

El desarrollo de competencias matemáticas a través de modelos de situaciones problemáticas

The development of the mathematical competencies through models of problematic situations

JOSÉ ANTONIO FERNÁNDEZ BRAVO

PROFESOR DEL CES DON BOSCO.

DIRECTOR DE LA CÁTEDRA CONCHITA SÁNCHEZ DE INVESTIGACIÓN

PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

JUAN JESÚS BARBARÁN SÁNCHEZ

PROFESOR DE ENSEÑANZA SECUNDARIA DE MATEMÁTICAS.

PROFESOR EN EL DEPARTAMENTO DE ÁLGEBRA DE LA UNIVERSIDAD DE GRANADA

Resumen

En este artículo se presentan *modelos* para la resolución de problemas matemáticos a través de la invención y reconstrucción de situaciones problemáticas. Los profesores podrán elegir la incorporación de *modelos* en la intervención educativa del aula, tanto para el desarrollo de la competencia matemática, como de otras competencias. Se observa el uso que hacen los alumnos de la creatividad y el razonamiento y se analiza la relación de todos y cada uno de los distintos *modelos* con diferentes competencias matemáticas específicas.

Palabras clave: invención, resolución de problemas, competencia matemática, creatividad, didáctica.

Abstract

In this paper we present *models* for problem solving through invention and reconstruction of problematic situations. Teachers will be able to introduce *models* in their teaching practice either both the development of the mathematical competence and other competences. It is observed how pupils make use of creativity and reasoning. And the interconnections amongst the different *models* with distinctive mathematical competencies are eventually analysed.

Keywords: invention, problem solving, mathematical competence, creativity, didactics.

1. INTRODUCCIÓN

Si existe un eje central al que se dirigen los conceptos y relaciones de los bloques de contenidos del currículo de matemáticas, éste se constituye en la resolución de problemas. Mucho se ha avanzado teóricamente desde que en 1980 el Comité Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) de EE. UU. recomendara que el principal objetivo de la enseñanza de las matemáticas fuera la resolución de problemas. Aún así, siguen sin verse actualmente en la práctica resultados que satisfagan al profesorado respecto a la iniciativa, la creatividad, la concentración y la asimilación de técnicas de base en la resolución de problemas matemáticos.

La capacidad de pensar matemáticamente¹ ha sustituido a la memorización de procedimientos establecidos y a la resolución de problemas rutinarios como centro del aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles educativos (NCTM, 2000; Doerr y English, 2003; Blomhøj, 2004; English, 2007; Fernández Bravo, 2008; Törner, Schoenfeld y Reiss, 2007). Booker (2007) y Zawojewski y Lesh (2003) sostienen que el desarrollo de la pericia en la resolución de problemas aparece como un desarrollo sinérgico y holístico de una variedad de contenidos matemáticos, heurísticos y estrategias de resolución de problemas, pensamientos de orden superior y compromiso, situados en contextos particulares. El Comité Nacional de Profesores de Matemáticas de EE. UU. considera que para dar sentido a las matemáticas, los estudiantes necesitan verlas y usarlas como una herramienta para razonar y resolver problemas (NCTM, 1989, p. 5). La invención de situaciones problemáticas es una actividad matemática cuya importancia y valor educativo vienen reconocidos por numerosos autores (Hadamard, 1947; Freudenthal, 1973; Polya, 1979; Ellerton, 1986; Brown y Walter, 1990; English, 1997). Sin embargo, como señala Silver (1994), en contadas ocasiones se pide a los alumnos que planteen e inventen problemas en clase.

¹ Según Schoenfeld (1994), «aprender a pensar matemáticamente significa: (a) desarrollar un punto de vista matemático (que valore el proceso de matematización y abstracción y tener la predilección de aplicarlos), y (b) desarrollar una competencia con las herramientas de trabajo, y usarlas en el servicio de la meta de aprender estructuras (desarrollo del sentido matemático)» (p. 60).

Cuando un sujeto se enfrenta a un problema es fundamental que entienda cómo lo resuelve y el porqué de cada uno de los pasos que le han conducido a la solución del mismo (hemos de decir que una solución de un problema puede ser que carezca de la misma). De esta forma, situamos el pensar matemáticamente como centro del aprendizaje y capacitamos a los estudiantes para resolver problemas más complejos y para entender de manera más sencilla nuevos conceptos y procedimientos. También les ayudará a desarrollar la capacidad de perseverar en tareas difíciles y, de esta forma, ganar confianza en sus propias maneras de aprender y actuar.

Competencia matemática es una capacidad del individuo para identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios fundados y utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de los individuos como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos. (OCDE, 2006, p. 74)

La invención y reconstrucción de problemas desarrolla la competencia matemática. Es la conclusión que se infiere de los resultados obtenidos por dos investigaciones (Fernández Bravo, 2000) y (Barbarán, 2010), realizadas con alumnos de Primaria y Secundaria (6 a 14 años), sobre los efectos de la invención de problemas en el aprendizaje de la matemática. Estas investigaciones evaluaron un programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas demostrando mejoría significativa en la adquisición de técnicas y estrategias para la resolución de problemas matemáticos. En este trabajo se presentarán los modelos de situaciones problemáticas utilizados en el programa citado.

Los objetivos que nos planteamos en este estudio fueron los siguientes:

- a) Indicar los antecedentes y el impacto educativo del programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas propuesto para el desarrollo de las competencias matemáticas, de una muestra de alumnos.
- b) Presentar los modelos de situaciones problemáticas del programa, aplicables principalmente a alumnos de 6 a 14 años de edad, con los que se pueden desarrollar las competencias matemáticas.
- c) Establecer una relación entre todos y cada uno de los diferentes modelos de situaciones que se presentan, con el desarrollo de determinadas competencias matemáticas específicas.

Para dar sentido a los objetivos y coherencia a la redacción del estudio, presentaremos: las investigaciones realizadas como antecedentes, las competencias matemáticas analizadas, los modelos de situaciones problemáticas utilizados y la relación de los modelos con las competencias matemáticas específicas.

2. IMPACTO EDUCATIVO DEL PROGRAMA DE INVENCION-RECONSTRUCCIÓN DE SITUACIONES PROBLEMÁTICAS EN EL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA MATEMÁTICA

Las investigaciones de Fernández Bravo (2000) y Barbarán (2010) realizadas sobre los efectos de la invención de problemas en el aprendizaje de la matemática, llegaron a la conclusión de que la invención y reconstrucción de problemas favorece el rendimiento de los alumnos en la adquisición de técnicas y estrategias para la resolución de problemas matemáticos. Los resultados de la primera investigación que se cita añaden cómo aparece una emoción positiva en los alumnos de Educación Primaria (6-12 años) y el gusto por la tarea de resolver problemas (Fernández Bravo, 2002).

En ambas investigaciones se llega a dos conclusiones comunes de alta representatividad didáctica para la intervención educativa en los procesos de enseñanza-aprendizaje de la matemática:

- Las situaciones que se presentan de forma incompleta favorecen el aprendizaje de la resolución de problemas matemáticos; el alumno hace uso de procesos metacognitivos y es consciente de las relaciones que intervienen en su resolución.
- La invención de situaciones problemáticas permite al alumno descubrir el error y reconocerlo para evitarlo en la construcción de nuevos conocimientos.

Desde que se realiza la primera investigación en el año 2000, el programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas se ha incorporado a Instituciones Educativas en Perú, Paraguay (Ministerio de Educación Nacional, Asunción), México, España (Asociación Educativa para la incorporación de metodologías innovadoras (AEIMI), y Cátedra Conchita Sánchez de Investigación para la Educación Matemática, de la Universidad

Camilo José Cela (UCJC), Institución Educativa SEK, Madrid) e Italia (Creativ, Reggio Emilia). En el año 2009, el programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas para el desarrollo de competencias matemáticas que presentamos recibe el premio de *Metodología Creativa* por el Instituto Europeo de las Creatividades, en Italia. En los comentarios recibidos sobre el programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas, tanto de expertos teóricos en el tema como de profesores desde su aplicación práctica en el aula, se subraya la rapidez de mejora en la resolución de problemas, el gusto por esa tarea, el desarrollo observado en otras competencias matemáticas, y el desarrollo de otras competencias, como: competencia en comunicación lingüística, aprender a aprender y autonomía e iniciativa personal.

Resumimos los resultados de las investigaciones en la que se evaluaron los efectos del uso en el aula del programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas sobre las competencias matemáticas de los alumnos (Fernández Bravo, 2000, 2002, 2010, 2012; Barbarán, 2010; Fernández Bravo, Castillo y Barbarán, 2010).

Se utilizó un diseño cuasi-experimental comparativo (pretest-intervención-postest), sobre un total de ocho grupos de alumnos. Cuatro grupos de alumnos de 4º de Educación Primaria –9 años de edad– (2 grupos control y 2 experimentales), y cuatro grupos de Educación Secundaria –13 y 14 años de edad-. La muestra estuvo formada por 190 alumnos. De esos, 105 alumnos de cuatro Colegios de Educación Primaria de titularidad pública de la Comunidad de Madrid (España), de los cuales 54 alumnos formaban parte de los 2 grupos experimentales y 51 alumnos conformaban los 2 grupos control. Los otros 85 alumnos se eligieron al azar de un total de 145 alumnos de 1º y 2º de ESO de un centro educativo de la Ciudad Autónoma de Ceuta, 39 de 1º de ESO (13 años de edad) y 46 de 2º de ESO (14 años de edad). Se eligieron al azar dos grupos como experimentales (un 1º –19 alumnos– y un 2º de ESO – 21 alumnos–) y dos como grupos de control (un 1º –20 alumnos– y un 2º de ESO –25 alumnos–).

Atendiendo a las competencias matemáticas específicas introducidas por Niss (2002), se planteó la siguiente hipótesis de estudio: si se utiliza el programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas con alumnos de 4º de Educación Primaria, 1º de ESO y 2º de ESO, no se desarrollan

las siguientes competencias matemáticas específicas: plantear y resolver problemas matemáticos (PRPM), pensar matemáticamente (PR), modelizar matemáticamente (MOD), argumentar matemáticamente (ARG), representar entidades matemáticas (REP), utilizar símbolos y formalismos matemáticos (USF), y comunicarse en, con y sobre las matemáticas (COM).

La variable independiente en esta investigación ha sido el programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas. Las variables dependientes estudiadas fueron las competencias descritas en el párrafo anterior. En este proceso se utilizaron como criterio de selección las capacidades que aparecen en las *tablas 2 y 3*, del *apartado 3.1*.

La fase pretest tuvo lugar en el mes de septiembre de 2010. La fase de intervención se llevó a cabo durante un periodo de ocho meses dentro del curso escolar 2010/11 y en ella se aplicó el programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas a los cuatro grupos experimentales. El seguimiento del programa se concluyó con 22 sesiones a lo largo del curso escolar, una sesión por semana. El equipo investigador se había formado, previamente, mediante seminarios de grupo para la aplicación práctica del programa citado que tuvieron lugar durante el curso escolar 2009/10.

El análisis estadístico de los datos recogidos se realizó con el programa *Statistical Package for the Social Sciences (SPSS)*, versión 15.0. Se estudió mediante un análisis de la varianza si existían diferencias estadísticamente significativas ($p < 0.05$) en las variables dependientes evaluadas en la fase pretest, obteniéndose respuesta negativa para todas ellas. Con la finalidad de comparar los cambios producidos por la utilización del programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas en los grupos experimentales, se realizó un análisis de varianza múltiple en relación con todas las variables evaluadas, investigando, también, la repercusión del citado programa en los valores de las variables intervinientes. Se calculó el coeficiente de correlación múltiple y el coeficiente de determinación corregido o ajustado. La prueba de significación del coeficiente de correlación se realizó considerando la hipótesis alternativa como bilateral (es decir, el coeficiente de correlación poblacional es distinto de cero). Para analizar las condiciones de aplicación de la regresión, se realizó un análisis de los residuos, observando la exigencia de normalidad de éstos. Se comprobó que todas las variables intervenían en la ecuación, siendo en todas, la curva normal y las Sig. de F que se indican a continuación.

Tabla 1. Resultados del ANOVA.

Fuente: elaboración propia.

	4° Primaria	1° ESO	2° ESO
Variable	Sig. de F	Sig. de F	Sig. de F
PRPM	0.000	0.000	0.000
PR	0.002	0.000	0.000
MOD	0.040	0.052	0.042
ARG	0.003	0.000	0.000
REP	0.210	0.130	0.036
USF	0.008	0.000	0.000
COM	0.006	0.000	0.000

Como podemos observar en la *tabla 1*, la razón F indicó que los cambios pre-test-postest en los grupos experimentales fueron:

- Estadísticamente significativos al 100% en la variable plantear y resolver problemas matemáticos (PRPM).
- Estadísticamente significativos al 100% en la variable pensar matemáticamente (PR) para 1° y 2° de ESO, y al 99.8% para 4° de Primaria.
- Estadísticamente significativos al 96%, 94.8% y 95.8% en la variable modelizar matemáticamente (MOD) para 4° de Primaria, 1° de ESO y 2° de ESO, respectivamente.
- Estadísticamente significativos al 100% en la variable argumentar matemáticamente (ARG) para 1° y 2° de ESO, y al 99.7% para 4° de Primaria.
- Estadísticamente significativos al 79%, 87% y 96.4% en la variable representar entidades matemáticamente (REP) para 4° de Primaria, 1° de ESO y 2° de ESO, respectivamente.
- Estadísticamente significativos al 100% para la variable utilizar símbolos y formalismos matemáticos (USF) para 1° y 2° de ESO, y al 99.2% para 4° de Primaria.

- Estadísticamente significativos al 100% para la variable comunicarse en, con y sobre las matemáticas (COM), para 1º y 2º de ESO, y al 99.4% para 4º de Primaria.

Se rechaza la hipótesis de estudio: Si se utiliza el programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas..., no se desarrollan las siguientes competencias matemáticas específicas: PRPM, PR, ARG, USF, COM. Y se acepta la hipótesis de estudio para las siguientes competencias: MOD y REP.

3. LA COMPETENCIA MATEMÁTICA Y EL PROGRAMA DE INVENCIÓN-RECONSTRUCCIÓN DE SITUACIONES PROBLEMÁTICAS

La noción de competencia matemática se ha usado con distintas interpretaciones (Niss, 2002; Schoenfeld, 2007; Rico y Lupiáñez, 2008; Britta, 2010; Kuntze, 2010). Por un lado, la de alfabetización matemática (*Mathematical Literacy*) que sirve para caracterizar la forma de proceder del sujeto dentro de las matemáticas escolares y, por otro lado, la de considerarla como los procesos que se deben activar para que el sujeto use las matemáticas en la resolución de situaciones problemáticas de su quehacer diario (Rico, 2006). Este último significado se basa en las ocho competencias adaptadas por Niss (2002), y que nosotros hemos utilizado en nuestro estudio. Niss, Blum y Galbraith definen la competencia matemática como «la capacidad para identificar preguntas relevantes, variables, relaciones o hipótesis en una situación de la vida real dada, traducirla a las matemáticas e interpretar y validar la solución del problema matemático resultante en relación con la situación dada». (Niss, Blum y Galbraith, 2007, p. 12).

3.1. Metamodelos y modelos de situaciones problemáticas aplicados al estudio

Durante mucho tiempo se han estudiado las dificultades que presentaban los escolares en la resolución de problemas matemáticos (Stoyanova, 2000). Esas dificultades se clasificaron en función de las causas que las originaban (atendiendo a investigaciones realizadas (Ben-Zeev, 1998; Watson y Chick, 2001) y, en su defecto, a la observación del aula); así, por ejemplo: falta de estrategia, utilización incorrecta de los datos, razonamiento incorrecto, técnica mal aplicada, etc. Descubrimos seis grandes causas –en las que se podían

agrupar las dificultades encontradas—, que podían explicar acciones perturbadoras para la resolución de problemas matemáticos: falta de razonamiento y creatividad para generar ideas; falta de comprensión de la relación entre la pregunta y el enunciado; falta de explicación entre la respuesta obtenida y la pregunta formulada; falta de autocorrección y metacognición; falta de análisis y síntesis; falta de relación entre situaciones de la vida real y el conocimiento matemático.

A partir de lo descrito anteriormente, nos formulamos la siguiente pregunta: ¿qué podemos hacer nosotros para evitar en los escolares esas dificultades en la resolución de problemas matemáticos? Decidimos atacar esas seis grandes causas, creando para ello una base teórica a partir de la cual actuar. Tendríamos entonces seis bases teóricas, a las que convenimos llamar *metamodelos*: Generativos; de Estructuración; de Enlaces; de Transformación; de Composición; de Interconexión. Para la aplicación práctica en el aula, necesitábamos acciones concretas que permitieran el desarrollo de los *metamodelos* enunciados. Para llevar al aula esas acciones concretas creamos diferentes *modelos* de situaciones problemáticas.

A continuación presentamos los seis *metamodelos* y los 49 *modelos* de situaciones problemáticas utilizados en el estudio. Todos estos modelos y metamodelos forman parte del programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas de Fernández Bravo (2010), basado en una metodología constructivista que se sustenta en el paradigma ecológico de Doyle (Doyle, 1995), la teoría de asimilación de Ausubel (Ausubel, 1976) y en la teoría de elaboración de Merrill y Reigeluth (Reigeluth y Darwazeh, 1982).

1. **Modelos de situaciones problemáticas:** todos los modelos contribuyen al desarrollo de la competencia matemática específica *plantear y resolver problemas matemáticos*, además de otras competencias, según los datos obtenidos de las investigaciones realizadas que se han expuesto anteriormente como antecedentes a la presentación de este estudio. A continuación expresamos en cada modelo, de mayor a menor intensidad, tres competencias matemáticas validadas por el procedimiento de triangulación de expertos, distintas a la de «plantear y resolver problemas matemáticos», que indicaron más desarrollo.
2. **Modelos GENERATIVOS:** deberían ser las primeras situaciones a las que se enfrentase el alumno, aunque no deban ocupar únicamente esos pri-

meros lugares. Desarrollan la confianza y seguridad de los alumnos en sí mismos. Ayudan a generar ideas y a utilizar el razonamiento lógico. La operación queda subordinada al pensamiento, del que se desprende divergencia y flexibilidad. Se desarrolla la atención, la actitud crítica, la capacidad de tolerancia, colaboración y solidaridad respecto a las ideas de los demás.

Tabla 2. Modelos GENERATIVOS y principales competencias matemáticas específicas que desarrollan.

Fuente: elaboración propia.

Modelo	Descripción	Competencias matemáticas 1>2>3
1. Situaciones sin número	Se presenta un problema en cuyo enunciado y pregunta no aparecen datos numéricos. Para llegar a la solución no se necesita operación alguna.	1. PR
		2. ARG
		3. MOD
2. Informaciones de las que se puede deducir algo	Se presentan informaciones, sin pregunta alguna: Puede ser una frase, una portada de un libro, un cartel publicitario, una lista de precios... La realización de la actividad consiste en deducir ideas y clasificarlas en: lógicas -aquellas que son verdaderas o falsas para todos- y no lógicas; así como posibles -muy posibles, poco posibles- e imposibles.	1. PR
		2. ARG
		3. MOD
3. Situaciones cualitativas	Se presenta un enunciado y una pregunta con sentido lógico pero de forma incompleta para llegar a la solución. Se va completando todo lo que se necesite en la medida en que el alumno lo vaya pidiendo.	1. COM
		2. PR
		3. MOD
4. Enunciados abiertos	Se le da al alumno una información: A partir de una frase, de una foto, de un dibujo, de un esquema, de un titular de un periódico, un prospecto, una programación de televisión... Su labor consiste en inventar una situación problemática en la que utilice esa idea.	1. PR
		2. COM
		3. REP
5. Problemas de lógica	No interviene el algoritmo. Utilización del razonamiento por deducción, inducción y analogía.	1. ARG
		2. PR
		3. COM

- 3. Modelos de ESTRUCTURACIÓN:** ayudan a estructurar mentalmente las partes que componen el problema: Enunciado, pregunta, resolución, solución.

Tabla 3. Modelos de ESTRUCTURACIÓN y principales competencias matemáticas específicas que desarrollan.

Fuente: elaboración propia.

Modelo	Descripción	Competencias matemáticas 1>2>3
6. Inventar y resolver un problema a partir de una solución dada	El alumno creará el enunciado, la pregunta y el proceso que se pueda corresponder con la solución de partida.	1. COM
		2. PR
		3. REP
7. Inventar y resolver un problema a partir de una expresión matemática	Creación de un enunciado y pregunta que se corresponda con el contenido de relación aplicativa de la expresión de partida.	1. COM
		2. REP
		3. USF
8. Inventar y resolver un problema cumpliendo dos condiciones	Llegar a la solución dada y aplicar la/s operación/es indicada/s.	1. USF
		2. COM
		3. REP
9. Inventar y resolver un problema cumpliendo dos condiciones	Llegar a la solución que se nos ha indicado y utilizar (todos/no todos) los datos numéricos que se nos han dado.	1. USF
		2. COM
		3. REP

- 4. Modelos de ENLACES:** ayudan a encontrar la concordancia lógica entre enunciado-pregunta-solución; se trabaja con variables de relación entre estas partes: variables sintácticas, lógicas, matemáticas, creencias sociales, experiencias propias. Desarrollan la atención y la prudencia en el trabajo. Evitan la dependencia de la asociación de formas lingüísticas con la aplicación de operaciones. No interviene el azar en la utilización de los datos; se percibe el significado de éstos dentro de la situación problemática. Se comprende que no todos los problemas presentan datos numéricos y que no todos los datos de un problema son numéricos.

Tabla 4. Modelos de ENLACES y principales competencias matemáticas específicas que desarrollan.

Fuente: elaboración propia.

Modelo	Descripción	Competencias matemáticas 1>2>3
10. Expresar preguntas y responderlas a partir de un enunciado dado	La labor del alumno consiste en crear preguntas que se puedan contestar teniendo en cuenta, únicamente, el enunciado de partida.	1. COM
		2. ARG
		3. PR
11. Expresar las preguntas que se corresponden con el enunciado y la operación	Se tiene un enunciado y preguntas en blanco. Cada una de esas preguntas lleva indicada la operación que se tiene que utilizar para obtener sus respuestas.	1. COM
		2. PR
		3. USF
12. Expresar las preguntas que se corresponden con el enunciado y la expresión matemática	Se tiene un enunciado y preguntas en blanco. Cada una de esas preguntas señala la expresión matemática que se debe utilizar en el proceso de resolución.	1. MOD
		2. COM
		3. ARG
13. Expresar las preguntas que se corresponden con el enunciado y la solución	Se presenta un enunciado con preguntas en blanco. Cada pregunta tiene una solución dada.	1. COM
		2. ARG
		3. USF
14. Inventar un enunciado que se pueda corresponder con una pregunta dada, y resolver el problema	El alumno deberá llevar a cabo lo que se describe en el modelo utilizando todos los datos del enunciado / sin utilizar todos los datos del enunciado.	1. PR
		2. COM
		3. ARG
15. Inventar un enunciado que se corresponda con una pregunta dada y una solución dada, y resolver el problema	El alumno deberá llevar a cabo lo que se describe en el modelo utilizando todos los datos del enunciado / sin utilizar todos los datos del enunciado.	1. PR
		2. COM
		3. ARG

Modelo	Descripción	Competencias matemáticas 1>2>3
16. Inventar un enunciado que se corresponda con una pregunta dada y la/s operación/es a seguir en el proceso de resolución, y resolver el problema	El alumno deberá llevar a cabo lo que se describe en el modelo.	1. PR
		2. COM
		3. USF
17. Inventar un enunciado que se corresponda con una pregunta dada y el proceso de resolución dado	El alumno deberá llevar a cabo lo que se describe en el modelo.	1. ARG
		2. COM
		3. USF
18. Inventar un enunciado que se corresponda con: una pregunta dada, la solución del problema dada y los datos numéricos dados que deben aparecer en el enunciado. Resolver el problema: utilizando todos los datos del enunciado / sin utilizar todos los datos del enunciado	El alumno deberá llevar a cabo lo que se describe en el modelo.	1. PR
		2. COM
		3. USF
19. Inventar un enunciado que se corresponda con varias preguntas dadas. Se presentan varias preguntas	La labor del alumno consiste en crear un enunciado, y sólo uno, capaz de dar respuesta a todas y cada una de las preguntas presentadas.	1. PR
		2. ARG
		3. COM
20. Inventar un enunciado, y sólo uno, con el que se pueda responder, y mediante las operaciones indicadas, a todas y cada una de las preguntas dadas	Se presentan varias preguntas acompañadas de la indicación de operación/es que se tienen que aplicar para llegar a su respuesta.	1. PR
		2. COM
		3. USF
21. Inventar un enunciado, y sólo uno, que se corresponda con: varias preguntas dadas y las soluciones que acompañan a todas y cada una de ellas. Comprobar el problema	El alumno deberá llevar a cabo lo que se describe en el modelo.	1. PR
		2. COM
		3. USF
22. Inventar un enunciado, y sólo uno, en el que aparezcan los datos numéricos dados: utilizando todos en el proceso/sin utilizar todos en el proceso, que se corresponda con: varias preguntas dadas y las soluciones que acompañan a todas y cada una de ellas	El alumno deberá llevar a cabo lo que se describe en el modelo.	1. USF
		2. COM
		3. ARG

5. **Modelos de TRANSFORMACIÓN:** utilización de una diversidad de enfoques y pluralidad de alternativas. Hay un dinamismo de relaciones mentales que implican el desarrollo de un pensamiento matemático. Se consolidan conceptos. Se provoca la atención a los elementos con que se representan las magnitudes que intervienen en las situaciones. Utilización de método de análisis y método de síntesis. Ayudan a la autocorrección y a establecer relaciones de semejanza y diferencia entre las estrategias de resolución de situaciones problemáticas.

Tabla 5. Modelos de TRANSFORMACIÓN y principales competencias matemáticas específicas que desarrollan.

Fuente: elaboración propia.

Modelo	Descripción	Competencias matemáticas 1>2>3
23. Cambiar los datos necesarios del problema, que ya ha sido resuelto, para obtener una solución dada y distinta a la que ya se obtuvo anteriormente	El alumno deberá llevar a cabo lo que se describe en el modelo.	1. ARG
		2. MOD
		3. PR
24. Cambiar los datos del problema, que ya ha sido resuelto, para obtener la misma solución que se obtuvo anteriormente	Se parte de un problema fácil y posible de realizar por todos los alumnos. Se van cambiando los datos por otros más complejos, pero equivalentes, para que no hagan variar la solución del problema.	1. ARG
		2. MOD
		3. PR
25. Añadir o eliminar información de un problema, que ya ha sido resuelto, para que la solución no varíe	El alumno deberá llevar a cabo lo que se describe en el modelo.	1. COM
		2. ARG
		3. PR
26. Cambiar los tiempos verbales en los que se expresa un problema, que ya ha sido resuelto. Resolver el nuevo problema. Observar y comparar las soluciones de ambos	El alumno deberá llevar a cabo lo que se describe en el modelo.	1. ARG
		2. MOD
		3. COM
27. Cambiar lo que sea necesario, y sólo si es necesario, de un problema, para que el proceso de su resolución, que se presenta, sea correcto	El alumno deberá llevar a cabo lo que se describe en el modelo.	1. ARG
		2. COM
		3. USF

Modelo	Descripción	Competencias matemáticas 1>2>3
28. Averiguar el dato falso de un problema, dándoles la solución correcta	Existe un dato en el problema, y sólo uno, que no nos permite llegar a la solución expresada.	1. PR
		2. COM
		3. ARG
29. Cambiar la pregunta de un problema, que ya ha sido resuelto, para que la nueva solución sea la misma que la que se obtuvo anteriormente	El alumno deberá llevar a cabo lo que se describe en el modelo.	1. PR
		2. ARG
		3. COM
30. Cambiar el orden en el que aparecen las proposiciones del enunciado de un problema, que ya ha sido resuelto. Resolver el nuevo problema. Observar y comparar ambas soluciones	El alumno deberá llevar a cabo lo que se describe en el modelo.	1. PR
		2. ARG
		3. COM
31. Cambiar la expresión afirmativa/negativa de las proposiciones de un enunciado	Se resuelve un problema en cuyo enunciado intervienen dos y solo dos proposiciones. Una vez resuelto, se niega la primera proposición, y sólo esa. Se crea un nuevo problema que se resuelve. A continuación, se niega la segunda proposición, y sólo esa. Se crea un nuevo problema que se resuelve. El último paso consiste en negar las dos proposiciones, se resuelve el problema resultante. Se observan las dificultades de precisar la solución, se comparan las cuatro soluciones.	1. PR
		2. ARG
		3. COM
32. Cambiar la conjunción por disyunción, y viceversa. Resolver los problemas. Observar y comparar las soluciones	El alumno deberá llevar a cabo lo que se describe en el modelo.	1. PR
		2. ARG
		3. COM
33. Negar las proposiciones del enunciado de un problema y cambiar la pregunta para que la solución no varíe	Los pasos son los mismos que se han seguido en el modelo 31, la diferencia consiste en que el alumno, una vez realizadas las negaciones, cree una pregunta para todos y cada uno de los nuevos problemas, tal que su solución sea la misma.	1. PR
		2. COM
		3. ARG

Modelo	Descripción	Competencias matemáticas 1>2>3
34. Buscar la correspondencia enunciado-pregunta-solución	Se dan varios enunciados, varias preguntas y varias soluciones u operaciones, desordenadas pero que se corresponden entre sí. El trabajo del alumno consiste en buscar la correspondencia enunciado-pregunta-solución.	1. PR
		2. ARG
		3, USF
35. Mezclar las preguntas de dos problemas	Se presentan dos enunciados de dos problemas distintos. Las preguntas que se corresponden con cada uno de estos enunciados se han mezclado generando un sin sentido de palabras. La realización de la actividad consiste en resolver los dos problemas.	1. PR
		2. COM
		3. ARG
36. Cambiar los datos de un problema, o problemas, dentro del mismo, o entre ellos	Se advierte al alumno que todos o algunos de los datos que aparecen se han cambiado y no ocupan el lugar que les corresponde. Su labor consiste en dar respuesta a la pregunta del problema o problemas.	1. PR
		2. ARG
		3. COM
37. Mezclar el/los enunciado/s de un/os problema/s	Se presenta un problema cuyo enunciado es un sinsentido porque se ha desordenado, o se presentan dos enunciados mezclados. Se da al alumno lo necesario para que pueda ordenarlos sin ambigüedad alguna y resolver el/los problema/s.	1. PR
		2. COM
		3. ARG
38. Mezcla de los procesos de resolución de dos problemas	Se presentan dos problemas distintos. Se mezclan los procesos de resolución. La labor del alumno consiste en identificar cada proceso con el problema correspondiente.	1. PR
		2. ARG
		3. COM

6. Modelos de COMPOSICIÓN: ayudan a ver el problema como un todo. Emisión de juicios a partir de relaciones múltiples. Desarrollan la memoria, la observación y la capacidad de demostración; ir hacia atrás y pensamiento reversible. Permiten la autocorrección.

Tabla 6. Modelos de COMPOSICIÓN y principales competencias matemáticas específicas que desarrollan.

Fuente: elaboración propia.

Modelo	Descripción	Competencias matemáticas 1>2>3
39. Cambiar las preguntas de un problema por una, y sólo una	Se presenta un problema con varias preguntas. La labor del alumno consiste en buscar una sola en cuyo proceso de resolución se contesten las demás.	1. PR
		2. COM
		3. MOD
40. Componer el/los enunciado/s de un/os problema/s a partir de todos/algunos de los datos que se ofrecen, y resolver la situación problemática	Se presentan enunciados tal que desde esa forma de presentación se encuentran incompletos para dar respuesta a su pregunta. Se presentan fuera del problema una serie de datos. La realización de la actividad consiste en elegir el lugar necesario de los datos para resolver el problema.	1. MOD
		2. PR
		3. USF
41. Completar los datos del enunciado de un problema a partir del proceso de resolución	Se presenta un problema resuelto, de cuyo enunciado se han borrado los datos y se ha dejado el espacio correspondiente para que el alumno lo complete según corresponda.	1. ARG
		2. USF
		3. COM

7. Modelos de INTERCONEXIÓN. Desarrollo de la originalidad, imaginación y creatividad. Aportan componentes de interdisciplinariedad y transversalidad. Ayudan a reflexionar sobre la lógica que ha operado en el razonamiento del proceso de resolución de un problema y a distinguir entre lo necesario y lo suficiente.

Tabla 7. Modelos de INTERCONEXIÓN y principales competencias matemáticas específicas que desarrollan.

Fuente: elaboración propia.

Modelo	Descripción	Competencias matemáticas 1>2>3
42. Completar los datos del enunciado de un problema a partir de la solución de éste	Se presenta un problema indicando su solución. De su enunciado se han borrado los datos y se han dejado los espacios en blanco. El alumno completará el enunciado según corresponda.	1. MOD
		2. USF
		3. ARG
43. Inventar un problema con un vocabulario específico dado, y resolverlo	Se le da al alumno el vocabulario que debe utilizar en la invención.	1. PR
		2. COM
		3. REP
44. Inventar un problema con: un vocabulario específico y la/s operación/es que debe/n utilizarse para su resolución	El alumno deberá llevar a cabo lo que se describe en el modelo.	1. PR
		2. COM
		3. USF
45. Inventar un problema con: un vocabulario específico y la solución dada	El alumno deberá llevar a cabo lo que se describe en el modelo.	1. COM
		2. PR
		3 REP
46. Resolver problemas que se presentan de forma completa, cuya resolución favorezca la aplicación de los conceptos, operaciones y relaciones lógicas a las necesidades habituales de desarrollo personal, convivencia y relación con el entorno: con solución única, sin solución definida, con varias soluciones	El alumno deberá llevar a cabo lo que se describe en el modelo.	1. PR
		2. ARG
		3. MOD

Modelo	Descripción	Competencias matemáticas 1>2>3
47. Seleccionar la información necesaria mediante la consulta de documentación	Se presenta una pregunta que, para su contestación, se requiere la consulta de diccionarios, textos, enciclopedias... o, simplemente, salir al patio, husmear en los listados de alumnos del colegio... para recoger la información necesaria. Es imprescindible facilitar el éxito de la búsqueda, en la que muchos de ellos perderían el tiempo sin rentabilizar el esfuerzo. Para ello, se pone a disposición del alumno una serie de fichas elaboradas por el profesor –adaptadas, en número y contenido, a la edad del alumno–, entre las que se pueda seleccionar y extraer los datos necesarios para resolver el problema.	1. COM
		2. REP
		3. ARG
48. Resolver un problema que se presenta de forma distinta a la habitual. Una poesía, un caligrama, lenguaje gráfico: tablas, diagramas; un cuento breve...	El alumno deberá llevar a cabo lo que se describe en el modelo.	1. REP
		2. USF
		3. PR
49. Relación entre lógica y matemática	Proponer situaciones en las que se manifieste de forma relevante la necesidad de pasar por un pensamiento lógico para llegar a un pensamiento matemático.	1. PR
		2. ARG
		3. REP

4. CONCLUSIONES

Los metamodelos y modelos utilizados de invención y reconstrucción de situaciones problemáticas ayudan a desarrollar competencias matemáticas en función de la actividad que exigen, dirigiendo en el alumno acciones epistemológicas, cognitivas o fenomenológicas. La acción metacogni-

tiva está presente en todos los modelos; cuanto más incompleta se presente una situación problemática capaz de ser reconstruida por el alumno, mayor es la posibilidad que tiene de ser consciente de las relaciones que intervienen en su resolución. Las situaciones que se presentan de forma completa y terminada debilitan el aprendizaje, al ignorarse la dinámica de relaciones intelectuales que han intervenido en el proceso de su construcción.

Existen modelos de invención de situaciones problemáticas que permiten al alumno descubrir el error y reconocerlo para evitarlo en la construcción de nuevos conocimientos. La concienciación del error es, para el alumno, reflexión, y para el profesor, disminución de la ignorancia que posee sobre lo que sus alumnos desconocen. Tal conocimiento adquiere un significado que da utilidad al medio en el que se desenvuelven las relaciones de enseñanza-aprendizaje. El diagnóstico, la detección, corrección y superación de los errores, como parte legítima de los procesos de mejora en el rendimiento de la resolución de problemas matemáticos, han surgido en un marco conceptual consistente, basado en la aplicación de los modelos descritos.

Los efectos de la invención-reconstrucción de situaciones problemáticas en el rendimiento de los alumnos de 6 a 14 años de edad para el desarrollo de la competencia matemática, muestran la eficacia de la invención de problemas como método en los procesos de su enseñanza-aprendizaje, lo cual puede contribuir a mejorar el rendimiento académico de nuestros alumnos en esta asignatura. Aconsejamos, como propuesta didáctica, el uso de la invención y reconstrucción de situaciones problemáticas por parte de los alumnos. Esta «invención» debe ser sistemática, debidamente programada y apoyarse en modelos cuyos objetivos y competencias se hayan estudiado.

Hemos observado que el uso continuado en el aula de situaciones problemáticas de las descritas en los modelos, desarrolla de manera estadísticamente significativa para la muestra utilizada, las siguientes competencias matemáticas específicas: plantear y resolver problemas matemáticos, pensar matemáticamente, argumentar matemáticamente, utilizar símbolos y formalismos matemáticos, y comunicarse en, con y sobre las matemáticas. No podemos afirmar que el programa de invención-reconstrucción de

situaciones problemáticas sirva para desarrollar la competencia de «representar entidades matemáticas» en 4º de Primaria y 1º de ESO, y modelizar matemáticamente en 1º de la ESO, al no observarse diferencias estadísticamente significativas entre los grupos experimentales y control. Como futuros trabajos, sugerimos confirmar estadísticamente estos resultados, tanto en otros centros de titularidad diversa como en otras etapas educativas.

La relación investigada entre los modelos utilizados y el desarrollo de determinadas competencias permite al profesor de estas etapas seleccionar los modelos de situaciones problemáticas adecuados para trabajar una competencia específica (*tablas 2 a 7*).

Al indicar los antecedentes y el impacto educativo del programa de invención-reconstrucción de situaciones problemáticas propuesto para el desarrollo de las competencias matemáticas, y presentar los modelos de situaciones problemáticas del programa, a alumnos de 6 a 14 años de edad con los que se pueden desarrollar esas competencias, hemos conseguido lo que en un principio pretendíamos. La finalidad principal era dar a conocer los modelos que nos han servido a nosotros y a otras personas para desarrollar en los alumnos la competencia matemática. La aprobación de este fin no tiene mayor recompensa que su aplicación en el aula.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ausubel, D. P. (1976). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.
- Barbarán, J. J. (2010). *Investigación evaluativa sobre la resolución de problemas para el desarrollo de la competencia matemática en alumnos de educación secundaria obligatoria, mediante la invención-reconstrucción de situaciones problemáticas: Estudio de caso*. Tesis de doctorado no publicada. España: Universidad Nacional de Educación a Distancia.
- Ben-Zeev, T. (1998). Rational errors and the mathematical mind. *Review of General Psychology*, 2(4), 366-383.
- Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling – A theory for practice. En B. Clarke, D. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johnansson, D. Lambdin, F. Lester, A. Walby y K. Walby (Eds.), *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics* (pp. 145-159). Sweden: National Center for Mathematics Education.

- Booker, G. (2007). *Problem solving, sense making and thinking mathematically*. MAV Conference.
- Britta, C. (2010). Heureka ich hab's. Stationsarbeit zur Problemlösekompetenz. *Mathematik 5 bis 10, 13*, 26-29.
- Brown, S. y Walter, M. (1990). *The art of problem posing*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Doerr, H. M. y English, L. D. (2003). A Modeling Perspective on Students' Mathematical Reasoning About Data. *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(2), 110-136.
- Doyle, W. (1995). Los procesos del currículum en la enseñanza efectiva y responsable. *Revista del Instituto de Investigaciones en Ciencias de la Educación, 4*(6), 3-11.
- Ellerton, N. (1986). Children's made up mathematics problems: A new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics, 17*, 261-271.
- English, L. D. (1997). The development of fifth-grade children's problem-posing abilities. *Educational Studies in Mathematics, 34*, 183-217.
- English, L. D. (2007). Complex systems in the elementary and middle school mathematics curriculum: A focus on modelling. En B. Sriraman (Ed.), *Festschrift in Honor of Gunter Torner The Montana Mathematics Enthusiast* (pp. 139-156). Denmark: University of Southern Denmark Press.
- Fernández Bravo, J. A. (2000). *Efectos de la invención-reconstrucción de situaciones problemáticas, en el rendimiento de los alumnos del segundo ciclo de Educación Primaria, para la resolución de problemas matemáticos*. Tesis de doctorado no publicada. España: Universidad Nacional de Educación a Distancia.
- Fernández Bravo, J. A. (2002). Investigación sobre resolución de problemas matemáticos. *Educación y Futuro, 6*, 45-64.
- Fernández Bravo, J. A. (2008). *Cómo enseñar matemáticas en preescolar*. Puebla, México: Gil Editores.
- Fernández Bravo, J. A. (2010). *La resolución de problemas matemáticos: Creatividad y razonamiento en la mente de los niños*. Madrid, España: Grupo Mayéutica Educación.
- Fernández Bravo, J. A. (2012). *Cómo resolver problemas matemáticos*. Puebla, México: Gil Editores.
- Fernández Bravo, J. A. Castillo, S. y Barbarán, J. J. (2010). La invención de problemas y el desarrollo de la competencia matemática. *EduPsykhé: Revista de psicología y psicopedagogía, 9*(2), 221-234.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.
- Hadamard, J. (1947). *Psicología de la invención en el campo matemático*. Buenos Aires: Espasa Calpe.

- Kuntze, S. (2010). Zur Beschreibung von Kompetenzen des mathematischen Modellierens konkretisiert an inhaltlichen Leitideen: Eine Diskussion von Kompetenzmodellen als Grundlage für Förderkonzepte zum Modellieren im Mathematikunterricht. *Mathematikunterricht (Seelze)*, 56(4), 4-19.
- NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). (1989). *USA Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Niss, M. (2002). *Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish kom project*. Recuperado de http://www7.nationalacademies.org/mseb/mathematical_competencies_and_the_learning_of_mathematics.pdf [Consulta: 29/09/2016].
- Niss, M., Blum, W. y Galbraith, P. (2007). Introduction. En W. Blum, P. L. Galbraith, H-W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 3-32). New York: Springer.
- OCDE. (2006). *PISA marco de evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura*. España: Santillana.
- Polya, G. (1979). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.
- Reigeluth, C. M. y Darwazeh, A. N. (1982). The elaboration theory's procedure for designing instruction: A conceptual approach. *Journal of Instructional Development*, 5(3), 22-32.
- Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. *PNA*, 1(2), 47-66.
- Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid, España: Alianza Editorial.
- Schoenfeld, A. (1994). Reflections on doing and teaching mathematics. En A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 53-70). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- Schoenfeld, A. (2007). *Assessing Mathematical Proficiency*. Cambridge: University Press.
- Silver, E. (1994). On mathematical problem posing. *For the learning of Mathematics*, 14(1), 19-28.
- Stoyanova, E. (2000): *Student Achievement in Mathematics: Western Australian Government Schools 2000*. East Perth, WA: Dept. of Education.
- Törner, G., Schoenfeld, A. y Reiss, K. (2007). Problem solving around the world: Summing up the state of art. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 39(5), 353.
- Watson, J. M. y Chick, H. L. (2001). Factors influencing the outcomes of collaborative mathematical problem solving: An introduction. *Mathematical Thinking and Learning*, 3(2-3), 125-173.

Zawojewski, J. y Lesh, R. (2003). A models and Modeling Perspective on Problem Solving Strategies. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and modeling Perspective on Mathematics Teaching, Learning, and Problem Solving* (pp. 9-34). Mahwah, NJ: Erlbaum.

CITA DE ESTE ARTÍCULO (APA, 6ª ED.):

Fernández Bravo, J. A. y Barbarán Sánchez, J. J. (2017). El desarrollo de competencias matemáticas a través de modelos de situaciones problemáticas. *Educación y Futuro: Revista de investigación aplicada y experiencias educativas*, 36, 153-176.