SUMA 24
febrero 1997, pp. 99-102

El saber práctico del solador: funciones, errores o ¿cuánto mide el rodapié de mi casa?

Jose Manuel Pichel Cosme

IDEAS Y RECURSOS

Esta experiencia de aula utiliza la realidad para hacer matemáticas. En concreto, se plantea la cuestión de averiguar la relación que existe entre la superficie de una vivienda con el perímetro de todas las habitaciones de la misma.

ALGUNAS profesiones prácticas tradicionales aplican en sus trabajos leyes, relaciones, procedimientos que constituyen un saber práctico cuyo análisis puede ser una tarea interesante desde el punto de vista matemático. La cubicación de la madera, la cuerda de doce tramos, la medición de la capacidad de toneles, constituyen ejemplos de lo que se denomina etnomatemática.

Recientemente tuve que comprar plaqueta cerámica para renovar el suelo de una vivienda. El problema se planteó al encargar el rodapié. La superficie es la característica de las viviendas, pero, ¿cuánto mide el perímetro de todas las habitaciones de la casa? Un conocimiento matemático elemental distingue entre los dos conceptos, área y perímetro. Un conocimiento experto de solador los hace equivalentes:

—«Si su casa es de 90 m², lleve usted 90 metros de rodapié» –afirmó tajante el solador.

¿Será razonable esa estimación?

Supongamos una habitación cuadrada de lado x metros. La superficie será:

$$A = x^2$$

En el caso de que la habitación tenga una puerta de 1 metro la longitud del rodapié será:

$$L = 4x - 1$$

¿Para qué valores de x nuestro solador está en lo cierto? Resolvemos la ecuación:

$$x^2 = 4x - 1$$

Es decir:

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

Cuyas soluciones son:

$$2+\sqrt{3} \quad \text{y} \quad 2-\sqrt{3}$$

En el caso de una vivienda real

$$x = 2+\sqrt{3}$$

ya que el otro valor es desechable. (Ver figura 1.)

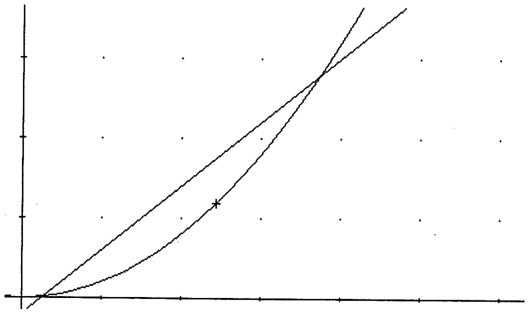

Figura 1. Parábola y recta

Tenemos, por tanto, una habitación cuyo lado mide aproximadamente:

$$x_1 \approx 3{,}73 \text{ m}$$

La superficie de la habitación sería de:

$$A_1 \approx 13{,}93 \text{ m}^2$$

¿Que pasaría si la habitación tuviera dos puertas? La ecuación que habría que resolver sería:

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$

de cuyas soluciones obtendríamos el valor del lado de la habitación que sería:

$$x_2 \approx 3{,}41 \text{ m}$$

y la superficie:

$$A_2 \approx 11{,}66 \text{ m}^2$$

Con tres puertas obtendríamos:

$$x_3 = 3 \text{ m} \qquad A_3 = 9 \text{ m}^2$$

Igualmente para cuatro puertas:

$$x_4 = 2 \text{ m} \qquad A_4 = 4 \text{ m}^2$$

Gráficamente las soluciones citadas serían los puntos de corte de la familia de parábolas con el eje OX, según muestra la figura 2:

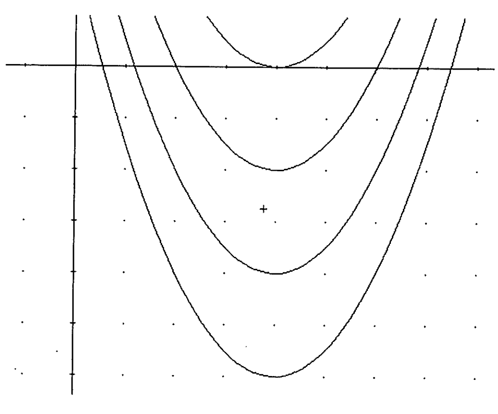

Figura 2

De las dos soluciones posibles, la menor es desechable.

Para un mayor número de puertas las soluciones se aproximan, tomando el valor 2 para el caso de habitación cuadrada y cuatro puertas.

Para un número de puertas $n > 4$ no existe solución real; la parábola no corta al eje OX, ya que siempre es mayor la superficie que el perímetro.

Tomando el caso de una sola puerta, y llamando *a* y *b* a los lados de una habitación cualquiera de forma rectangular, las situaciones de menor error absoluto, al tomar el perímetro como del mismo valor que el área, serán las que den como superficie en torno a 13,93 m ≈ 14 m. (Un ejercicio interesante consistiría en justificar esta afirmación.) Luego:

$$a \times b = 14$$

Representamos gráficamente la hipérbola en la figura 3 (consideramos sólo la rama de la hipérbola para $x > 0$).

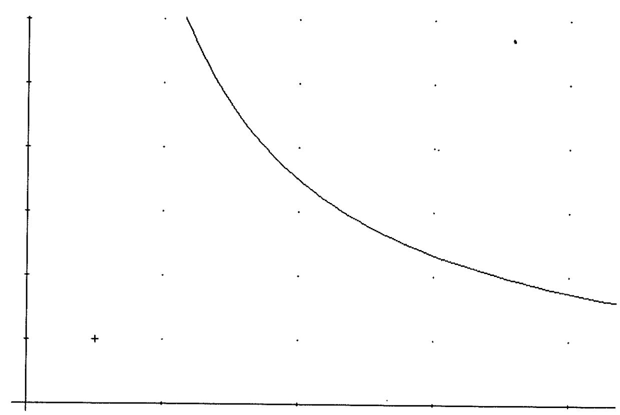

Figura 3

Igualmente podríamos obtener las correspondientes hipérbolas para los casos de *n* número de puertas.

En la realidad podríamos establecer una restricción sobre los valores de *a* y *b*. La relación entre los lados de una habitación real, podemos suponerla en torno a dos tercios. Representamos en la figura 4 las rectas:

$$b = \frac{2}{3}a \quad \text{y} \quad b = \frac{3}{2}a$$

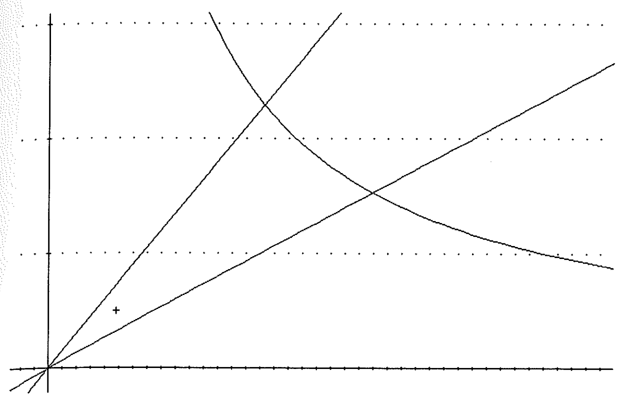

Figura 4

Los puntos de corte de las rectas con la rama de la hipérbola dan, aproximadamente 3,05 y 4,58. Para el valor más extremo el perímetro sería:

2 x 3,05 + 2 x 4,58 - 1 = 14,26.

El error relativo máximo estaría en torno a 0,26/14 ≈ 2%.

Estudiamos la relación entre la superficie de la habitación cuadrada y su rodapié. Llamamos E a esa función:

$$E = \frac{x^2}{4x-1}$$

Esta función nos da la relación entre la superficie de la habitación cuadrada y el rodapié. Para el valor x = 3,93 la función vale 1.

¿Cómo crece la función E?

Hacemos su gráfica (figura 5):

Es claro que la función E se puede aproximar a una relación lineal para valores altos de la *x*. El estudio de este problema permite plantear cuestiones clarificadoras de algunos conceptos que el alumnado percibe como muy abstractas. ¿Qué sentido tiene la asíntota? ¿Que significado tiene el siguiente límite?:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^2}{4x-1}}{x} = \frac{1}{4}$$

¿Qué pasa en x = 1/4? ¿que sentido tienen, en la realidad del problema, los valores de x < 1? Son preguntas que permiten al alumno entender significativamente el problema.

Más clara puede aparecer la relación entre el perímetro y el área, haciendo un cambio de variable. Llamando al rodapié p = 4x – 1 obtenemos:

$$E = \frac{\left(\frac{p+1}{4}\right)^2}{p} = \frac{p}{16} + \frac{1}{16p} + \frac{1}{8}$$

Para valores altos de p podemos aproximar E = (1/16)p. El error cometido para p = 10, valor medio del rodapié de una habitación normal, se podría aproximar a:

$$E = \frac{10}{16} + \frac{1}{8} = \frac{12}{16}$$

luego le faltarían 4/16 para que E = 1, por tanto, para que el error absoluto sea cero. Podríamos analizar el error relativo:

$$E_R = \frac{x^2 - 4x + 1}{4x-1} = E - 1$$

En una habitación de 10 m de perímetro, el error cometido será de 0,25 x 10 = 2,5 (ver figura 1), siendo el rodapié mayor que el área. Si una casa tiene 4 huecos como

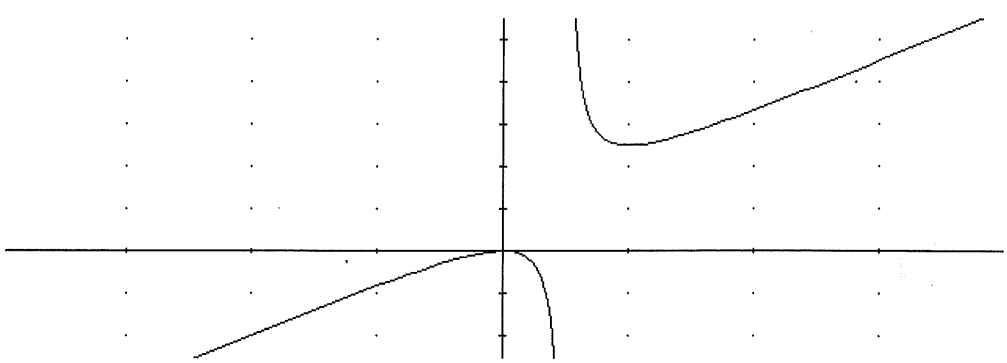

Figura 5

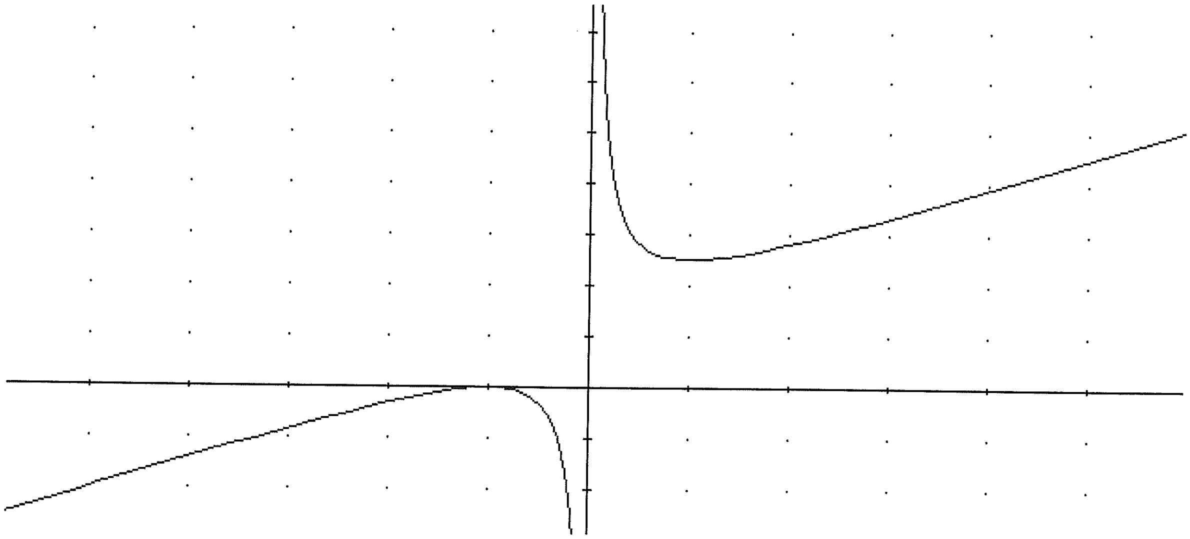

Figura 6

este, el error será igual a la medida del rodapié, es decir 10. Este error se compensa con el hecho de que en la cocina y cuartos de baño, cuya superficie estaría en torno a 10 m^2, no se coloca rodapié. La aproximación del albañil es buena.

Podríamos jugar con este tipo de relaciones, estudiando el comportamiento de pasillos, salón, etc., pero sería interesante generalizar, aproximar, estudiar un entorno de la función,...

Si representamos gráficamente la función E (figura 6) vemos que E crece con el valor de p, casi linealmente. ¿Qué significado tendría la siguiente recta?:

$$E = \frac{1}{16}p + \frac{1}{8}$$

Si llamamos s a la superficie, podríamos escribir para valores grandes de p:

$$\frac{s}{p} = \frac{p}{16}$$

En definitiva la relación entre la superficie y el rodapié sería la misma que entre el rodapié y 16. De nuevo encontramos una aproximación $E \approx 1$ para $p \approx 16$.

La aplicación del conocimiento matemático es una de las claves de un aprendizaje matemático significativo. A veces, es difícil transmitir a los alumnos la utilidad de algunos contenidos, pero siempre se pueden encontrar situaciones que les hacen evidente el significado de algunas técnicas matemáticas y la convicción de que utilizar el conocimiento matemático permite un mejor análisis y resolución de algunos problema. Por otro lado, es necesario que, desde la educación matemática se traten la estimación, el error, la aproximación tanto por su utilidad formativa y aplicabilidad en física, especialmente, pero también porque permite educar al alumno en una especie de «pensamiento difuso» en gran medida más cercano a él y más «holístico» ya que exige un control global del problema y sus significados.

José Manuel Pichel
Centro de Formación
Continuada do Profesorado
Ferrol