SUMA 45
Febrero 2004, pp.29-34

Una propuesta para la aproximación intuitiva de funciones por polinomios en la ESO y el Bachillerato

Se extiende el concepto de aproximación de un número real *al de* aproximación de una función*. En la primera fase, a partir de la suma de una progresión geométrica, se obtienen casos particulares de funciones polinómicas que aproximan un tipo concreto de funciones racionales. En la segunda fase se encuentran funciones polinómicas que aproximan cualquier función continua. El profesor utiliza la historia de las Matemáticas como recurso didáctico haciendo comentarios que recuerdan la evolución histórica de la aproximación de funciones en series de potencias. Este recorrido es el mismo que van a seguir los alumnos.*

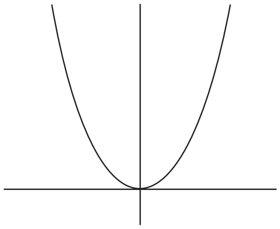
The concept of approximation of a real number *is extended to that of* approximation of a function*. In the first phase, from the addition of a geometric progression, particular cases of polynomial functions are obtained which approximate certain type of rational functions. In the second phase, polynomial functions that approximate any continuous function are found. The teacher uses the History of Mathematics as a didactic resource making remarks which remind of the historic evolution of the approximation of functions in series of powers. This is the same route that the students are going to follow.*

El problema general de la aproximación es omnipresente en las matemáticas, una disciplina que curiosamente, por otro lado, tradicionalmente ha sido considerada como la ciencia de la exactitud.

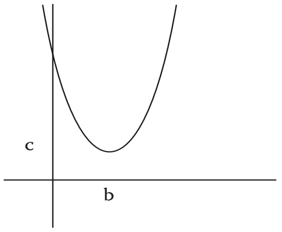
La situación más elemental en la que se presenta la necesidad de hacer una aproximación aparece al enfrentarse al problema de la medición. Por ejemplo, si queremos medir el "lugar" que ocupa un determinado cuerpo en el espacio, es decir la magnitud "volumen", pretendemos asociar a ese cuerpo un número y estamos por tanto dando un tratamiento aritmético a una situación que en principio es únicamente geométrica. Así pues la aproximación aparece como un puente natural entre la Geometría y la Aritmética.

Otras veces el problema planteado no puede resolverse en la forma que fue formulado y tenemos que obtener la solución a través de una aproximación. Por ejemplo, en Análisis es frecuente sustituir un proceso infinito (suma o integración) o un proceso infinitesimal (diferenciación) por una aproximación finita. En este caso la aproximación es el enlace entre el razonamiento finito e infinito.

La mayor parte de la aproximación hecha en Análisis numérico consiste en aproximar una determinada función por alguna combinación, frecuentemente lineal, de funciones construidas a partir de una clase particular de funciones. La clase de las funciones polinómicas tiene especial interés por varias razones. Por un lado, las calculadoras y los ordenadores sólo pueden realizar sumas y multiplicaciones, y estas son precisamente las únicas operaciones que aparecen en los polinomios, que por su sencillez, pueden ser manipulados, en general, y diferenciados e integrados, en particular, sin ninguna dificultad. Además en la aproximación polinómica, cuando se realiza un cambio en el origen de coordenadas o en la escala de la variable, éste conlleva un cambio en los coeficientes utilizados, pero no en la forma de la aproximación.



$f(x)=x^2$



$f(x)=a(x-b)^2+c$

Antonia Redondo Buitrago
IES Diego de Siloé. Albacete
Mª José Haro Delicado
IES Al-Basit. Albacete

Y lo que es más importante, toda función continua o seccionalmente continua en un intervalo se puede aproximar por un polinomio con tanta precisión como queramos. Este resultado se conoce en Análisis numérico con el nombre de Teorema de Weierstrass y no es más que un caso particular de un teorema más abstracto, el Teorema de Stone-Weierstrass, que dice:

> Dado un espacio métrico E compacto y el espacio vectorial $C_R(E)$ de las funciones continuas en E con valores reales (por tanto acotadas), si A es una subálgebra de $C_R(E)$ que contiene a las funciones constantes y separa puntos de E (es decir, para cada x, y pertenecientes a E existe una función f de A tal que $f(x)<>f(y)$), entonces A es densa en el espacio de Banach $C_R(E)$.

En efecto, si E es en particular un subconjunto compacto de R^n, espacio métrico compacto con la métrica inducida, tomando como subálgebra A, la de los polinomios, entonces toda función continua de E con valores reales es el límite de una sucesión de polinomios que converge uniformemente a ella.

El problema de la aproximación de funciones por medio de polinomios no aparece de forma explícita en el currículo de la ESO ni en el del Bachillerato, pero como se verá en el desarrollo de este trabajo, aparece de forma natural en el tratamiento elemental de las progresiones geométricas y esto nos permitirá trabajar algunos aspectos de forma intuitiva, muy asequible y sin tener que apoyarnos necesariamente en el concepto de derivada (Polinomios de Taylor).

Lo interesante y verdaderamente sugerente es que en una fase tan temprana del aprendizaje y de una forma tan sencilla se puedan establecer los fundamentos de conceptos y técnicas abstractas de Análisis funcional. Los alumnos no tienen porqué ser conscientes de esto, pero nosotros como profesores sí debemos serlo y pensamos que estamos obligados a no desaprovechar la ocasión que se nos presenta.

La metodología de nuestra propuesta se fundamenta en las teorías que utilizan el enfoque histórico (Rico, 1997) como recurso didáctico, pues entendemos que el aprendizaje de los alumnos puede motivarse y facilitarse, en la medida en que seamos capaces de reproducir las situaciones que condicionaron la aparición de las ideas implicadas, intentando posteriormente recorrer con ellos un itinerario similar al seguido en la aparición, desarrollo y formulación del concepto objeto de estudio.

Las teorías cognitivas nos dicen que la evolución natural del conocimiento matemático en la mente del individuo, sería en condiciones normales, paralela o similar a la que siguió el pensamiento colectivo a lo largo de la Historia de las Matemáticas. Por ejemplo, a lo largo de la historia se introdujeron antes los números racionales positivos, que ya eran conocidos por los babilonios, egipcios y griegos, que los números negativos y es precisamente ese el orden en el que se produce la evolución del concepto de número en la mente de un niño.

Las actividades que presentamos no constituyen una Unidad didáctica, sino que deben ser consideradas en el contexto del tratamiento de la diversidad, como un bloque de actividades de recapitulación y ampliación que implican contenidos de diversas partes de la asignatura (progresiones-inecuaciones-funciones-aproximación-límites-derivada). El proceso se secuencia en dos niveles de manera que puede iniciarse, si se estima oportuno, en cuarto curso de la ESO, y completarse en el primer curso de Bachillerato.

Nivel 1. (Cuarto curso de la ESO opción B)

Objetivos: Extender el concepto de *aproximación de un número real* al de *aproximación de una función*. Obtener casos particulares de polinomios que aproximan algunas funciones racionales.

Conocimientos previos: Aproximación de un número real. Polinomios. División de polinomios. Progresiones geométricas. Suma de los términos de una progresión geométrica. Inecuaciones. Concepto de función. Gráfica de una función.

Materiales: Ordenador (con programa Derive) o Calculadora gráfica.

La aproximación de una función por una serie de potencias aparece muy pronto en la historia de las Matemáticas relacionadas con las progresiones geométricas de razón menor que la unidad. Aristóteles ya admitió que estas series tienen suma finita y esta será nuestra situación de partida.

Empezaremos considerando la progresión geométrica 1, r, r^2, r^3..., de razón $-1 < r < 1$, y recordando la fórmula de la suma de todos los términos de dicha progresión:

$$1+r+r^2+r^3+\ldots=\frac{1}{1-r} \quad , \quad -1<r<1$$

Podemos decir por tanto que cuando es $-1 < r < 1$, los valores de 1, $1 + r$, $1 + r + r^2$.... son aproximaciones de

$$\frac{1}{1-r}$$

o bien recíprocamente, que

$$\frac{1}{1-r}$$

se puede aproximar por 1, $1 + r$, $1 + r + r^2$, ..., $1 + r + r^2 + ... + r^n$ y la aproximación es tanto mejor cuanto mayor sea el valor de n, por supuesto, siempre que $-1 < r < 1$.

Si cambiamos en esa expresión la r por x y escribimos la igualdad en sentido contrario,

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots \quad , \quad -1<x<1$$

como el símbolo x se suele utilizar para representar la variable independiente de una función, la igualdad anterior adquiere una nueva dimensión para los alumnos (la notación en este caso conlleva información implícita) y están en condiciones de realizar la primera actividad.

Actividad 1

a) Interpreta lo que puede representar la igualdad

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots \quad , \quad -1<x<1$$

cuando consideras la función

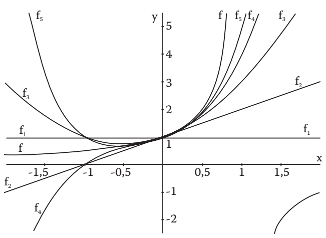
$$f(x)=\frac{1}{1-x}$$

b) Representa con el ordenador la función

$$f(x)=\frac{1}{1-x}$$

y las funciones

$f_1(x) = 1$, $f_2(x) = 1 + x$, $f_3(x) = 1 + x + x^2$, $f_4(x) = 1 + x + x^2 + x^3$....
Compara la interpretación que has dado en el apartado anterior y la que sugiere la observación de las gráficas.



Los alumnos están habituados a hablar de números aproximados y, de forma natural, proponen y/o aceptan que las funciones $f_n(x)$ podrían considerarse *aproximaciones de f(x)*. La observación de las gráficas muestra que la aproximación no sería válida para cualquier valor de x sino sólo cuando $-1< x< 1$. Este hecho fundamental no debe pasar desapercibido para el alumno porque es la primera vez que se enfrenta al concepto de intervalo de convergencia de una serie.

Actividad 2

Las siguientes funciones también se pueden aproximar por polinomios. ¿Sabrías encontrarlos? ¿Para que valores de la variable x *son satisfactorias las aproximaciones que obtienes?*

$$f(x)=\frac{2}{1-x},\ g(x)=\frac{5}{1-x^2},\ h(x)=\frac{3}{1-4x^2},\ k(x)=\frac{1}{1+x}$$

Confirma tus afirmaciones representando con el ordenador las gráficas de cada función y sus correspondientes aproximaciones.

Las funciones $f(x)$, $g(x)$ y $h(x)$ son respectivamente, la suma de las progresiones geométricas:

$2, 2x, 2x^2, 2x^3...$, para $-1 < x < 1$.

$5, 5x^2, 5x^4, 5x^6...$, para $-1 < x^2 < 1 <=> -1 < x < 1$

$3, 12x^2, 48x^4, 192x^6...$, para $-1 < 4x^2 < 1 <=> -1/2 < x < 1/2$.

Para la función $k(x)$ puede ser necesaria la indicación $1 + x = 1 - (-x)$. En ese caso la progresión sería

$1, -x, x^2, -x^3, x^4...$, para $-1 < -x < 1 <=> -1 < x < 1$.

Los alumnos pueden investigar aproximaciones de funciones no tan *cómodas* como las anteriores, por ejemplo

$$f(x)=\frac{1}{2x-1} \qquad g(x)=\frac{1}{x-2} \qquad h(x)=\frac{2x^2+1}{1-x}$$

Las únicas dificultades que se van a encontrar son de carácter algebraico, pero no es un inconveniente porque toda ocasión es buena para trabajar este tipo de contenidos:

$$\frac{1}{2x-1}=\frac{-1}{1-2x}=-1-2x-4x^2-8x^3-...,$$
$$\text{para} \quad -1<2x<1<=>-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{x-2}=\frac{-1}{2-x}=\frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{x}{2}}=-\frac{1}{2}-\frac{x}{4}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}-...,$$
$$\text{para} \quad -1<\frac{x}{2}<1<=>-2<x<2$$

$$\frac{2x^2+1}{1-x}=-2x-2+\frac{3}{1-x}=-2x-2+\left(3+3x+3x^2+3x^3+\cdots\right)=$$
$$=1+x+3x^2+3x^3+3x^4+..., \quad \text{para} \quad -1<x<1$$

También se puede proponer la obtención de la aproximación de las funciones consideradas anteriormente, mediante la *división larga*, utilizada en el siglo XVII por J. Gregory y N. Mercator.

Este procedimiento consiste en hacer la división de un polinomio por otro de grado superior, ordenando los términos de los polinomios en orden creciente según los grados de dicho polinomio:

$$
\begin{array}{l|l}
1 & 1+x \\ \hline
\underline{-1-x} & 1-x+x^2-\cdots \\
\cancel{}-x & \\
\quad \underline{x+x^2} & \\
\quad \cancel{}+x^2 & \\
\qquad \underline{-x^2-x^3} & \\
\qquad \cancel{}-x^3 & \\
\qquad \vdots &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
1 & 1+x^2 \\ \hline
\underline{-1-x^2} & 1-x^2+x^4-\cdots \\
\cancel{}-x^2 & \\
\quad \underline{x^2+x^4} & \\
\quad \cancel{}+x^4 & \\
\qquad \underline{-x^4-x^6} & \\
\qquad \cancel{}-x^6 & \\
\qquad \vdots &
\end{array}
$$

La primera división la utilizó Mercator en 1670 para obtener el desarrollo de la función *ln*(1 + *x*) de la forma

$$\ln(1+x)=\int_0^x \frac{du}{1+u}=\int_0^x\left(1-u+u^2-\cdots\right)du=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots$$

Por la misma época, Gregory había encontrado el desarrollo de la función , utilizando el mismo procedimiento

$$\operatorname{arctg} x=\int_0^x \frac{du}{1+u^2}=\int_0^x\left(1-u^2+u^4-\cdots\right)du=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots$$

Es importante hacer notar que el procedimiento de la *división larga* permite obtener polinomios que aproximan a la función, pero no nos dice nada sobre los valores de *x* para los que la aproximación es válida.

El gran L. Euler, alrededor de 1730, cometió muchos errores en sus trabajos sobre la suma de series, pues él, como los demás matemáticos de su época, no tenía claro el concepto de convergencia de una serie. Según él, puesto que

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$$

haciendo $x = -1$, se obtenía que 1 - 1 + 1 - 1 + ... = 1/2. Nosotros sabemos que la serie 1 - 1 + 1 - 1 +..., diverge puesto que la sucesión de sumas es 1, 0, 1, 0.... Los alumnos pueden mejorar a Euler previendo que su razonamiento es erróneo, ya que los infinitos términos de la progresión geométrica de razón -1 no se pueden sumar. Estos errores históricos vuelven a evidenciar la prudencia con que se debe manipular los desarrollos en serie de una función.

Todos los casos considerados proporcionan aproximaciones de la función en los alrededores del cero; en la siguiente actividad se obtienen aproximaciones en un entorno de otro punto.

Actividad 3
Observa que las siguientes funciones:

$$f(x)=\frac{1}{1-x} \qquad g(x)=\frac{1}{1+x}$$

pueden escribirse también así

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=\frac{1}{2-x-1}=\frac{1}{2-(x+1)}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{x+1}{2}\right)}$$

$$g(x)=\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2+x-1}=\frac{1}{2-(1-x)}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1-x}{2}\right)}$$

Utiliza esto para obtener otros polinomios distintos a los encontrados en las Actividades 1 y 2 que también puedan ser considerados aproximaciones de esas funciones. ¿Cuáles son ahora los valores de x *para los que es correcta la aproximación?. Comprueba los resultados representando con el ordenador las funciones y sus correspondientes polinomios.*

En este caso se obtiene que

$$\frac{1}{1-x}=\frac{1}{2}+\frac{(x+1)}{4}+\frac{(x+1)^2}{8}+\ldots,$$
$$\text{para}\quad -1<\frac{x+1}{2}<1 \Longleftrightarrow -3<x<1$$

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{2}+\frac{(1-x)}{4}+\frac{(1-x)^2}{8}+\frac{(1-x)^3}{16}+\ldots=$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{(x-1)}{4}+\frac{(x-1)^2}{8}-\frac{(x-1)^3}{16}+\ldots,$$
$$\text{para}\quad -1<\frac{1-x}{2}<1 \Longleftrightarrow -1<x<3$$

Podemos razonar en general con los alumnos para ver que se puede encontrar el desarrollo de una función racional cualquiera del tipo

$$f(x)=\frac{m}{px+q}$$

en cualquier punto a<>-q/p. Observaremos en primer lugar que el coeficiente p se puede considerar siempre mayor que cero (si no lo es basta con multiplicar numerador y denominador por -1), entonces

$$\frac{m}{px+q}=\frac{m}{q+pa+p(x-a)}=\frac{\dfrac{m}{q+pa}}{1-\left[-\dfrac{p(x-a)}{q+pa}\right]}$$

y la función admite el desarrollo

$$f(x)=\frac{m}{q+pa}-\frac{mp}{(q+pa)^2}(x-a)+$$
$$+\frac{mp^2}{(q+pa)^3}(x-a)^2-\frac{mp^3}{(q+pa)^4}(x-a)^3+\cdots$$

siempre que se verifique

$$-1<-\frac{p(x-a)}{q+pa}<1$$

Resolviendo esta inecuación obtenemos el intervalo de convergencia de esta serie geométrica

$$\left|-\frac{p(x-a)}{q+pa}<1\right| <=> |p(x-a)|<|q+pa| <=>$$
$$<=> -|q+pa|<px-pa<|q+pa|$$

es decir

$$a-\frac{|q+pa|}{p}<x<a+\frac{|q+pa|}{p}$$

Este razonamiento tan elemental nos permite obtener el desarrollo de cualquier función racional

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

cuyo denominador sea un polinomio que solo tenga raíces reales simples, pues basta con hacer la división indicada

$$\begin{array}{l|l} P(x) & Q(x) \\ \cline{2-2} R(x) & C(x) \end{array} \qquad f(x)=C(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}$$

y descomponer posteriormente la función *R(x)/Q(x)* en suma de fracciones simples. Cada una de ellas nos proporciona un desarrollo en serie de potencias con su correspondiente intervalo de convergencia. Cuando *x* pertenece a la intersección de todos ellos, las series se pueden sumar término a término y al sumar *C(x)*, que está formado por un número finito de monomios distintos de cero, obtendremos el desarrollo definitivo para cualquier *a* del dominio de la función.

También se puede presentar algún caso en el que la aproximación de la función sea válida para cualquier valor de *x*, por ejemplo

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$$

Una comprobación con el ordenador sería suficiente en 4º de la ESO, pero si los alumnos son de Bachillerato podría además encontrarse el desarrollo de la función a partir del binomio de Newton y de la igualdad

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$$

En efecto, el binomio

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

se puede escribir de la forma

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\frac{x}{n}+\binom{n}{2}\frac{x^2}{n^2}+\binom{n}{3}\frac{x^3}{n^3}+\cdots\binom{n}{n}\frac{x^n}{n^n}$$

es decir

$$1+x+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2!}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{x^3}{3!}+\ldots+$$
$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{x^n}{n!}$$

al hacer tender $n\to\infty$ todos los paréntesis tienden a uno y obtenemos que

$$e^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

Este razonamiento aparece en un trabajo de N. Abel (1802-1829) con la matización *suponiendo que la serie fuera convergente* y es el mismo que llevó a Euler a definir el número e de la forma

$$e=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\ldots$$

Nivel 2. (Primer curso de Bachillerato)

Objetivos: Iniciar la construcción del esquema conceptual *Toda función continua en un intervalo [a, b] se puede aproximar por polinomios*. Encontrar polinomios de grado n que aproximen funciones n veces derivables (Polinomios de Taylor).

Conocimientos previos: Nivel 1. Derivada de una función en un punto. Utilización de la derivada para el estudio de propiedades locales de una función.

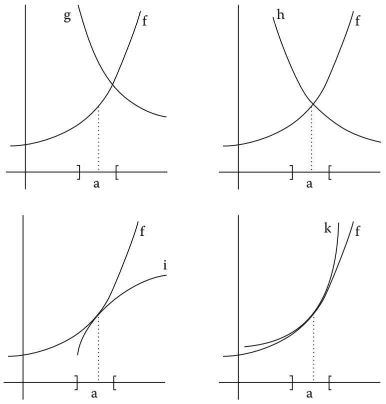
Materiales: Ordenador (con programa Derive) o calculadora gráfica.

En este nivel nos enfrentaremos al problema general. *Dada una función cualquiera ¿se pueden encontrar polinomios que la aproximen?*

Actividad 4

a) Observa estas gráficas y di cuál de las funciones g(x), h(x), j(x) *o* k(x) *te parece que aproxima mejor a la función* f(x) *en los alrededores del punto* a. *Describe los factores que han influido en tu elección.*

b) Estudia el comportamiento de las funciones en a *(valor, crecimiento, forma...). ¿Qué conclusiones sacas?*



Intuitivamente los alumnos eligen sin ninguna duda la función *k(x)* y afirman que la función *g(x)* es la que *menos se parece* a la *f(x)* en las proximidades del punto *a*. Para empezar los valores asignados por *f(x)* y *g(x)* son distintos en *a*, además *f(x)* es creciente, *g(x)* es decreciente y por si fuera poco, tienen distinta concavidad. La función *h(x)* coincide en *a* con la *f(x)* pero, igual que en el caso anterior, se diferencian en su crecimiento y concavidad, es decir en el valor de su primera y segunda derivada en el punto *a*. La tercera función considerada, *i(x)* tiene a su favor que coincide con *f(x)* en *a*, es decir, *f(a)= i(a)*, y comparten la misma recta tangente en ese punto, por tanto *f'(a)= i'(a)*, pero aunque ambas son crecientes, no tienen el mismo tipo de concavidad. Esta claro que la función *k(x)* elegida, cumple *f(a)= k(a)*, *f'(a)= k'(a)* y en el caso de que los valores de *f''(a)* y *k''(a)* fueran distintos, desde luego son del mismo signo.

Surgen inevitablemente las preguntas: *¿Qué condiciones debería cumplir una función que fuera todavía mejor aproximación? ¿Cuál sería el polinomio de grado n que mejor aproxima a la función f(x)?*

Para contestar a estas cuestiones podemos considerar, por ejemplo, un polinomio de grado 2, $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, y empezar observando que por sucesivas divisiones entre $x - a$, se puede escribir de la forma $b_0 + b_1(x - a) + b_2(x - a)^2$, con $b_0 = P_2(a)$, sea cual sea el valor de a.

Luego si esperamos que se cumpla $f(a) = P_2(a)$, debemos elegir $b_0 = f(a)$, y el método clásico de determinación de coeficientes nos lleva a elegir

$$b_1 = f'(a) \quad b_2 = \frac{f''(a)}{2!}$$

para que se cumpla también $f'(a) = P'_2(a)$ y $f''(a) = P''_2(a)$.

Si el razonamiento se hubiera hecho en general habríamos obtenido el polinomio

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

es decir, el polinomio de Taylor de grado *n* en el punto *a*, y la forma en que lo hemos encontrado garantiza su unicidad. Además es obvio que el polinomio de Taylor de una función polinómica es el mismo polinomio que interviene en su expresión algebraica.

Recordemos que estos polinomios fueron encontrados por B. Taylor (1715) a partir de otros muy conocidos en su época, los polinomios de interpolación de Newton.

Actividad 5

Escribe los polinomios de Taylor de grado 1, 2, 3... en el punto de las funciones de las actividades 1 y 2 y compara con las aproximaciones que se obtenían allí.

Encuentra los polinomios de Taylor de la función

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

en a=-1 *y de*

$$f(x) = \frac{1}{1+x}$$

en a=1 *y compáralos con las aproximaciones dadas en la actividad* 3.

Con esta actividad queda de manifiesto que, desde el principio, hemos estado hablando de los polinomios de Taylor. Podemos terminar proponiendo a los alumnos otras funciones para que encuentren sus correspondientes aproximaciones. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOURBAKI, N., (1976): *Elementos de historia de las matemáticas*, Alianza Universidad, Madrid.

BOYER, C.B., (1986), *Historia de la matemática*, Alianza Universidad Textos, Madrid.

COLLETE, J.P, (1985): *Historia de las matemáticas (I y II)*. Siglo XXI de España Editores S.A., Madrid.

KLINE, M., (1992): *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*, Alianza Universidad, Madrid.

PERALTA, J. (1995): *Principios didácticos e históricos para la enseñanza de la matemática*. Madrid: Huerga y Fierro.

REY PARTOR, J. y BABINI, J. (1985): *Historia de la Matemática (Vol. 1 y 2)*, Editorial Gedisa, Barcelona.

RICO, L. (1997): *Los organizadores del currículo de matemáticas, en la Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*, Barcelona, Horsori.