún aspecto del contenido que el profesor considere relevante o se harán una imagen concreta sobre tal aspecto, y un caso particular de éste, conocer la potencialidad de los esquemas gráficos para representar un contenido.

Inclusive, entre los descriptores hay algunos referentes a saber enfocar la enseñanza de un método de solución de un problema para su aplicación posterior; a saber cómo evocar un concepto(s), un ejemplo, ejercicio, problema o procedimiento equivalente visto(s) o hecho(s) anteriormente, para presentar un nuevo concepto o un ejemplo del nuevo concepto, para que los estudiantes traigan a la mente ese contenido o se hagan una idea de cómo se resuelve el nuevo problema; o a saber cómo dar más confianza a los estudiantes en el resultado que han obtenido del ejemplo o ejercicio.

El profesor tiene distintas formas de presentar o representar el contenido a enseñar, que en su momento considera más útiles, con la finalidad de hacer el contenido comprensible para los estudiantes (este es un principio esencial del CDC expuesto por Shulman, 1986). Así pues, el docente usa las representaciones que considera más pertinentes, acordes a los conocimientos que él posee y a la situación y circunstancias que se le presentan en aquel momento con aquellos estudiantes (eg. usa analogías, les comenta estrategias para resolver los problemas o hacer los ejercicios, compara entre distintas formas de hacer los ejercicios para que los estudiantes distingan los aspectos del contenido en los que se deben fijar, echa mano de esquemas gráficos para que los estudiantes visualicen, etc.).

La categoría *forma de presentarlo/representarlo* es una de las categorías en donde se pueden hacer más explícitas las creencias y concepciones del profesor acerca de la enseñanza-aprendizaje. Partiendo de sus creencias, concepciones y conocimientos acerca de cómo aprenden mejor los estudiantes, el profesor toma varias decisiones respecto a la *forma de presentar o representar el contenido matemático*. Por tanto, ésta puede ser una de las categorías más susceptibles de que pueda surgir más variedad de los distintos descriptores que presentamos, pues mucho depende del estilo de enseñanza del profesor, del paradigma de enseñanza-aprendizaje asumido por el mismo. Esto guarda relación con las dos primeras cuestiones relacionadas con el CDC en las que, de acuerdo con Philipp[4] (2007), se continúa trabajando. Es decir, aunque el foco de estudio de nuestra investigación no fue propiamente estudiar el papel de las creencias, aspectos y valores en el desarrollo del CDC, durante el análisis y comprensión del CDC fueron notables dos aspectos, tanto la influencia de la idiosincrasia (que incluye creencias, afectos y valores) del profesor en cuanto a saber cómo presentar o representar el contenido matemático a enseñar, como la dependencia de los paradigmas de enseñanza-aprendizaje asumidos por el profesor. Sin embargo, como estas dos cuestiones no eran nuestro foco de atención, no aportamos evidencias que sirvan de sustento para validar

[4] Philipp (2007) (citado en Godino 2009, p.17) expresa que algunas de las cuestiones sobre las cuales se continúa trabajando respecto al CDC son referidas a: 1) El papel de las creencias, afectos y valores en el desarrollo del CDC del profesor; 2) determinar si los componentes del CDC son dependientes de los paradigmas de enseñanza-aprendizaje asumidos; 3) mejora de los métodos para evaluar el CDC y nociones relacionadas; 4) elaboración de nociones más globales que incluyan conocimientos, creencias y afectos, tales como orientación, perspectiva e identidad del profesor.

científicamente estas dos afirmaciones. Pero queremos hacer una llamada de atención en esos dos aspectos a considerar en futuras investigaciones sobre el CME de profesores de bachillerato.

En esta investigación, en concordancia con el modelo del CME de Ball et al. (2008), tomamos en cuenta que el *"conocimiento curricular"* (CC) se refiere al conocimiento sobre qué contenidos deben aprender los estudiantes y la orientación que deben tomar esos contenidos en el aprendizaje (incluye los materiales curriculares de los que hace uso el profesor). En este conocimiento el currículo juega un papel fundamental (Shulman, 1986).

Además, existen otros dos aspectos a considerar en el conocimiento curricular, propuestos por Shulman (1986), el *"conocimiento curricular lateral"* (saber con qué otros contenidos abordados al mismo tiempo en otras asignaturas se relaciona el contenido que está impartiendo) y el *"conocimiento curricular vertical"* (saber con qué otros contenidos matemáticos, que han sido y serán enseñados posteriormente, se relaciona el contenido que está impartiendo y conocer los materiales curriculares para abordarlos).

Reconocemos la importancia del *"conocimiento curricular vertical"* para el profesor en general, independientemente del nivel escolar en el que imparta clases. En cuanto al *"conocimiento curricular lateral"*, un aspecto a destacar especialmente en los profesores de bachillerato es la familiaridad que tenga el profesor con los materiales curriculares que sus estudiantes estén estudiando en otras asignaturas al mismo tiempo. Esto es especialmente importante en el nivel de bachillerato (y también en secundaria y universidad) porque es cuando el profesor imparte clases de un área en particular, a diferencia de un profesor de primaria que no sólo imparte de un área sino varias (matemáticas, ciencias naturales, civismo, etc.), pues si tomamos en cuenta que la mayoría de los profesores de bachillerato tiene una formación de licenciado en matemáticas, entonces por su propia formación podría no contar con ese conocimiento.

En nuestra investigación, directamente de la práctica, sólo obtuvimos evidencia de tres descriptores del *conocimiento curricular* que son más de corte *vertical*. Se refieren a saber qué contenidos y cómo están organizados en el libro de texto, a saber qué temas se verán posteriormente en el curso, y a saber qué contenido deben aprender los estudiantes aunque no aparezca en el libro de texto.

Los principales materiales consultados por las profesoras en este estudio son: los contenidos del currículo promulgados por la Consejería de Educación; libro de texto, internet y el temario para el examen de selectividad propuesto por la Universidad[5].

En muchas ocasiones, el libro de texto es el principal material curricular con el que cuentan los profesores de bachillerato. Sin embargo, es notoria la ausencia de una variedad de materiales curriculares con actividades didácticas elaborados de manera consistente y secuencial en los que se haga explícito el objetivo, los propósitos a conseguir, las habilidades o competencias a desarrollar, etc. Nos referimos a materiales curriculares elaborados, avalados y revisados por especialistas competentes, sabedores del conocimiento profesional de los profesores de bachillerato, de la matemática involucrada, de la problemática escolar y situados en un contexto específico. Hablamos de especialistas que sean conscientes de la relevancia e importancia de esos materiales que sirvan de apoyo para el profesor para el uso del currículo.

Por otro lado, también obtuvimos descriptores referentes al *conocimiento pedagógico general* (CPG). Esta categoría no está incluida en el modelo del CME de Ball et al. (2008), pero guarda relación con el CC-En, pues este subdominio se caracteriza por ser una amalgama entre el conocimiento del contenido y los principios pedagógicos. No obstante, no siempre se presentan en amalgama esos dos conocimientos. En nivel bachillerato, generalmente el profesor, durante su formación académica, recibió un conocimiento orientado al contenido pero no a cómo enseñar ese contenido. En ese caso, la experiencia es uno de sus mayores referentes para saber cómo enseñar el contenido. Nosotros queremos destacar a través de descriptores algunos aspectos del CPG evidenciados en las profesoras que participaron en este estudio. Los descriptores que proponemos a este respecto incluyen el conocimiento y las habilidades discursivas

[5] En el último año de bachillerato, las profesoras tienen, además, la encomienda de preparar a los estudiantes para ese examen, y es la universidad la institución que realiza los exámenes de selectividad, y para ello se proponen unos objetivos y contenidos mínimos en cada uno de los diferentes contenidos de la asignatura así como los puntos principales que no deben faltar en el currículo, porque esos son los que después van a ser examinados.

para motivar a los estudiantes cuando los ve agobiados, decepcionados de ellos mismos o preocupados por el trabajo de clase que tienen que hacer, o porque crea que se consideran incapaces de aprender un método para hacer ejercicios o procedimientos; para pedirles que hagan los ejemplos o los ejercicios (para realizar en clase o de deberes); o para aclarar las dudas de los estudiantes. También incluye conocer estrategias para controlar la indisciplina o distracción en el aula, para atraer la atención de los estudiantes o llamar la atención a los estudiantes cuando están comportándose de manera impropia para una clase; saber cómo estimular a los estudiantes que sí hicieron sus deberes (tareas) y cómo controlar al estudiante que sí hizo sus deberes (tareas) para que también trabajen y participen otros estudiantes, al hacer o revisar los deberes en clase; además del conocimiento y habilidad para acercarse a revisar lo que han hecho los estudiantes y cómo lo han hecho.

Cabe destacar que todos los descriptores comentados en este epígrafe son formulados a partir del estudio de dos profesoras, considerando un solo tema (Álgebra) para un curso orientado a estudiantes del último año de bachillerato de la especialidad de Ciencias Sociales y otro de la especialidad de Científico Tecnológico. Sin embargo, consideramos que estos descriptores pueden ser tomados en cuenta para pulir la matización de los subdominios del modelo del conocimiento matemático para la enseñanza y profundizar en la comprensión de dicho modelo para el nivel bachillerato.

Queremos hacer notar que al desarrollar el estudio de dos casos en nuestra investigación, pudimos observar diferentes razones por las que los descriptores de un caso no se evidencian en el otro en los distintos subdominios del CME. En este sentido, podemos inferir las siguientes:

- Por el propio tópico (propiedades de los determinantes) o enfoque propuesto para esa especialidad (Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales o Científico Tecnológico): En ocasiones es el propio tema o curso el que permite propiciar la evidencia de cierto descriptor, por ejemplo, cuando se trata del curso de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales, puede ser más natural que aparezca el descriptor correspondiente a saber la aplicación del contenido en otras áreas, pues en el propio nombre del curso se hace explícito y esto implica abordar directamente en el currículo aplicaciones del contenido en otras áreas, a diferencia del curso normal de Matemáticas en el que no se haga explícito abordar aplicaciones del contenido.

- Por los conocimientos propios (que tiene o no) cada profesora: En general, cada profesor tiene su propio banco de conocimientos y por tanto es lógico que algunos den evidencia de algunos descriptores y no de otros.

- Por el estilo propio de enseñanza de cada profesora (creencias y/o convicciones personales sobre la enseñanza y el aprendizaje): El docente adopta un estilo de enseñanza y toma acciones influenciadas por su idiosincrasia referente a cómo enseñar ese contenido matemático. Este aspecto afecta directamente al subdominio CC-En y como consecuencia repercute en algunos de los descriptores de este subdominio. Por ejemplo, en la categoría *forma de presentarlo/representarlo* hay profesores que prefieren introducir un tema con algún dato histórico o una breve reseña histórica de ese contenido matemático para contextualizar el tópico a presentar, mientras que otros entran directamente en materia.

- Porque en las clases observadas, durante la enseñanza no se dan situaciones propicias para que aparezca ese descriptor. Hay evidencias de descriptores que se suscitan debido a la situación que se presenta. En este caso es muy importante la intervención de los estudiantes, pues hay momentos en los que gracias a su intervención (o a la interacción sobre el contenido matemático entre el profesor y los estudiantes) surgen respuestas o acciones del profesor que dan evidencia de determinados descriptores, pero si no se da la situación para que se evidencien no hay prueba de esos descriptores. Por ejemplo, durante las clases observadas de Emi, no se dan situaciones propicias para que aparezca el descriptor referente a saber que los estudiantes al resolver problemas extensos, pueden olvidar algún cálculo que ya habían hecho al inicio y no aprovecharlo cuando se requiera nuevamente para solucionar el mismo problema, pero no podemos decir que Emi no cuente con ese conocimiento, pues simplemente no hubo situaciones en las que se evidenciara ese descriptor.

VI.2. Respecto a la formación de profesores

Una de las problemáticas que planteamos en el capítulo “Introducción” de este trabajo consiste en la ausencia de una formación inicial y continua planteada específicamente para profesores de matemáticas de bachillerato. La mayoría de las ofertas de formación que ofrecen algunas escuelas o instituciones para la formación de profesores en servicio de este gremio corresponden más a cursos de capacitación y actualización que son puntuales más que continuos y en ocasiones más aislados que hilados conceptualmente. Nosotros queremos subrayar la notoria ausencia de un organismo, institución o colegiado que vigile o tenga la encomienda de reglar, ordenar y monitorear la consistencia de la secuenciación y del seguimiento de esa secuencia de los temas y cursos ofrecidos para su formación. Por tanto, no es descabellado admitir la escasez de propuestas formativas diseñadas primordialmente o esencialmente para profesores de bachillerato.

En nuestro estudio asumimos que el profesor es un profesional y que una característica distintiva del profesionalismo es su conocimiento profesional. Miramos al profesor como un elemento clave en la enseñanza y en el aprendizaje de la matemática y por tanto es muy importante **conocer, comprender y caracterizar el conocimiento del profesor** para poder elaborar propuestas formativas e instrumentos para diseñar, fomentar y fortalecer la formación inicial y continua de los profesores de bachillerato.
Pues, en la realidad, ¿qué oportunidades tiene un profesor de bachillerato para reflexionar sobre su práctica y formarse profesionalmente?, ¿qué pasaría en el caso en el que el profesor de bachillerato crea que tiene un buen dominio sobre el conocimiento matemático para la enseñanza y no sea así?, ¿quién puede hacerle caer en la cuenta de eso, aparte de sus estudiantes?, ¿qué espacios tiene para concienciarse de ello, aprenderlo, mejorarlo o perfeccionarlo?, ¿quién debe enseñarle eso al profesor de bachillerato?, ¿cómo debe emplearlo al enseñar un contenido matemático a los estudiantes?, ¿hasta cuándo seguirá siendo una bella utopía el que existan espacios diseñados, planeados, monitoreados y regulados para que el profesor de bachillerato adquiera o refuerce los distintos subdominios del CME?

Nosotros consideramos que un punto importante en la formación del profesor consiste en provocar la reflexión del profesor en y sobre su quehacer profesional, es decir, en gestionar su reflexión en la acción y sobre la acción en términos de Schön (1987). Y que, en concordancia con Zamudio (2003), la reflexión del docente respecto a lo que debe aprender el alumno y a cómo lo aprende es lo que produce la interacción entre sus creencias y saberes y las condiciones contextuales, configurando y orientando sus acciones.

La enorme tarea de la formación inicial y continua del profesorado de bachillerato es compleja, porque, entre otros aspectos, es un problema social que no sólo depende de la buena voluntad de unos pocos profesores preocupados por su formación, ni de un investigador con la mejor intención de ayudarlos. Se requiere de una y mil cosas, pero podemos empezar por formar un micromundo integrado por un equipo de trabajo colaborativo de reflexión entre profesores e investigadores cuyo impacto se vea reflejado en la práctica del profesor (Climent y Carrillo (2002); Climent y Carrillo (2003); Jaworski (2004); Carrillo, et al. (2007); Climent y Carrillo (2007); Muñoz-Catalán et al. (2010)). Consideramos que una buena cuestión a trabajar en un inicio es lo concerniente al conocimiento profesional, especialmente en los distintos subdominios del CME.

En el conocimiento profesional del profesor, una de las cuestiones más esenciales para el docente es saber qué enseñar y cómo enseñar. A este respecto, existe un punto a destacar, la separación entre contenido y pedagogía, es decir, entre matemática y métodos (Correia, 2009). En ocasiones, cuando se ofertan cursos para la formación de profesores de bachillerato, el contenido a enseñarles durante su formación consiste de cursos de matemáticas que pudieran ser impartidos a otros profesionales y no especialmente diseñados para profesores. Esa formación incluye también, en el mejor de los casos, cursos sobre pedagogía general. Sin embargo, es notoria la ausencia de cursos en los que se integre el conocimiento del contenido y su enseñanza como una amalgama, o sea, tomando en cuenta la conjunción de dos dominios: conocimiento del contenido y el conocimiento didáctico del contenido como una amalgama. Estos dos dominios son precisamente los que componen el CME en el modelo propuesto por Ball et al. (2008), el cual tomamos como marco de referencia en esta investigación.

Si trabajamos sobre los distintos subdominios del CME podríamos contribuir poco a poco a la mejora de propuestas y a la elaboración de contenidos a enseñar **a los**

profesores durante su formación. Por ejemplo al averiguar y comprender el CEC con mayor detalle, podríamos contribuir a esa mejora y elaboración cuando conozcamos **qué matemática necesita el profesor para enseñar** determinado contenido, además podríamos completar y enriquecer esa mejora y elaboración con el entendimiento del CC-En y CC-Es.

Más aún, los seis subdominios del CME son importantes para estudiarlos y considerarlos en la formación de los profesores, pues simplemente lograr que los profesores sean conscientes y reflexionen sobre esos subdominios es un gran paso en su formación. No obstante, no basta con sólo reflexionar sino que además tendrían que actuar y reflejar los resultados de manera "favorable" en la lucha diaria de la enseñanza de las matemáticas. Para esto, hace falta saber cómo ayudar a los profesores a trabajar los distintos subdominios del CME en beneficio de su labor docente. Este último aspecto precisamente es un punto muy interesante que pudiera tratarse en siguientes estudios y del cual hablaremos más adelante en lo referente a futuras investigaciones.

Queremos cerrar este epígrafe comentando que, por tanto, coincidimos con Godino y sus colegas en que *"se necesita implementar una agenda de investigación en formación de profesores (Godino, Rivas, Castro y Konic, 2008) que aporte información sobre las posibles estrategias a seguir para lograr que los profesores conozcan las herramientas, las adapten y apliquen a su propia práctica."* (Godino, 2009, p.29). En dicha agenda se ha de considerar como eje central el CME en la formación de profesores de bachillerato. También hay que destacar que es conveniente abordar la formación del profesor de tal modo que uno de sus focos esenciales sea el desarrollo profesional del profesor, visto éste como un desarrollo complejo donde muchos dominios o componentes del conocimiento se ponen en juego y necesitan abordarse y actualizarse. Asimismo, queremos poner de relieve que estamos conscientes de que el CME es sólo un elemento del conocimiento profesional integrado en el desarrollo profesional del profesor, pues entendemos al profesor como un profesional, como un sujeto global que necesita plantearse su complejo conocimiento profesional e intentar mejorarlo.

Además, de acuerdo con Ponte (2010), el profesor es un profesional que tiene un conocimiento específico que involucra matemáticas, currículo, estudiantes, didácticas (y educación, contexto, etc.), que realiza prácticas específicas y que tiene una identidad específica como individuo y como profesional identificado con un grupo. Por tanto, aparte de los conocimientos, otro de los ejes centrales a considerar en los programas de formación es la identidad del profesor como profesional, de modo que se contemplen los objetivos que el profesor se plantea y los objetivos impuestos por la sociedad, así como su visión de la finalidad de la educación y su papel en la sociedad (Ponte y Chapman, 2008; Cestari et al., 2007).

VI.3. Aportaciones de la investigación

Silverman y Thompson (2008) afirman algunas limitaciones para la noción del CME: *"Aunque el conocimiento matemático para la enseñanza ha comenzado a ganar atención como un concepto importante en la comunidad de investigación sobre formación de profesores,* ***hay una comprensión limitada de lo que es eso*****,** ***cómo se puede reconocer y cómo se puede desarrollar en la mente de los profesores****"* (p. 499). (El agregado en negritas es nuestro)

Respecto a la cuestión "**una comprensión limitada del CME"**, nosotros más bien diríamos que hace falta un mayor esclarecimiento de los distintos subdominios del CME, es decir, hacer más explícitos y detallados los elementos que componen cada subdominio, con la finalidad de ayudar a aclarar la distinción entre algunos de ellos, por ejemplo, la distinción entre CCC y CEC. Consideramos que nuestro estudio contribuye a esta cuestión y también en parte, a la cuestión **"cómo se puede reconocer el CME"**, pues en la tesis doctoral se proporciona una matización del modelo del CME en bachillerato y con él una serie de descriptores o indicadores para identificar y comprender los distintos subdominios del CME que pueden servir para analizar a otros profesores, así como a tener en cuenta en la formación inicial y continua del profesorado de bachillerato. La propuesta que hacemos es un primer paso para la construcción o reconstrucción de un modelo matemático para la enseñanza en bachillerato, para el cual se requiere de nuevos refinamientos y elaboraciones. Reconocemos que otra cuestión por trabajar en una siguiente etapa es: **"cómo se puede desarrollar en la mente de los profesores"**.

Godino (2009) expresa que los modelos del conocimiento matemático para la enseñanza propuestos en la literatura de Matemática Educativa (y en particular, el CME de Ball et al. 2008), incluyen categorías que son muy generales; y considera "*[…] que sería útil disponer de modelos que permitan un análisis más detallado de cada uno de los tipos de conocimientos que se ponen en juego en una enseñanza efectiva (proficiente, eficaz, idónea) de las matemáticas. Ello permitiría orientar el diseño de acciones formativas y la elaboración de instrumentos de validación de los conocimientos del profesor de matemáticas*." (Godino, 2009, p.19).

A este respecto, consideramos que los descriptores que presentamos pueden ser tomados en cuenta tanto para detallar o perfeccionar la matización de los subdominios del modelo del CME y profundizar en la comprensión de dicho modelo para el nivel bachillerato, como para servir de indicadores que ayuden a estudiar y analizar a otros profesores y también para guiar el diseño de propuestas de formación inicial y continua del profesorado de bachillerato.

Además, subrayando que "*cuando hablamos del profesor nos estamos refiriendo a alguien que se sumerge en el complejo mundo del aula para comprenderla de forma crítica y vital, implicándose afectiva y cognitivamente en los intercambios inciertos, analizando los mensajes y redes de interacción, cuestionando sus propias creencias y planteamientos, proponiendo y experimentando alternativas y participando en la reconstrucción permanente de la realidad escolar"* (Schön, 1992, citado en Lucero y Chiarani, 2004, p.1), pensamos que en términos generales nuestro trabajo puede contribuir con un granito de arena a mejorar el conocimiento y el entendimiento del complejo mundo de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas que afronta el profesor en su quehacer diario.

VI.4. Limitaciones del estudio y futuras investigaciones

La presente investigación constituye un primer diagnóstico sobre descriptores que dan cuenta de la caracterización de los distintos subdominios del CME en bachillerato. Sin embargo, aún hay que continuar refinando (enriqueciendo) los descriptores que proponemos, hay que sustentarlos con más ejemplos en otros dominios de la matemática (eg. cálculo, probabilidad y estadística, etc.), es decir, ponerlos a prueba con otros profesores y en los distintos temas de matemáticas que se imparten en bachillerato.

Además, falta profundizar más en todos los subdominios y posiblemente más en aquellos de los que apenas obtuvimos información, por ejemplo, el CC y el HM. Otro aspecto que no fue considerado en esta investigación consiste en estudiar la relación entre los descriptores de los subdominios del CME y en profundizar también en los conocimientos matemáticos para la enseñanza del "profesor de matemáticas ideal" en bachillerato.

Aparte de continuar refinando los descriptores que presentamos (incluso la aparición de nuevos descriptores) en los distintos subdominios, sería interesante estudiar los más significativos para una "buena" enseñanza, y utilizarlos como indicadores para evaluar el CME y de esa forma vincular CME con "buena" práctica o "buena" enseñanza. Podríamos tomar algunos de los descriptores más significativos, centrar la atención en el estudio y profundización de éstos y en su importante impacto sobre las competencias del profesor (en su calidad de enseñanza), es decir, obtener primero los descriptores o indicadores que más influyen en una "buena práctica" y, luego, hacer un estudio similar al de Hill et al. (2008a) donde se compare el CME y la calidad de la instrucción utilizando dichos descriptores.

Asimismo, otro aspecto interesante a realizar en futuras investigaciones, en términos generales, es saber cómo aprovechar cada uno de distintos subdominios del CME para favorecer la calidad de la instrucción. Por ejemplo, estudiar cómo aprovechar el subdominio CEC en la formación de profesores, es decir, el conocimiento "especializado" del contenido que puede verse cuando los estudiantes solicitan explicaciones acerca de los procedimientos matemáticos o en métodos de solución no estándar dados por los estudiantes. Un CEC relacionado con lo que Ma (1999) llama *"profunda comprensión de las matemáticas fundamentales"*, un tipo de conocimiento profundo y coherente del profesor. Hacer uso del CEC para que durante su formación el propio profesor se cuestione, reflexione y enriquezca su CEC y que a su vez esa reflexión se traduzca posteriormente en buena práctica.

Uno de los focos relevantes, fundamentales y complejos a tratar en la formación inicial y continua de los profesores de matemáticas en bachillerato consiste en saber cómo aportar oportunidades a los profesores para adquirir, consolidar y fomentar su conocimiento referente a los seis subdominios del CME. Dicho conocimiento puede permitirle equiparse de conocimientos para afrontar de la “mejor” manera su quehacer profesional en el día a día. Esta es una de las principales tareas a tratar por el formador de profesores de bachillerato y que aún falta estudiar, por lo cual hay mucho que investigar en esta línea.

En este sentido, falta investigar sobre la cuestión: **cómo se puede desarrollar el CME en la mente de los profesores**. Si bien es cierto que afirmamos que la matización del modelo del CME en bachillerato y los descriptores o indicadores pueden ser tomados en cuenta en la formación inicial y continua del profesorado de bachillerato, aún falta hacer explícito cómo desarrollar los distintos subdominios del CME en la mente de los profesores.

Más aún, una de las futuras líneas de investigación podría ser enfocada hacia el saber o conocer la forma en las que el CME debe ser adquirido por el profesor para la enseñanza, viendo la enseñanza en el sentido de Franke et al. (2000), es decir, como un aprendizaje en y desde la práctica acerca de las formas en cómo apoyar y ayudar constantemente a los estudiantes en su aprendizaje. De hecho, para Franke et al. (2007) la práctica puede ser centrada en tres aspectos: el discurso, las normas y la construcción de relaciones, en la cual uno de los focos sea el consenso cimentado en la idea de que los estudiantes necesitan oportunidades en las aulas para compartir su pensamiento matemático, discutir diferentes alternativas y el uso de herramientas matemáticas para solucionar problemas.

Por otro lado, dos cuestiones en las que se podría continuar investigando, y que señalábamos al inicio en las conclusiones respecto a la categoría *forma de presentar/representar* del subdominio CC-En, son dos de las cuestiones propuestas por Philipp (2007) (citado en Godino 2009, p.17), las cuales consisten en conocer el papel de las creencias, afectos y valores en el desarrollo del CDC del profesor y en determinar si los componentes del CDC son dependientes de los paradigmas de enseñanza-aprendizaje asumidos. Estas dos cuestiones parecen influir de manera considerable en *la forma de presentar y representar el contenido* a enseñar, por eso la insistencia en atender esas cuestiones en futuras investigaciones sobre el CME del profesor de bachillerato.

Cabe enfatizar en que en el modelo del CME sólo estamos hablando del conocimiento matemático para la enseñanza, y a eso se atribuye su riqueza. Pero hay que mencionar que dicho conocimiento sólo es un fuerte elemento del conocimiento profesional del profesor, si consideramos el conocimiento profesional en términos más amplios en los que además del conocimiento matemático para la enseñanza se consideren otros componentes. En términos generales, aunque el CME es sumamente importante, no lo soluciona todo, pues el profesor y los estudiantes son personas, es decir, no son máquinas sino seres complejos con identidad propia, con actitud, idiosincrasia, sentimientos y comportamiento propio; son seres susceptibles a factores externos que pueden modificar el medio en el que se desenvuelven profesor-estudiantes ligados por un contenido matemático y por unos intereses sociales.

Finalmente, se puede señalar que un aspecto pendiente en la agenda del formador de profesores, consiste en saber cómo concienciar a las autoridades correspondientes respecto a hacerles notar y convencer de que *"el cambio del profesor de matemáticas es un proceso, más que un evento"* (Sowder, 2007, p.213), pues el reconocimiento de esta idea está siendo usado exitosamente en algunos lugares para justificar la necesidad de recursos para **programas plurianuales coherentes de desarrollo profesional** (Sowder, 2007). Este aspecto es sumamente importante para poder realizar una formación de profesores de bachillerato efectiva (continua, consistente y secuenciada), es un punto muy importante que no se debe descuidar y en el que aún hay que trabajar bastante.

REREFENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Argyris, C., y Shön D.A. (1974). *Theory in practice: Increasing professional effectiveness*. San Francisco: Jossey-Bass.

Azcárate, P. (1999). El conocimiento profesional: naturaleza, fuentes, organización y desarrollo. *Quadrante*, 8, 111-138.

Ball, D.L. (2000). Bridging practices. Interwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. En *Journal of Teacher Education*, *51* (3), pp.241-247.

Ball, D.L. (2002). Knowing mathematics for teaching: Relations between research and practice. In *Mathematics and Education Reform Newsletter*, *14* (3), 1-5.

Ball, D.L. (2003). *What mathematical knowledge is needed for teaching mathematics.* Paper presented at the U.S. Department of Education, Secretary's Mathematics Summit, Washington, DC, February 6, 2003. Disponible en http://www-personal.umich.edu/~dball/presentations/index.html [Visitado el 10 de mayo de 2008].

Ball, D.L y Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. En B. Davis y E. Simmt (Eds.), *proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*, Edmonton, AB: CMESG/GCEDM.

Ball, D.L., Hill, H.C. y Bass, H. (2005). 'Knowing Mathematics for Teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide?' *En American Educator*, pp. 14-46

Ball D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59* (5), 389-407.

Ball, D.L., Charalambous C.Y., Thames M. y Lewis J.M. (2009). RF1: Teacher knowledge and teaching: viewing a complex relationship from three perspectives. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H. (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp.121-150. Thessaloniki, Greece: PME.

Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings*. Buckingham: Open university press. Vol. I.

Belardinelli, S. (1991). La teoría consensual de la verdad de Jürgen Habermas. *Anuario filosófico, (24),* pp. 115-123. Disponible en internet http://dspace.unav.es/dspace/bitstream/10171/2322/1/02.%20Sergio%20Belardinelli.%20La%20Teor%C3%ADa%20Consensual%20de%20La%20Verdad%20de%20J%C3%BCrgen%20Habermas.pdf [Visitado el 8 de noviembre de 2010]

Bisquerra, R. (2004). *Metodología de la investigación educativa*. Madrid, España: La Muralla.

Bogdan, R. y Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto editora.

Brousseau, G. (1989). Utilidad e intereses de la didáctica para un profesor. *Suma*, 4, 5-12.

Brown, T., McNamara, O., Jones, L. y Hanley, U. (1999). Primary student teachers' understanding of mathematics and its teaching. *British Education Research Journal*, 25(3), 299-322.

Calderhead, J. (1988). Conceptualización e investigación del conocimiento profesional de los profesores. En Villar, L.M. *Conocimiento, creencias y teorías de los profesores.* Alcoy: Marfil.

Cantoral, R. (1989). Un problema de la Educación Matemática: La Formación de Profesores. *Café y Matemáticas.* Revista del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias – UNAM. Núm. 5, 20 – 33. México.

Carrillo, J. (1996). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la Matemática y su enseñanza de profesores de Matemáticas de alumnos de más de 14 años. Algunas aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones*. Tesis Doctoral, Universidad de Sevilla.

Carrillo, J. (1998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones.* Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo, J. (1999). *Comentarios e ideas sobre la naturaleza del conocimiento profesional*. Documento de trabajo del grupo DESYM. (Sin publicar).

Carrillo, J. (2000). Comentario a la contribución del Prof. Joao F.L. Matos. En Ponte, J.P. y Serrazina, L. (Organizadores) *Educaçao Matemática em Portugal, Espanha e Itália. Actas da Escola de Verao-1999*. Secçao de Educaçao e Matemática- Sociedade portuguesa de Ciências da Educaçao.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. y Muñoz, MªC. (2007). Un modelo cognitivo para interpretar el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas. Ejemplificación en un entorno colaborativo. *Enseñanza de las Ciencias*, 25(1), 33-44.

Cestari, M.L., Bjuland, R. y Borgersen, H.E. (2007). Identity in education. The constitution of mathematics teacher identity from a socio cultural perspective. In *The Forth Nordic Conference on Cultural and Activity Research (ISCAR)* (pp. 16-17). Oslo: University of Oslo, Intermedia.

Clandinin, D.J. (1986). *Classroom practice: teacher images in action*. Philadelphia: Falmer Press.

Clandinin, D.J. y Connelly, F.M. (1988). Conocimiento práctico personal de los profesores: imagen y unidad narrativa. En Villar, L.M. (Ed.) *Conocimiento, creencias y teorías de los profesores*. Alcoy: Marfil.

Climent, N. (2005). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso.* Tesis doctoral publicada en www.proquest.co.uk

Climent, N. y Carrillo, J. (2002). Developing and researching profesional knowledge with primary teachers. En J. Novotná (ed.) *European Research in Mathematics Education II, Proceedings of the CERME 2*, (pp. 269-280). Praga: Charles University.

Climent, N. y Carrillo, J. (2003). El dominio compartido de la investigación y el desarrollo profesional. Una experiencia en Matemáticas con maestras. *Enseñanza de las Ciencias*, 21(3), 387-404.

Climent, N. y Carrillo, J. (2007). El uso del vídeo para el análisis de la práctica en entornos colaborativos. *Investigación en la Escuela*, 61, 23-35.

Cockcroft, W. H. (dir.) (1985). Las matemáticas sí cuentan. *Informe Cockcroft*, Madrid. MEC.

Cohen L. y Manion L. (2002). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla. (Traducción de Francisco Agudo López de la obra original de Cohen L. y Manion L. (1989). *Research Methods in Education*, 3rd. Ed., Routledge).

Compagnucci, E. y Cardós, P. (2007). El desarrollo del conocimiento profesional del profesor en psicología. *Orientación y sociedad [online]*, *7*, pp. 103-114. Disponible en: <http://www.scielo.org.ar/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1851-88932007000100005&lng=es&nrm=iso>. ISSN 1851-8893. [Visitado el 22 de octubre de 2010].

Contreras, L.C. (1998). *Resolución de problemas: Un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores acerca de su papel en el aula.* Tesis doctoral, Universidad de Huelva.

Contreras, L.C. (1999). *Concepciones de los profesores sobre la resolución de problemas.* Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Corbalán, F. (2000). El currículum en la ESO. En Goñi et al, Graó. *El currículum de matemáticas en los inicios del siglo XXI*, Barcelona, España: Graó, pp.67-82.

Corbin, J. y Strauss, A.L. (2008). *Basics of qualitative research (3rd edition).* Thousand Oaks: Sage Publications. Vol. I.

Correia, S.I. (2009). *O conhecimento matemático para o ensino e a gestão de participação de duas professoras de educação primária.* Trabajo de fin de máster no publicado. Universidad de Huelva.

Dalmiya, V. y Alcoff, L. (1993). “Are old wives’ tales justified?” In L. Alcoff and E. Potter (eds). *Feminist Epistemologies*. London: Routledge.

Davis B. (2008). Is 1 a prime number? Developing teacher knowledge through concept study. *Mathematics Teaching In The Middle School*, 14(2), pp. 86-91.

Davis B. (2010). “Concept studies: Designing settings for teachers´disciplinary knowledge”. In Pinto, M. M. F. & Kawasaki, T. F. (Eds). *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, pp. 63-78. Belo Horizonte, Brazil: PME.

Davis B. y Simmt E. (2003). Understanding learning systems: mathematics education and complexity science. *Journal For Research In Mathematics Education*, 34(2), 137-167.

Davis B. y Simmt E. (2006). Mathematics-for-teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 61(3), 293-319.

De Miguel, M. (1988). Paradigmas de la investigación educativa española. En I. Dendaluce, *Aspectos metodológicos de la investigación educativa.* Madrid: Narcea.

Del Rincón, D., Latorre, A., Arnal J., y Sans, A. (1995). *Técnicas de investigación en ciencias sociales*. Madrid: Dykinson.

Denny, T. (1978). Storyteling and educational understanding, address delibered at nacional meeting of International Reading Association. Houston, Texas.

Denzin, N.K. (1970). *The research act.* Chicago: Aldine Publishing.

Denzin, N.K. y Lincoln, Y.S. (1994). Introduction: entering the Field of Qualitative Research. En N. K. Denzin e Y. S. Lincoln (Eds.). *Handbook of Qualitative Research*. Londres: Sage (pp. 1-18).

Denzin, N.K. y Lincoln, Y.S. (1998). *The landscape of qualitative research: Theories and issues*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Denzin, N.K. y Lincoln, Y.S. (2003). *Strategies of qualitative inquiry*. En N.K. Denzin e Y.S. Lincoln (Eds.). Londres: Sage.

Donnelly, J.F. (2001). School science teaching as a profession: Past, present, and future. *School Science Review, 82* (300), 31-39.

Elbaz, F. (1983). *Teacher thinking: A study of practical knowledge*. Londres: Croom Helm.

Erickson, F. (1986). “Qualitative methods in research of teaching”. En M. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching*, pp. 119-161. Nueva York, Macmillan.

Erlandson, D.A., Harris, E.L., Skipper, B. y Allen, S.D. (1993). *Doing Naturalistic Inquiry: A Guide to Methods.* Newbury Park, CA: Sage Publications.

Even, R. y Markovits Z. (1991). Teachers’ pedagogical knowledge: The case of functions. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th PME International Conference*, *2*, 40-47.

Evertson, C.M. y Green, J.L. (1989). La observación como indagación y método. En C. M. Wittrock (Ed.), *La investigación de la enseñanza, II: Métodos cualitativos y de observación*, (pp. 303-406). Barcelona: Paidós/MEC.

Farfán, R. y Cantoral, R. (2003). Mathematics Education: A Vision of its Evolution. *Educational Studies in Mathematics, 53(3),* 255-270.

Farfán, R. y Sosa L. (2005). Formación de profesores. Diversas concepciones que afectan el quehacer docente. *Resúmenes de la IX Escuela de Invierno y Seminario Nacional de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, UNACH, México, p.89

Farfán, R. y Sosa, L. (2006) Formación de profesores. Diversas concepciones que afectan el quehacer docente y competencias iniciales de profesores del nivel medio superior. En Pérez O. et al. (Eds.). *Resúmenes de la Vigésima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*, p. 47-48. Camaguey, Cuba – Comité Latinoamericano de Matemática Educativa AC.

Farfán, R. y Sosa L. (2007). Formación de profesores. Diversas concepciones que afectan el quehacer docente y competencias iniciales de profesores de nivel medio suprior. En Crespo et al. (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 20 (1),* pp. 347-352.

Fennema, E. y Franke, M.L. (1992). Teachers’ knowledge and Its Impact. En Grouws, D.A. (Eds.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* 147-164. Reston, Virginia: NCTM .

Fernandez, C., y Yoshida, M. (2004). *Lesson study: A Japanese approach to improving mathematics teaching and learning.* Mahwah, NJ: Erlbaum.

Fernández, S. y Figueras, L. (2010). El conocimiento del profesorado necesario para una educación matemática continua. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemáticas XIV* (pp. 291-301). Lleida: SEIEM.

Flores, P. (1998). Formación inicial de profesores de matemáticas como profesionales reflexivos. *UNO 17*, 37-48.

Franke, M. L., Carpenter, T.P., Levi, L. y Fennema, E. (2000). Capturing teachers' generative growth: A follow-up study of profesional development in mathematics. *American Educational Research Journal, 38*, 653-689.

Franke, M. L., Kazemi E. y Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Frank K. Lester, Jr. (Ed.), Vol. 1, pp. 225-256.

García Jiménez, E. (1991). *Una teoría práctica sobre la evaluación. Estudio etnográfico*. Sevilla: MIDO.

García, M. (1997). *Conocimiento profesional del profesor de matemáticas. El concepto de función como objeto de enseñanza-aprendizaje.* Sevilla: GIEM-US.

Glaser, B.G. y Strauss, A.L. (1967). *The discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research*. New York: Aldine de Gruyter.

Godino, J.D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*. Núm. 20, pp. 13-31.

Godino J.D., Rivas, M., Castro, W.F. y Konic, P. (2008). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. *Actas de las VI Jornadas de Educación Matemática Región de Murcia*. Centro de Profesores y Recursos. Murcia.

Goulding, M., Rowland T. y Barber, P. (2002). Does it matter? Primary teacher trainees' subject knowledge in mathematics. *British Educational Research Journal*, 28 (5), 689-704

Greeno, J.G. (1997). On Claims That Answer the Wrong Questions *Educational Researcher*, 26(1), 5-17.

Habermas, J. (1973). Wahrheitstheorien. In H. Fahrenbach (Hrsg), *Wirklichkeit und Reflexion. Walter Schulz Zum 60.* Gebustag, Pfullingern, pp. 211-265.

Hammersley, M. y Atkinson, P. (1995). *Ethnography*. London: Routledge. Vol. I.

Hill, H., Rowan, B. y Ball, D.L. (2005). Effects of teachers' mathematics knowledge for teaching on student achievement. *American Education Research Journal, 42*(2), 371-406.

Hill, H.C.; Blunk, M.; Charalambous, C.; Lewis, J.; Phelps, G.; Sleep, L. y Ball, D.L. (2008a). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction, 26(4)*, 430-511.

Hill, H.C., Ball, D.L. y Schilling, S.G. (2008b). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.

Jaworski, B. (2004). Grappling with complexity: co-learning in inquiry communities in mathematics teaching development. En M.J. Høines & A.B. Fuglestad (eds.) *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, I, 17-36. Bergen, Noruega.

Kagan, D.M. (1990). Ways of evaluating teacher cognition: Inferences concerning the Goldilocks Principle. *Review of Educational Research*, 60 (3), 419-469.

Klein, R. y Tirosh, D. (1997). Teachers’ pedagogical content knowledge of multiplication and division of rational numbers. In H. Pekhonen (Ed.), *Proceedings of the 21st PME International Conference*, *3*, 144-152.

Latorre, A., Del Rincón, D., y Arnal, J. (1996). *Bases metodológicas de la investigación educativa.* Barcelona: Hurtado ediciones.

Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Situated Learning-Legitimate Peripheral Participation.* Cambridge: Cambridge University Press.

Leinhardt, G. y Smith, D.A. (1985) Expertise in mathematics instruction: Subject matter knowledge *Journal of Educational Psychology*, 3, 247-271.

Leinhardt, G. y Greeno, J.C. (1986). The cognitive skill of teaching *Journal of Educational Psychology*, 2, 75-95.

Leinhardt, G.; Putnam, R.T.; Stein, M.K. y Baxter, J. (1991). Where subject knowledge matters. En Brophy, J. (Ed.) *Advances in Research on Teaching*, vol.2. Greenwich: Jai Press Inc.

Leinhardt, G., Putnam, R., y Hattrup, R.A. (1992). *Analysis of arithmetic for mathematics teaching*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Lezama, J. y Mariscal, E. (2008). "Docencia en matemáticas: Hacia un modelo del profesor desde la perspectiva de la socioepistemología" en P. Lestón (ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, México: CLAME, vol. 21, pp. 889 – 900.

Lincoln , Y.S. y Guba, E.G. (1985). *Naturalistic Inquiry*. Beverly Hills, Ca: Sage.

Llinares, S. (1994). El profesor de matemáticas. Conocimiento base para la enseñanza y desarrollo profesional. En Santaló, L. et al. *La enseñanza de las matemáticas en la educación intermedia*. Madrid: Rialp.

Lofland, J. y Lofland, L.H. (1984). *Analyzing social settings*. Belmont, CA: Wadsworth Publishing Company, Inc.

Longino, H. (1990). *Science as social knowledge: values and objectivity in scientific inquiri*. Princeton, NY: Princeton University Press.

Lucero M.M. y Chiarani M.C. (2004). La formación del profesorado y los ambientes de aprendizaje virtuales. *Primer congreso virtual latinoamericano de educación a distancia*. Disponible en http://www.ateneonline.net/datos/52_03_Lucero_Chiaran.pdf [Visitado el 24 de octubre de 2010].

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Matos, J.F. (2000). *Aprendizagem e prática social: contributos para a construçao de ferramentas de análise da aprendizagem matemática escolar*. En Ponte, J.P. y Serrazina, L. (Organizadores) *Educaçao Matemática em Portugal, Espanha e Itália. Actas da Escola de Verao-1999*. Secçao de Educaçao e Matemática-Sociedade portuguesa de Ciências da Educaçao.

Merriam, S.B. (1988). *Case Study Research in Education: A qualitative approach.* San Francisco, CA: Jossey-Bass Publishers.

Miles, M.B. y Huberman, A.M. (1994). *Qualitative data analysis: an expanded sourcebook.* Newbury Park, Ca: Sage.

Mingüer, L. (2006). *Entorno sociocultural y cultura matemática en profesores del nivel superior de educación. Estudio de casos en el instituto Tecnológico de Oaxaca. Una aproximación socioepistemológica.* Tesis de doctorado no publicada. Cicata. México.

Monteiro, R. (2006). *La enseñanza de las ciencias naturales desde el análisis cognitivo de la acción.* Unpublished Tesis Doctoral, Universidad de Huelva, Huelva.

Monteiro, R., Carrillo, J. y Aguaded, S. (2008). Emergent theorizations in Modelling the Teaching of Two Science Teachers. *Research in Science Education, 38*(3), 301-319.

Muñoz-Catalán, M.C. (2009). *El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel*. Tesis doctoral. Universidad de Huelva.

Muñoz-Catalán, M.C., Carrillo, J. y Climent, N. (2010). Mathematics teacher change in a collaborative environment: to what extent and how. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13(5), 425-439.

Neiman, G. y Quaranta G. (2006). "Los estudios de caso en la investigación sociológica". En: de Gialdino, Vasilachis (comp.), *Estrategias de investigación cualitativa*. Buenos Aires, Gedisa.

Park, S. y Oliver, J.S. (2008). Revisiting the conceptualization of pedagogical content knowledge (PCK): PCK as a conceptual tool to understand teachers as professionals. *Research in Sciences Education*, *38*, 261-284.

Patton, M.Q. (1980). *Qualitative evaluation methods*. Beverly Hills, CA: Sage.

Pérez Juste, R. (1985). Diseño experimental. En A. De la Orden (Dir.). *Investigación Educativa*. Madrid. Anaya.

Philipp, R.A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. En F. K. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 257-315). Charlote, NC: National Council of Teachers of Mathematics.

Ponte, J.P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. En Ponte, J.P. y Matos, F. (Eds.) *Proceedings of the XVIII PME.* Lisboa: Portugal.

Ponte, J.P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, 25, 105-132.

Ponte, J.P. (2010). From teachers' craft knowledge to teacher education: Research and practice. *Conferencia presentada en Fifth Yerme Summer School (YESS-5)*, Palermo, Italia.

Ponte, J.P. y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practice. In A. Gutierrez y P. Boero (Eds.). *Handbook of Research of the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*. (pp. 461-494). Rotterdam: Sense Publishing.

Ponte, J.P., y Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 225-263). New York, NY: Routledge.

Porlán, R. y Rivero, A. (1998). *El conocimiento de los profesores.* Sevilla: Díada.

Prediger, S. (2010). How to develop mathematics-for-teaching and for understanding: the case of meanings of the equal sign. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13, 73-93.

Ribeiro, C.M. (2008). From modeling the teacher practice to the establishment of relations between the teacher actions and cognitions. In M. Joubert (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics November 2008*, 28(3), (pp. 102-107) Londres**:** British Society for Research into Learning Mathematics.

Ritchie, J. y Lewis, J. (2005). *Qualitative Research Paractice: a guide of Social Science Students and Researchers*. Thousand Oaks: Sage Publications. Vol. I.

Rochelle, J. (2000). Choosing and using video equipment for data collection. In A. Kelly & R. Lech (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education*. Londres: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Rodríguez G, Gil J. y García E. (1996). *Metodología de la investigación cualitativa*. Ed. Aljibe, S. L., Málaga, España.

Romberg, T. (1988) Can Teachers be professionals?. En Grouws, A.D. y Cooney, T. (Eds.) *Effective mathematics teaching.* LEA-NCTM, Reston, VA. (224-244).

Rossouw, L. y Smith, E. (1998). Teachers' pedagogical content knowledge of geometry. In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of 22nd PME International Conference, 4,* 57-63.

Rowland, T. (2008). Researching teachers' mathematics disciplinary knowledge. *The International Handbook of Mathematics Teacher Education*. Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development. P. Sullivan and T. Wood (Eds), (1), 273-298.

Rowland, T., Huckstep P. y Thwaites A. (2005). Elemenatry teachers´ mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education* (8), 255-281.

Rowland, T y Turner F. (2007). Developing and using the 'Knowledge Quartet': A framework for the observation of mathematics teaching. *The Mathematics Educator*. Vol. 10, No. 1. 107-124.

Rowland, T., Turner F., Thwaites, A. y Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching*. SAGE publications, London, UK.

Rusell, T. (1994). Teachers' Professional Knowledge and the Future of Teacher Education *International Analysis of Teacher Education*, 19 (4 y 5).

Santos, L. (2002). A investigação e os seus implícitos: contributos para uma discussão. *Actas del VI Simposio de la SEIEM: Logroño*, pp. 157-170.

Servais, W. (1980). Humanizar la enseñanza de las matemáticas. *Revista de Bachillerato*. Cuaderno monográfico, n.5.

Schoenfeld, A.H. (1998a). On modeling teaching. *Issues in Education*, *4*(1), 149 - 162.

Schoenfeld, A.H. (1998b). Toward a theory of teaching-in-context. *Issues in Education*, *4*(1), 1-94.

Schoenfeld, A.H. (2000). Models of the teaching process. *Journal of Mathematical Behaviour*, *18*(3), 243 - 261.

Schön, D.A. (1983). *The Reflective Practitioner: how professionals think in action*. New York: Basic Books.

Schön, D.A. (1987). *Educating the reflective practicioner*. S. Francisco: Jossey-Bass Publishers. [Versión en castellano: Schön, D.A. (1992). *La formación de profesionales reflexivos. Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje de las profesiones*. Barcelona: M.E.C.-Paidós].

Schön, D.A. (1992). *La formación de profesionales reflexivos. Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones*. Madrid, Paidós-MEC.

Schwab, J.J. (1978). *Science, curriculum and liberal education*. Chicago: Univesity of Chicago Press.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association*, 15(2), 4-14.

Shulman, L.S. (1987). *Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

Silverman, J. y Thompson, P.W. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11, 499-511.

Sosa L. (2006). *Tipos de concepciones sobre la naturaleza de las matemáticas, de su enseñanza y de su aprendizaje. Un estudio con profesores en servicio.* Tesis de maestría no publicada. Cinvestav, México.

Sosa L. y Carrillo J. (2010). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) de matrices en bachillerato. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds), Investigación en Educación Matemática XIV (pp. 569-580). Lleida: SEIEM.

Sowder, J.T. (2007). The mathematical education and development of teachers. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Frank K. Lester, Jr. (Ed.), Vol. 1, pp. 157-223.

Stake, R. E. (1994). Case Studies. En N. K. Denzin e Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research*. Thousands Oaks, CA: Sage Publications (pp. 236-247).

Stake, R. E. (2000). Case Studies. En Denzin, N. K. y Lincoln, Y. (Eds.), *Handbook of qualitative research* (435-454). Thousand Oaks: Sage Publications.

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos.* Ediciones Morata, S. L. Madrid, España. (Traducción de Roc Filella de la obra original de Stake, R. E. (1995). The Art of Case Study Research. Thousand Oaks, CA: Sage Publications).

Tamir P. (1991). Professional and personal knowledge of teachers and teachers educators. *Teacher and Teaching Education, 7* (3), 263-268.

Thames, M. H. (2009). *Coordinating mathematical and pedagogical perspectives in practice-based and discipline-grounded approaches to studying mathematical knowledge for teaching (K-8).* Unpublished dissertation. University of Michigan, Ann Arbor.

Wilson, S., Shulman, L. y Richert, A. (1987). 150 different ways of knowing: Representations of knowledge in teaching. In J. Calderhead (Ed.), *Exploring teachers thinking* (pp. 104 - 124). Londres: Cassel.

Yin, R. (1984). *Case study research. Design and methods.* Newbury Park, CA: Sage.

Yinger, R. (1986). Investigación sobre el conocimiento y el pensamiento de los profesores. Hacia una concepción de la actividad profesional. *Actas del I Congreso Internacional sobre Pensamiento del Profesor*. Sevilla.

Zamudio Franco, J. (2003). El conocimiento profesional del profesor de Ciencias Sociales. *Revista de Teoría y Didáctica de las Ciencias Sociales*, *8*, 87-104.