HISTORIA DE

LAS CIENCIAS Y ENSEÑANZA

LA CONSTRUCCION HISTORICA DEL CONCEPTO DE FUERZA CENTRIPETA EN RELACION CON LAS DIFICULTADES DE SU APRENDIZAJE

CASADELLÀ REIG, J y BIBILONI MATOS, L.
E.U. de Formación de Maestros «Sant Cugat del Vallès» y
Seminario de Historia de las Ciencias. Universidad Autónoma de Barcelona.

SUMMARY

The conceptual errors which appear in the process of learning, keep some parallellism with the historical process of the building of science. As it might be helpful from a didactic point of view, we try to go through the main historical periods which led to the consolidation of the concept of centripetal force, also emphasizing the context in which it developed.

1. INTRODUCCION

Nadie tiene dificultad en admitir que es posible hacer girar por encima de nuestras cabezas un cubo con agua sin que ésta se vierta. Pero a la hora de interpretar tales hechos a la luz de alguna teoría surgirán, probablemente, diferencias de opinión. Una interpretación muy corriente afirmaría que el agua al verse obligada a describir una trayectoria curvada estaría sujeta a una «fuerza centrífuga», que tendería a apartarla del centro de curvatura, una de cuyas componentes podría contrarrestar convenientemente los efectos del peso. Sin embargo esta opinión no está de acuerdo con la mecánica newtoniana.

De hecho el concepto de «fuerza centrípeta» es de los que peor se aprenden en los estudios de Física a niveles elementales (EGB, BUP, e incluso primeros cursos de la Universidad), quedando en estado de confusión permanente, en la mayoría de los casos, al no haber ocasión de profundizar en cuestiones de Física a otros niveles. Tal vez también sea de los conceptos que peor se enseñan. Después de analizar diferentes libros de texto de EGB y BUP, se puede tener la impresión de que todos ellos reproducen un mismo esquema, que parte del estudio del movimiento, abstracción hecha de sus causas y perturbaciones, las cuales se discutirán aparte posteriormente. Una vez se ha puesto de relieve el carácter vectorial de las fuerzas, así como del movimiento, se está en condiciones de sorprender a los estudiantes con una extravagancia de la naturaleza: el movimiento circular uniforme es acelerado. La celeridad con que se mueve el móvil es constante y sin embargo se acelera. Ello es debido, se explica, al cambio permanente de dirección del movimiento, un efecto que solo puede entenderse gracias al carácter vectorial de la velocidad. Rara vez se relaciona en los libros de texto este tipo de movimiento con el Sistema Solar y la Gravitación Universal. En los ejercicios de aplicación, los estudiantes pueden esconder sus confusiones en relación con la fuerza cetrípeta, causa de la aceleración centrípeta, detrás de desarrollos algebraicos que conducen a resultados formalmente correctos, o de falsedad no contrastable.

Contrariamente a la importancia pedagógica que se le confiere, el concepto de «fuerza (y aceleración) centrípeta» ha jugado históricamente un papel crucial en el establecimiento de lo que se ha venido a llamar Mecánica Clásica. Newton se apoyó en él para diseñar una estrategia encaminada a descubrir la ley de variación, con la distancia al sol, de la fuerza (central) que retenía a los planetas en sus órbitas. Pero antes la humanidad hubo de vencer grandes dificultades intelectuales. Ello da una idea de su dificultad intrínseca. Siguiendo un paralelismo entre el proceso de aprendizaje y el proceso histórico de construcción de las Teorías científicas (Piaget 1970) las etapas recorridas hasta la adquisición de una formulación fértil del concepto de fuerza, suministran un esquema de los posibles obstáculos o errores conceptuales que hay que superar, usando la terminología de Bachelard (1938), para que se produzca una verdadera asimilación del mismo.

2. DEL MOVIMIENTO CIRCULAR DE LAS ESTRELLAS A LA LEY DE INERCIA

Para los filósofos griegos el movimiento circular era el más natural y perfecto de los posibles. En una primera interpretación de los movimientos celestes, las estrellas estaban contenidas en una esfera móvil en cuyo centro se encontraba la Tierra, esférica a su vez. Puesto que en este modelo (Kunh 1978), la esfera de las estrellas daba una vuelta en torno a un eje polar cada 23 h 56 m, cada estrella, en este mismo tiempo, debía describir una circunferencia. El sentido de giro de la supuesta esfera debía ser dextrogiro (el de las agujas del reloj) contemplada la esfera desde el polo norte de la misma. Tal idea es compatible con la observación de que la mayoría de las estrellas, incluso el sol, la luna y los planetas salen por el Este describiendo un arco de circunferencia por encima del horizonte hacia el Oeste. Sin embargo el sol, la luna y los planetas no aparecen sobre las mismas constelaciones estelares durante todo el año sino que varían su posición respecto de las constelaciones siguiendo ciclos regulares. Razón por la cual no podían estar contenidos en la misma esfera que las estrellas. Cada uno giraba a su vez, con velocidades diferentes. Durante la civilización griega se postularon distintos modelos astronómicos de entre los cuales destacan los debidos a Aristaco, Aristoteles y Ptolomeo. Aristóteles (s. IV a. de C.), según Farrington (1969), postuló 55 esferas, para explicar los movimientos de la luna, el sol y los planetas. Aristaco de Samos (s. III a. de C.) postuló un sistema precursor del de Copérnico, heliocéntrico y con la Tierra en rotación sobre su eje además del de traslación circular alrededor del Sol. Por último Claudio Ptolomeo confeccionó un modelo geocéntrico con los planetas moviéndose en epiciclos (Holton-Brush 1976).

Lo que interesa destacar aquí, es que ningún filósofo griego puso jamás en duda que los movimientos astronómicos, fuesen o circulares, o combinaciones de movimientos circulares.

Dejando a un lado los movimientos epicíclicos de la astronomía ptolemaica, Copérnico (1543) restauró las esferas que contenían a los planetas esta vez con centro en el Sol. Otra innovación copernicana importante consiste en establecer una jerarquía de velocidades de las esferas en orden decreciente a medida que aumentaban de diámetro. Así pues la que contenía las estrellas permanecía en reposo contrariamente a la opinión de Aristóteles que consideraba en ella el principio del movimiento. Para Copérnico el «centro» del movimiento radicaba en el Sol. Esta idea fue desarrollada propiamente por Kepler, quien supuso que el Sol enviaba al espacio una especie de principios motrices, que al ser absorbidos por los planetas los impulsaba de manera que su velocidad era proporcional a la cantidad absorbida. No cuesta comprobar que la cantidad de principios motrices que se pueden encontrar en una región del espacio debe ser proporcional al inverso del cuadro de la distancia. Este resultado da una idea de la fuerza y persistencia histórica de las conjeturas de Kepler, más allá de su veracidad y vigencia. Según Koyré (1950), además, Kepler suponía, erróneamente, que los planetas se movían con una velocidad inversamente proporcional a la distancia al Sol. Así que supuso al Sol un mecanismo de ahorro, que hacía que éste sólo radiara movimiento en el plano de la Eclíptica, donde se encontraban los planetas, y no al espacio vacío donde se desperdiciaría inútilmente.

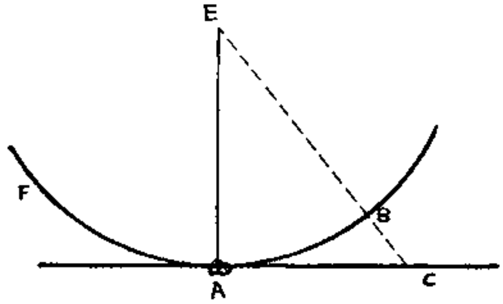
Kepler concebía a los cuerpos, incluidos los planetas, como dotados de la propiedad de resistir a moverse. A esta propiedad la llamó inercia (Koyré, A. 1950), y el Sol debía impulsarlos continuamente para que pudieran vencer dicha resistencia.

Un cambio radical del planteamiento lo introdujo Galileo Galilei (Galileo Galilei, 1638). Después de estudiar el movimiento de los cuerpos en planos de diversa inclinación llega a la siguiente conclusión (*Discorsi*, escolio del problema IX, proposición XXIII): «Ademas, se puede suponer con razón que, sea el que fuere el grado de velocidad que se dé a un móvil, queda por naturaleza indeleblemente impreso en él con tal de que no intervengan causas externas que lo aceleren o retarden; tal estado constante solo ocurre en el plano horizontal». Sin embargo Galileo no aclara lo que ocurre en aquellas situaciones en que el plano del horizonte se separa significativamente de la superficie esférica de la tierra, a la que es tangente.

3. DE LA FUERZA CENTRIFUGA A LA FUERZA CENTRIPETA

Para que un cuerpo abandone el estado de movimiento rectilíneo y uniforme necesita de una fuerza procedente del exterior. ¿Pero qué ocurre cuando un cuerpo gira en una órbita circular? Descartes opinaba que aparecía en él una tendencia a alejarse del centro, que debía compensarse para que el cuerpo girase equilibradamente en un círculo. Si, por ejemplo, se hace girar una piedra en una honda obligándola a describir un círculo FAB (fig. 1) de centro en E, su natural tendencia, una vez adquirida cierta velocidad en A, sería seguir en movimiento rectilíneo hasta C, siguiendo la tangente en el punto A. Puesto que la honda la obliga a girar hacia B, la piedra responde con una «tendencia» a apartarse de E según la dirección radial EBC. El interés de los científicos en clarificar el movimiento curvilíneo se debía, naturalmente, a la necesidad de comprender el movimiento planetario a partir de sus causas, según proponía Kepler. El punto de vista de Descartes y de Huygens era que la fuerza «centrífuga» (término acuñado por Huygens en su tratado *Horologium Oscillatorium*, publicado en 1673), originada por el movimiento curvilíneo de los planetas los alejaría a menos que el Sol los retuviera por alguna otra fuerza. Huygens (1673) calculó además que la fuerza centrífuga circular era proporcional al cuadro de la velocidad e inversamente proporcional al radio del círculo.

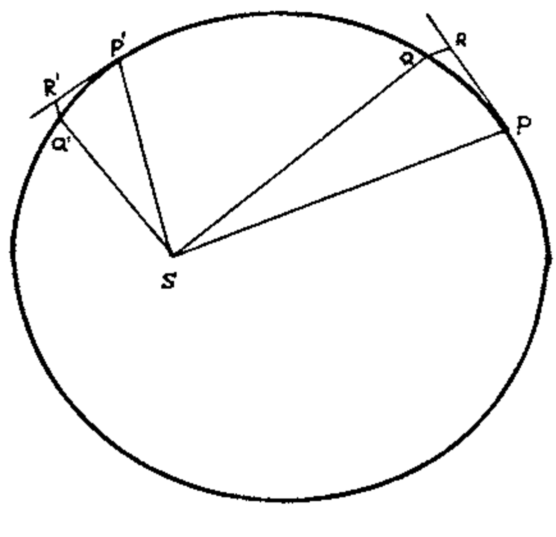
Fig. 1



De hecho, un planeta sujeto a un equilibrio tal de fuerzas, una centrífuga y otra hacia el centro, a la luz de la teoría Newtoniana, debería seguir una trayectoria rectilínea, si era correcta la ley de inercia de Descartes. Según afirma Cohen, (Cohen I.B., 1981) el primero que dio un paso adelante en el análisis del movimiento de los planetas fue Hooke, que generalizó el método de análisis utilizado por Galileo (Galileo 1638) en el caso de los proyectiles que, según demostró, describen trayectorias parabólicas. La esencia del método consiste en considerar que el movimiento observado en cada punto es la resultante según la ley del paralelógramo, de la composición de dos movimientos; uno a lo largo de la tangente a la trayectoria verificando la ley de inercia, y otro que tira de los planetas hacía el Sol apartándolos continuamente de la tangente. Hooke reveló este método de análisis a Newton entre 1679 y 1680 (Cohen 1981), (Newton llamó a esta fuerza «centrípeta» en honor a Huygens) al tiempo que le pedía que estudiara las propiedades de la curva descrita por un cuerpo sometido a un poder atractivo central que lo desviara de su movimiento inercial a lo largo de la tangente, cuando la intensidad de la fuerza variaba en proporción inversa al cuadrado de las distancias. Hooke tuvo que recurrir a Newton porque carecía de la capacidad y los conocimientos matemáticos que caracterizan a Newton.

Para ilustrar las dificultades supóngase una órbita elíptica. Por hipótesis, el Sol colocado en un foco de la elipse ejercería, sobre el planeta, una fuerza atractiva inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a que encuentra el planeta del Sol. (Fig. 2). Hooke suponía que en un punto cualquiera de la órbita, P por ejemplo, el planeta tiene una cierta velocidad que lo llevaría a R después de un cierto tiempo t. Sin embargo, transcurrido este tiempo el planeta se encuentra en Q.

Fig. 2



Es como si se hubiera desplazado de R a Q mediante un movimiento acelerado que se inició en P sin velocidad en la dirección RQ. Sin embargo la fuerza que tira del planeta hacia S es distinta en Q que en P, tanto en intensidad como en dirección, ya que P y Q se encuentran a diferente distancia de S y además las rectas SQ y Sp no son paralelas. Por si fuera poco, el segmento RQ tiene una dirección intermedia ente SP y SQ; esto es, no coincide con ninguna.

El problema es de una dificultad formidable cuando no se dispone del complejo aparato matemático para su adecuado tratamiento. No es de extrañar que Hooke se sintiera impotente para resolverlo dado que no disponía de las herramientas necesarias para su tratamiento. Newton, aunque hacía años que estaba en posesión de su *Cálculo de Fuxiones,* no lo utilizó para el tratamiento de este problema y dando una vez más muestra de su talla genial creó un nuevo método de análisis matemáticos que él consideró idóneo para el tratamiento de los problemas de la dinámica, y que utilizó casi de forma exclusiva en los Principia (Whiteside, 1970).

A título de ejemplo del estilo newtoniano de análisis en los *Principia,* se propone la siguiente discusión tomada del lema VII. Se trata de demostrar que dado el arco de curva ABC (Fig. 3) subtendido por su cuerda AB si en el punto A se traza la tangente AD por A, fijada una dirección arbitraria señalada por la recta BD cuando el punto B se hace tender al A, las longitudes de las cuerdas AB, los arcos ACB, y los segmentos de tangente AD tienden a la razón de igualdad. De forma más precisa escribiríamos que:

$$\lim_{B \to A} \frac{AB}{ACB} = \lim_{B \to A} \frac{AB}{AD} = 1$$

En el lenguaje newtoniano «... afirmo que las razones últimas del arco, la cuerda, y la tangente, cada una de ellas a cualquiera de las otras, es la razón de igualdad».

Para su demostración utiliza una técnica newtoniana básica en el cálculo de límites de magnitudes geométricas evanescentes, que consiste en construir figuras semejantes a las «infinitesimales» que se mantengan

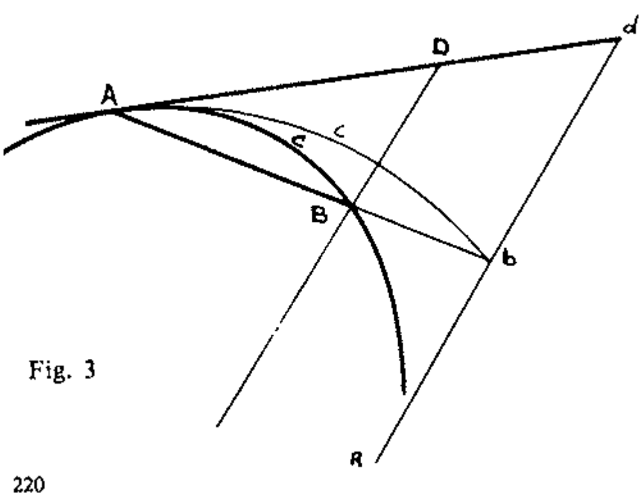


Fig. 3

siempre finitas. Procede de la siguiente forma: Prolónguese la recta AD hasta el punto remoto d-fijo y trácese la recta dR paralela a la dirección BD dada; a continuación para cada posición de B prolónguese AB hasta b y constrúyase el arco Acb homotético al ACB según la razón I(B) = AD: Ad = AB: Ab (igualdad que debe verificarse por la semejanza de los triángulos ABD y Abd). Se verificará por tanto: 1 (B) = AB:Ab = AD:Ad = ACB:Acb en consecuencia: AB:ACB = Ab:Acb ; AB:AD = Ab:Ad para cualquier posición de B se mantendrá la igualdad de las razones que no el valor de las mismas. Mientras el punto B se aproxima al A, el punto b se aproxima al d y el arco Acb queda aplastado entre las rectas Ad y Ab, intuitivamente, es fuertemente evidente que las longitudes Ad, Acb y Ab, tienden a coincidir y que en consecuencia la razón Ab: Acb y Ab:Ad tienden a la igualdad. AB:CB y AB:AD tienden también a la unidad.

Hoy en día esta demostración dista mucho de alcanzar los cánones de rigor exigidos por la ortodoxia establecida a lo largo de muchos siglos de titubeo y dificultades pero destila una vitalidad y convicción difíciles de encontrar en los libros de texto actuales.

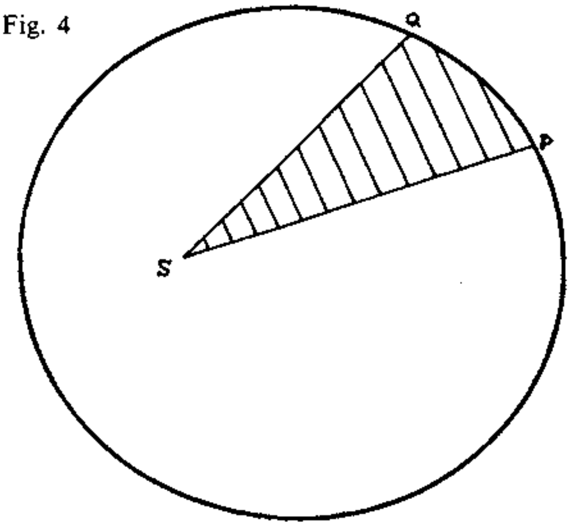
4. LAS FUERZAS CENTRIPETAS Y LA LEY DE LAS AREAS

Newton, en los *Principia,* utiliza el arcaico lenguaje de las proporciones. Esto le permite, una vez formulada su segunda ley al principio de los mismos, utilizar el concepto de fuerza y aceleración indistintamente, aunque acostumbra a utilizar el primero. Ambos son proporcionales y la constante de proporcionalidad es la masa o cantidad de materia, según la llamaba el propio Newton.

¿Cómo procedió Newton para hallar la aceleración centrípeta de los planetas? Lo primero redujo un problema en el que intervenía una magnitud física, tal como el tiempo, a un problema de geometría pura, mediante la llamada «ley de las áreas». Esta ley, establece que el área «barrida» por el segmento que une un planeta al Sol es directamente proporcional al tiempo invertido en el recorrido. Supongamos (Fig. 4) que en un determinado tiempo t recorre un arco de elipse PQ. El triángulo curvilíneo SPQ delimita un área que es proporcional a t. En el lenguaje de las proporciones, utilizar el tiempo es equivalente a utilizar el área «barrida» en el transcurso de este mismo tiempo.

Después de que Kepler enunciara esa ley de las áreas para los planetas, quedó casi en el olvido. No era fácil usarla, y no se apreciaba adecuadamente su valor antes de que Newton descubriera y revelara su poder. Era la piedra de toque que reducía los problemas dinámicos a problemas de geometría, puesto que la ley de las áreas es equivalente a la existencia misma de una fuerza centrípeta dirigida hacia un punto del espacio, respecto del cual se verifica la ley, incluso determinable si no fuera conocido. Cualquier fuerza centrípeta im-

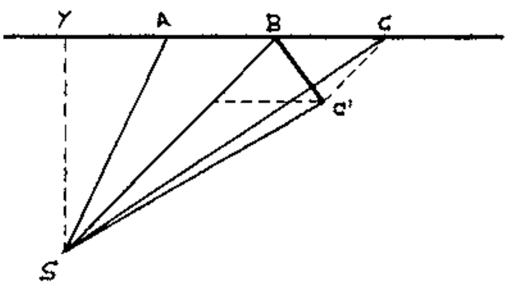
Fig. 4



plicaba inexorablemente la ley de las áreas y viceversa, tal como Newton demostró.

Siguiendo un razonamiento parecido al de Newton, en primer lugar considérese un cuerpo moviéndose sin que en él actúe fuerza alguna. Resulta que se cumple la «ley de las áreas» desde cualquier punto del espacio que se considere. Supongamos, (Fig. 5) que el cuerpo tarda el mismo tiempo en ir de A a B que en ir de B a C. Entonces los segmentos AB y BC serán iguales, por ser el movimiento uniforme. Los triángulos SAB y SBC tendrán áreas iguales sea cual sea el punto S que se considere. Así pues se verificará la citada ley de las áreas

Fig. 5



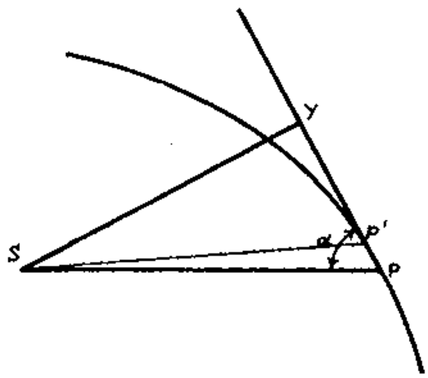
respecto del punto en cuestión. En segundo lugar, supongamos que en B el cuerpo es impulsado hacia S, adquiriendo una cierta cantidad de movimiento que instantáneamente lo desviaría de la dirección rectilínea obligándole a ir a C' en lugar de C siendo CC' un segmento paralelo a SB. Los triángulos SBC y SBC' tienen un lado común que se puede considerar como base de los triángulos con respecto a la cual los vértices C y C' están a idéntica distancia (altura). Por consiguiente tienen la misma área. Y de un modo parecido sucedería si el cuerpo fuera recibiendo impulsos instantáneos (y cantidades de movimiento) sea cual fuere su intensidad, al final de intervalos iguales de tiempo. En tercer lugar queda dejar que los tiempos que separan las posiciones A-B, B-c', etc. se vuelvan infinitesimales y hacer que en lugar de impulsos discretos aplicados en puntos separados, en dirección a un centro fijo, actúe una fuerza centrípeta continuamente en cada punto de la trayectoria. Newton demuestra a continuación Prop II - Teorema II, el teorema recíproco. «Si un cuerpo describe una órbita cualquiera que verifica la ley de las áreas respecto de un cierto punto S en el plano de la misma, su movimiento es debido a una fuerza centrípeta dirigida hacia dicho punto. Es importante señalar aquí que el carácter vectorial de las fuerzas y velocidades está claramente establecido y es esencial en toda la demostración.

Gracias a Kepler se sabía que los planetas describían órbitas elípticas en uno de cuyos focos estaba el Sol. A su vez los radios vectores que unían al Sol y a un planeta particular describían áreas proporcionales a los tiempos. Por consiguiente debía existir una fuerza dirigida permanentemente hacia el Sol, que los sostuviera en sus órbitas. Es frecuente en la actualidad enunciar la ley de las áreas de Kepler a partir de la llamada velocidad areolar, que se puede definir como el cociente entre el área barrida y el tiempo empleado en barrerla. En presencia de una fuerza centrípeta el área barrida con relación a ese centro es proporcional al tiempo. Esto es equivalente a afirmar que la velocidad areolar es constante (precisamente la de proporcionalidad). En tal caso, esto conlleva una ley de variación de la velocidad a lo largo de la trayectoria.

La velocidad de un cuerpo sometido a una fuerza centrípeta y que describe una trayectoria curva alrededor de este centro, es inversamente proporcional a la distancia existente entre el centro, hacia el que se dirigen las fuerzas, y la tangente a la trayectoria que pasa por el cuerpo en un momento dado.

Supongamos que el cuerpo está en P en un momento dado, a lo largo de una trayectoria curva. Transcurrido un intervalo de tiempo t muy pequeño el cuerpo estará en P'. El área implicada en este desplazamiento será la del triangulo curvilíneo SPP'. Tomando como base del mismo PP' —recuérdese que ya se demostró que en el límite el arco, la cuerda y la tangente tienen la razón de igualdad— y como altura el segmento de

Fig. 6



perpendicular a la tangente SY, la velocidad areolar, que debe ser una constante que llamaremos K, se expresará como.

$$K = \frac{1/2\ SY\ .\ PP'}{t} = \frac{1}{2}\ SY\ .\ \frac{PP'}{t}$$

El módulo de la velocidad v cuando se haga tender el tiempo a cero será pp': t. Llamando α al ángulo formado por la tangente a la órbita en P y el radio vector posición SP, obtenemos SY = SP. Sen α , resultando 2K = v. SP sen α , expresión equivalente a la anterior. Hoy en día esta expresión se conoce como la ley de conservación del momento angular en un campo central. En efecto, multiplicando la igualdad anterior por la masa de cuerpo se obtiene.

$$mv\ .\ SP\ \text{sen}\ \alpha = L$$

siendo L el módulo del vector momento angular que resulta ser el duplo de la masa por la velocidad areolar.

$$L = 2\ m\ k$$

5. DE LAS ORBITAS ELIPTICAS DE LOS PLANETAS A LA LEY DE GRAVITACION UNIVERSAL

Después de analizar la relación existente entre las fuerzas centrípetas y la ley de las áreas de Kepler y usando como herramientas básicas los teoremas que concretan esta relación juntamente con la intuición dinámica fundamental que se explicita en su segunda ley del movimiento, Newton desarrolló un método para calcular a partir de órbitas dadas que verifiquen la ley de las áreas respecto de un punto S, la ley de la fuerza centrípeta que las determina.

Abreviando se podría decir, que el método es una generalización de la ley de caída libre de Galileo Galilei. Utilizando la misma técnica que en el lema de las longitudes de la cuerda, el arco, y la tangente y los mismos standards de rigor, demuestra (Principia lemas IX y X) que en el momento de iniciarse el movimiento de un cuerpo en la dirección de la fuerza que lo impulsa, los desplazamientos que el cuerpo efectúa en esta dirección son proporcionales a la fuerza y al cuadrado del tiempo invertido en recorrerlos. Dejando de lado la fidelidad al texto original y utilizando el lenguaje actual podemos resumirlo diciendo que si el gráfico (Fig. 7) o las ordenadas representan velocidades y las abcisas tiempos, el área bajo la curva representará el desplazamiento en la dirección que actúa la fuerza, mientras que la pendiente de la recta tangente a la curva en el origen, representará la aceleración (proporcional a la fuerza ejercida) en el punto de la órbita considerado y en la dirección de actuación de la misma. Se trataría simplemente de demostrar que en el límite, cuando el tiempo tiende a 0, la razón del área curvilínea DAB al área rectilínea DAC es la unidad. Llamando x al desplazamiento (en rotación moderna x (t) = v(t) dt.).

Esta relación se expresaría escribiendo

$$\lim_{t \to 0} \frac{x}{\frac{1}{2}\, a_c t^2} = 1$$

(obsérvese que llamando a_c la aceleración, 1/2 de $a_c\ t^2$ será el área del triángulo rectilíneo DAC); puesto que a_c es finito y no interviene en el cálculo del límite podemos escribir

$$F_c \propto a_c = \lim_{t \to 0} \frac{2X}{t^2}$$

relación analítica equivalente al enunciado anterior.

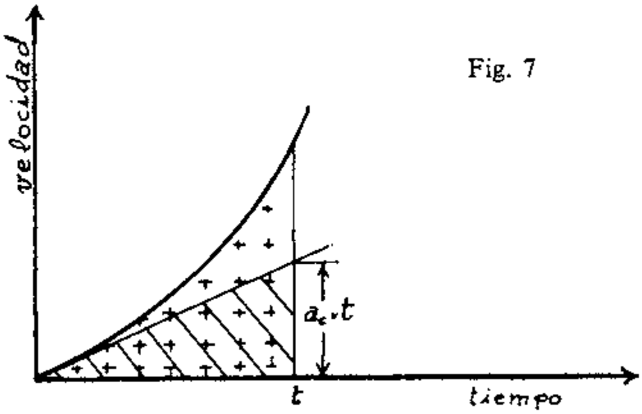
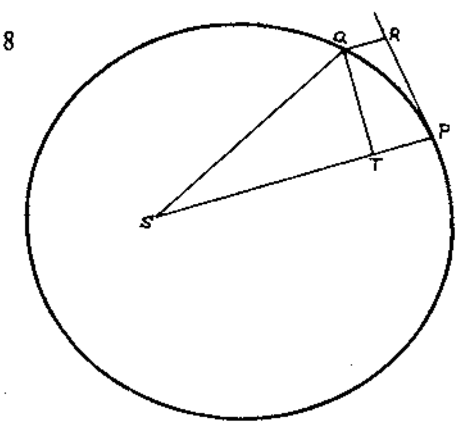


Fig. 7

Podemos pasar ahora al análisis en el caso bidimensional. Supongamos que un cuerpo está sometido a la acción de una fuerza central dirigida hacia el punto S (Fig. 8) que le obliga a describir la órbita curvilínea APQ, y que en el punto P la magnitud de esa fuerza es igual a F_c. El esquema básico de análisis Newtoniano, supone que si no actuara fuerza alguna, en un tiempo t, el cuerpo se desplazaría hasta R cumpliendo la ley de inercia, pero que, debido a la acción contínua de la fuerza dirigida hacia S, al cabo de este mismo tiempo se encuentra en Q. En estas condiciones QR representará el desplazamiento producido (caída desde la tangente) por acción de la fuerza en la dirección que actúa. Estamos en el inicio mismo del movimiento en esa dirección. Cuando los tiempos implicados son infinitesimales, el arco PQ se confunde con la cuerda que lo subtiende y con la tangente. Teniendo en cuenta el

Fig. 8


lema anteriormente citado, la ley de las áreas, y utilizando el lenguaje de los límites, más próximo a nuestra actual forma de hacer, podemos escribir.

$$\lim_{t \to o} \frac{\text{área SPQ}}{t} = \text{cte. y por lo tanto}$$

$$F_c \propto \lim_{t \to o} \frac{x}{t^2} \propto \lim_{Q \to P} \frac{RQ}{(SP \cdot QT)^2} = \frac{1}{SP^2} \lim_{Q \to P} \frac{RQ}{QT^2}$$

(obsérvese que 1/2 SP. QT = áreas SPQ, si se tiene en cuenta que los tiempos son infinitesimales).

El método básico Newtoniano para calcular la ley de la magnitud de la fuerza central que determina una órbita dada, consiste pues, en calcular para dicha órbita el límite: $\frac{RQ}{SP^2 x QT^2}$
cuando el punto Q se aproxima indefinidamente al punto P. Cómputo que en general dista mucho de ser elemental.

Hooke pidió a Newton que resolviera el problema inverso en un caso particular, es decir: conocida la ley de fuerza — inversamente proporcional al cuadrado de la distancia — computar la órbita. A partir de la tercera ley de Kepler era fácil deducir que la ley de fuerzas para el movimiento circular (elíptico) debía ser inversamente proporcional al cuadrado de las distancias. Newton utilizando las herramientas explicitadas anteriormente empieza demostrando que si la órbita es una de las secciones cónicas la ley debe ser cuadrático inversa si se verifica la ley de las áreas respecto de uno de sus focos. Para ello le basta demostrar que, para las tres secciones cónicas elipse (circunferencia), parábola e hipérbola, el límite RQ/QP^2 cuando el tiempo tiende a cero es constante para cualquier punto P de la cónica. Puesto que entonces la fuerza debería ser proporcional a $1/SP^2$ como se sigue de las anteriores fórmulas. En efecto, en los problemas VI, VII y VIII del libro I de los *Principia,* demuestra que para las cónicas

$$\lim_{Q \to P} \frac{RQ}{QT^2} = 2p$$

siendo 2p el lado recto principal.

Dando por sentado (sin demostración) que fijadas las condiciones iniciales de posición y velocidad (módulo y dirección) el movimiento queda determinado, afirma la validez del teorema recíproco explícitamente (existen entre algunos expertos fuertes controversias sobre la validez de las demostraciones que da Newton al respecto —ver Weinstock 1982—).

Aquí es precisamente donde empieza, y no donde termia, la impresionante aventura intelectual de los *Principia*. Al estudiarlos es fácil comprender la afirmación de Cohen de que «es difícil encontrar otro libro científico en toda la historia que entrañe un cambio tan complejo en el estado del conocimiento relativo a la física celeste y terrestre.

Es a partir de la contrastación que le permite el entramado matemático que construye, que Newton llega a la intuición fundamental de la Teoría de la Gravitación Universal (Cohen 1981).

La propiedad de atraer a los cuerpos astronómicos no es exclusiva del Sol. La tierra atrae a la Luna, Jupiter a sus satélites y además las mareas ponen de relieve que también la Luna atrae a las aguas oceánicas. El peso mismo de los cuerpos no es más que el resultado de la atracción que ejerce la Tierra sobre ellos. De todo ello Newton concluyó que la fuerza de atracción de los graves se extiende a todo el universo, y se ejerce a modo de interacción entre toda la materia.

CONCLUSIONES

1.— Los problemas que interesan a la historia de la física, se plantean y resuelven en un contexto complejo, formado por una acumulación de conocimientos empíricos, de conjeturas, de teorías, etc. interaccionando entre sí, con frecuencia contradictoriamente. El éxito en la evolución de la física suele venir coronado por la concurrencia de una formidable capacidad matemática, junto con la adopción de conceptos y principios físicos claros. Con frecuencia una teoría estructurada matemáticamente constituye una epopeya del pensamiento y de la civilización, comparable a una catedral gótica. Puede que sea un monumento con más o menos vigencia, pero en todo caso produce una sensación de grandeza, de belleza y de armonía grata a los sentidos. El sistema del mundo tal como queda descrito en los *Principia* de Newton es un prototipo singular de tales edificios intelectuales. Por consiguiente es digno y positivo que la enseñanza de la física preste gran atención a la mecánica, llamada actualmente, clásica.

2.— La mayoría de los libros de texto utilizados en la enseñanza de la física a niveles elementales (EGB, BUP, COU) adolecen de un mismo defecto fundamental con dos caras. Por un lado desaparece el contexto en el cual surgieron históricamente los conceptos y principios físicos, las etapas que se hubo de vencer. Este hecho se da de la mano con una presentación trivializada y esquemática de los mismos, que en nada contribuye a superar las dificultades psicológicas, ésto es, los preconceptos erróneos que invariablemente se presentan en el proceso de aprendizaje (Bacherlard 1938). Por otro lado la pérdida de la atención que se debe a los conceptos físicos, se compensa con un exagerado énfasis puesto en la mecánica de cálculo con que se presenta el desarrollo teórico de los temas. Se induce a pensar a los estudiantes que han comprendido, únicamente, si perciben la corrección formal del desarrollo matemático.

Esa deformación pedagógica trae consigo la pérdida de la imaginación creativa y de la capacidad crítica, al tiempo que fomenta la falsa opinión de que el proceso científico, o el proceso de investigación en física, se efectúa sólo a base de razonamientos matemáticos, asentados sobre la base de principios triviales e inamovibles.

3.— La aparición histórica del concepto de fuerza centrípeta fue un hecho de singular importancia, que se produjo involucrando la clarificación de diferentes aspectos del concepto de fuerza en general, tales como su carácter vectorial, los efectos dinámicos que una fuerza produce sobre un cuerpo en movimiento, así como la manera de componer y descomponer tales efectos. Aunque Newton no calificaba de vectores a las fuerzas, es evidente que tenía en cuenta el carácter direccional de su actuación. Para él una fuerza aplicada sobre un cuerpo le añadía movimiento continuamente en la dirección y sentido particulares en la línea de actuación de dicha fuerza. Este movimiento se debía componer con el propio del cuerpo (el que éste poseía y que mantenía de acuerdo con la ley de inercia). El movimiento resultante era la diagonal del paralelogramo formado a partir de ambos movimientos. Darse cuenta de ésto comporta un nivel de comprensión superior a la composición de fuerzas aplicadas sobre sistemas en equilibrio, o estáticos, mientras que añade un nuevo sentido a la ley de inercia. Llama la atención el hecho histórico de que Descartes, que tan correctamente había enunciado la ley de inercia, no veía claro que de ser existente en el movimiento circular una fuerza centrífuga en equilibrio con otra centrípeta, ambas aplicadas sobre un único cuerpo que está girando, éste debería seguir un movimiento rectilíneo y no circular.

4.— Con frecuencia en los libros de texto de física general se habla de las leyes de Kepler y luego, más tarde, del momento angular y de su conservación en campos de fuerzas centrales. Nunca se establece un nexo entre la conservación del momento angular y la ley de las áreas. Esto se debe a que, generalmente, las notas históricas se utilizan únicamente como complemento a la información cultural (cabe mencionar algunas excepciones como es el caso de Holton y Brush).

Recurrir a la historia puede ser un elemento vitalizador del aprendizaje si el alumno participa activamente en la dialéctica del desarrollo conceptual en situaciones de redescubrimiento dirigido. (Gil 1983).

5.— Por último cabe insistir en el aspecto interdisciplinar de la física y las matemáticas. En concreto la historia del las fuerzas centrípetas ofrece la posibilidad de trabajar el concepto de límite relacionado con aspecto básicos de la física. Las posibilidades que ofrece en este sentido la geometría del movimiento son dignas de consideración, puesto que posiblemente no se produzca una ruptura tan brusca con la intuición como en el caso, más abstracto, de las sucesiones de números.

La tendencia de los libros de física es la de utilizar las técnicas del cálculo (derivación e integración) tan pronto como sea posible, sin reparar en que fomentan el aprendizaje de los aspectos mecánicos del cálculo únicamente, esto es, a expensas de la comprensión del significado matemático de las operaciones que se efectúan.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

BACHELARD, G., 1938, *La formation de l'esprit scientifique*. (J. Vrin. Paris). Traducción española: La formación del espíritu científico. (Argos, Buenos Aires 1948. Siglo XXI 1972).

COHEN I.B., 1980, *La revolución newtoniana y la transformación de las ideas científicas*. (Cambrigde University Press 1980. Alianza Editorial 1983.

COHEN, I.B., 1981, El descubrimiento newtoniano de la Gravitación. *Investigación y Ciencia*. Mayo 1981.

COPERNICO NICOLAS, 1543, *De revolutionibus orbium coelestium*. (Johan Petreius Norimbergae). Traducción española: Sobre las revoluciones de los orbes celestes. Trad. a cargo de Carlos Minguez y Mercedes Testal (Editora Nacional 1982).

DESCARTES, 1644, *Principia philosofiae*. (Paul Tannery. Paris).

FARRINGTON BENJAMIN, 1971, *Science in Antiquity*. (Oxford University Press). Trad. española: Ciencia y filosofía en la antigüedad (Ariel 1971).

GALILEO, GALILEI, 1638, *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*. Ed. de C. Solis y J. Sadaba. Editora Nacional 1981).

GIL, Tres paradigmas básicos en la enseñanza de las ciencias. *Enseñanza de las ciencia*. Vol. I, nº 1, 1983 pp. 26-33.

HERIVEL, J., 1960, Newton Discovery of the Law of Centrifugal Force. (ISIS Vol. 51 pp. 546-553).

HOLTON G. y BRUSH, S., 1976, *Introducción a los conceptos y teorías de las ciencias físicas*. (Ed. Reverté).

JAMMER, M. 1957, *Concepts of force. A study in the fundation of Dinamycs*. (Harvard University Press. Cambridge, Massachussetts).

KUHN T.S., 1957, *The copernican revolution*. (President and Fellows of Harvard College). Trad. española: La revolución copernicana. (Ariel 1978-1981).

KUHN, T.S., 1962, *The Structure of Scientific Revolutions*. (University of Chicago Press). Trad. española: La estructura de las revoluciones científicas. (Fondo de cultura económica. México 1975).

KOYRÉ, A., 1950, La gravitatión universalle de Kepler a Newton, (Actas del VI Congres Internationale d'Histoire des Sciences. Amsterdam. 1950 Vol. I pp. 196).

NEWTON, I., 1687, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Trad. española: Principios matemáticos de filosofía natural. (Antonio Escohodato. E.N. 1982).

PIAGET, J., 1970, La epistemología genética, (A. Redondo).

WINSTOCK, R., 1982, Dismantling a centuries-old myth: Newton's Principia and inverse- square orbits. Am. J. Phys. 50 (7). Jul. 1982).

WHITESIDE D.T., 1970, The Mathematical Principles Underlyng Newton's Principia. *Journal for the History of Astronomy*. 1970. pp. 116-138.