MATEMATICAS

Multivalencia de las situaciones geométricas

Por MARIA DOLORES PUIG SABADELL

En "L'enseignement des Mathématiques", primera publicación colectiva de la Comisión internacional para el estudio y mejoramiento de la enseñanza de la Matemática, se aprecia en todos sus miembros una profunda inquietud ante el choque que produce en los noveles universitarios el cambio brusco de la Enseñanza Media a la Superior.

Conocido es el extraordinario desarrollo y el cambio que, en sus mismas bases, ha experimentado la Matemática en nuestros tiempos, después de la revisión crítica que sufrió toda ella a fines del siglo pasado. La matemática moderna tiene por objeto primordial el estudio de las relaciones de entes matemáticos más que estos entes mismos; las nociones de ley, de relación de equivalencia, de grupo, anillo, cuerpo etc., tienen en ella una importancia mucho mayor que las de número, polinomio o figura geométrica. La aritmética y la geometría euclidianas son teorías univalentes, mientras que las del álgebra moderna son multivalentes.

Esta revolución matemática se ha traducido, hace algunos años, en la modificación de los programas de la Enseñanza Superior. Sin embargo, en la Enseñanza Media seguimos dando a nuestros alumnos la formación matemática en su concepción clásica euclidiana. Por eso, al llegar a la Universidad o a una Escuela Superior, no sabe reconocer el estudiante en las nuevas matemáticas del siglo XX que le presentan, las que él ha aprendido; tiene que cambiar de modo de pensar, debe clasificar de nuevo sus conocimientos anteriores a la luz de nociones distintas y expresarlo todo en un lenguaje completamente nuevo. Todo esto no es tarea fácil.

Lichnerowicz, matemático francés, miembro de la Comisión, en la primera publicación antes citada, expone su pensamiento sobre el modo de introducir el espíritu del álgebra moderna en la geometría y el álgebra elementales. No se trata de enseñar en toda su abstracción el álgebra moderna a los niños. Lo que se pretende es iniciarles lentamente, siempre que se presente ocasión, en el vocabulario y en los conceptos de ella. Hacerles caer en la cuenta de las estructuras de grupo, grupos de transformaciones, leyes de composición de conjuntos, etc., conceptos elementales que se manejan constantemente y que sólo hace falta llamar la atención sobre ellos.

El pasado año, en el mes de julio, se celebraron unas jornadas de estudios en Arlon (Bélgica), con la asistencia de unos 150 profesores, tratándose en ellas de los ensayos efectuados en diversos Centros para formar a los alumnos en las nuevas teorías matemáticas. Los resultados han sido sorprendentes: los alumnos se han entregado con grande entusiasmo al estudio del álgebra moderna que les ha cautivado. Los problemas los resolvían con facilidad. Se ha comprobado que los conocimientos de la matemática tradicional resultan más claros, completos y fructuosos a la luz de la teoría de conjuntos. La experiencia demuestra que cuanto antes se inicia a los escolares en estas cuestiones, más capacitados están para asimilarlas. Pueden tomarse como punto de partida para el álgebra moderna los mismos conjuntos de la matemática clásica, lugares geométricos, divisores, etc., o también otros conjuntos. Las regletas de Cuisenaire son un material excelente para empezar el estudio de los conjuntos.

También en España el Profesor J. R. Pascual Ibarra publicó un interesante artículo en la revista *Gaceta Matemática* (núm. 1 del año 1956), titulado: "Puntos de vista modernos en la didáctica de las matemáticas elementales".

Recientemente, en el programa del Curso Preuniversitario, se han introducido nociones de Algebra Moderna y Topología; y en el mes de enero de este año ha tenido lugar un cursillo en Santiago de Compostela, en el que se han estudiado estas cuestiones.

Nos creemos con el deber, si no queremos quedarnos rezagados de hacer un esfuerzo para impregnar del espíritu del álgebra moderna nuestras lecciones, y familiarizar en ella al escolar, con sus nuevas estructuras mentales, desde los primeros años. No formamos a nuestros alumnos para que vivan en el pasado; los preparamos para su porvenir. No tenemos que darles la enseñanza como nosotros la recibimos, sino al como ellos la necesitan para vivir en el ambiente de su época. Para conseguirlo es preciso trabajar y estudiar sin descanso. Esto es vivir: un caminar constante hacia la perfección. Nunca sabe bastante un profesor. Nunca tenemos que dar por terminada nuestra formación.

Consecuentes con estas ideas, hemos querido introducir en nuestras clases, juntamente con el método heurístico, unas sencillas nociones sobre la teoría de conjuntos, por vía de ensayo. Partimos de una situación geométrica, como indica el Profesor Gattegno en el último capítulo de "L'enseignement des Mathématiques". Para empezar, prescindimos del orden de materias de un programa determinado. Invitamos a las alumnas a traer, para la primera clase de Geometría, un dibujo de libre elección efectuado con sólo el compás. Estos dibujos nos sirven para observar, buscar y descubrir muchas relaciones matemáticas. La dificultad está en que, una vez descubiertas, sepan expresarlas bien. Es curioso ver sus esfuerzos en hallar la expresión apropiada, cuando se va dibujando en la pizarra lo que ellas han dicho, y tienen que reconocer humildemente que no ha sido lo que querían decir.

De todos los dibujos presentados, empiezo por ofrecer a su observación el más sencillo: una circunferencia sola, aislada. Esta simple figura nos sirve para repasar muchos conceptos y aprender otros nuevos:

1.° ¿Qué clase de línea es ésta? Curva, cerrada, plana. Definimos y afianzamos estos conocimientos.

2.° Propiedades de la circunferencia, de sus puntos. Lugar geométrico como *conjunto* de puntos que cumplen una condición: en este caso la de equidistar de un punto.

3. Regiones en que queda dividido el plano por una circunferencia:

Región interior a ella: el círculo.

Región exterior a ella: el resto del plano.

Distancia de un punto cualquiera de cada región al centro de la circunferencia.

Tenemos dos *conjuntos* perfectamente definidos. De cada punto del plano podemos decir si pertenece a uno o a otro de estos conjuntos.

¿Y los puntos de la circunferencia? Forman un tercer conjunto definido anteriormente, que es la *frontera* entre ambas regiones del plano.

4.° Distancia de un punto cualquiera del plano a la circunferencia. Modo de hallarla.

5.° Sentidos en que puede ser recorrida la circunferencia. Sentido de las agujas del reloj (negativo), o sentido contrario (positivo).

6.° Dados dos puntos del plano, el segmento que los une puede tener, según la posición relativa de ellos:

a) Todos sus puntos interiores a la circunferencia.

b) Todos sus puntos exteriores a la circunferencia.

c) Unos puntos interiores y otros exteriores. Los puntos del segmento quedan divididos en dos *clases* por el de intersección, que es el punto *límite* o *frontera* entre las dos clases.

7.° Repaso de arco, cuerda, diámetro, sector, segmento circular, etc.

8.° Posiciones de una recta respecto de la circunferencia. Aquí les doy ya el concepto de tangente como límite de las posiciones de una secante cuyo segundo punto de intersección tiende a confundirse con el primero. Lo admiten sin dificultad, así como el concepto de ser *doble* el punto de tangencia.

9.º Movimientos del círculo:

a) Rotaci n del círculo que admite un *grupo infinito de rotaciones*, coincidiendo siempre la figura consigo misma.

b) Traslación de la circunferencia sobre una recta que pasa por su centro o le es tangente (fig. 1).

Se nos forma una *familia de circunferencias.* ¿Qué tienen de invariante? ¿En qué varían? ¿Qué superficie barren en su movimiento? ¿Tienen tangentes comunes? ¿Qué figura forman las puntos equidistantes de las dos tangentes comunes?

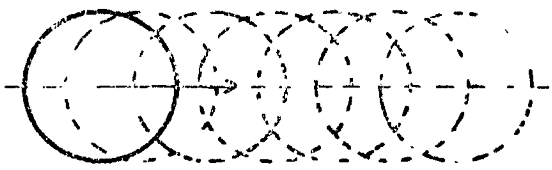


Fig. 1

Una alumna advierte que la circunferencia puede moverse de dos maneras: girando como una rueda sobre una tangente o deslizándose siempre un mismo punto sobre ella. En este último caso todos sus puntos describen rectas paralelas entre sí. Pero, en el primer caso, ¿qué figura describe cada punto de la circunferencia? Unas dicen que hace como olas, ondas, etc. Atando una tiza al borde de un círculo de madera y haciéndolo girar en la pizarra, obtenemos la curva cuya existencia y forma ellas han intuído: Se llama *cicloide.* En este curso les basta conocer su nombre. Algunas ven que se va repitiendo la misma curva a lo largo de la recta, cada vez que la circunferencia ha recorrido una distancia igual a $2 \pi r$. Ya tenemos idea de función periódica y de período.

Quedan muy gozosas de su descubrimiento.

10. Elementos de simetría del círculo: diámetros y centro.

* * *

Pasamos a un dibujo formado por dos circunferencias; las situaciones a estudiar se multiplican. En primer lugar, las posiciones relativas de las dos circunferencias pueden ser varias. Escogemos dos circunferencias de radio distinto en las posiciones siguientes:

Tangentes interiormente.

Tangentes exteriormente.

Secantes.

Sin ningún punto común (fig. 2).

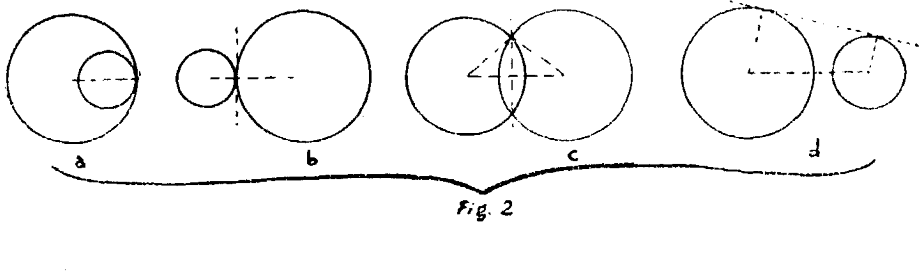


Fig. 2

En cada una de ellas podemos observar:

1.° Distancia entre los centros.

2.° Posición de la recta que pasa por los centros respecto del punto de tangencia y de la tangente o de la cuerda comunes.

3.° Número de tangentes comunes en cada caso. Figuras formadas por las tangentes, los radios del punto de contacto y *la línea de los centros. Variación de esta figura* al variar los radios.

4.° Distancias mínima y máxima entre dos puntos, uno de cada circunferencia.

5.° *Triángulo determinado, en las circunferencias secantes,* por los centros y un punto de intersección. Relaciones entre los lados y los radios. De aquí se deduce: "Un lado menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia". Por esto, cuando la distancia entre los centros es igual a la suma de los radios, no hay triángulo (tangentes exteriormente); tampoco si esta distancia es igual a su diferencia (tangentes interiormente).

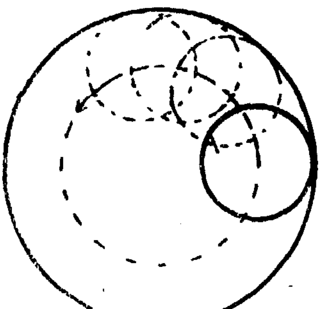


Fig. 3

En las circunferencias secantes, ¿cuál es la condición para que el triángulo sea isósceles? Que *las dos circunferencias tengan igual radio.* ¿Y para que sea equilátero? La distancia de los centros ha de ser igual al radio, las circunferencias iguales y cada una de ellas debe pasar por el centro de la otra (fig. 3).

6.° Movimientos de las circunferencias, girando una circunferencia alrededor de la otra. Línea que describen los centros. ¿Qué figura forman los centros de las circunferencias tangentes a otra? Relaciones entre los radios. Corona circular barrida *por el círculo móvil.* Se ve con facilidad la formaci n de la *cardioide* por el movimiento de una circunferencia tangente a otra de igual radio.

7.° Finalmente nos fijamos en la oportunidad que ofrecen estas figuras para iniciar a los alumnos en los primeros conceptos de la teoría de conjuntos:

a) Los círculos tangentes interiormente nos dan la idea de *inclusión* y de *subconjunto.*

b) Los círculos secantes nos muestran la *intersección* y la *reunión* de conjuntos.

c) Los círculos exteriores representan conjuntos *disjuntos.*

Haciendo buscar a las niñas conjuntos varios de objetos que cumplan estas condiciones, encuentran en las mismas alumnas del colegio todos los ejemplos.

Las alumnas de Matemáticas de todos los cursos forman un conjunto A.

Cada curso será un subconjunto, que está incluído en el primero.

Estos subconjuntos serán disjuntos si no hay alumnas repetidoras. En caso contrario, las repetidoras forman la intersección de los dos conjuntos.

Concretando más:

Alumnas de Matemáticas, conjunto A.

Alumnas de 1.° de Matemáticas, subconjunto B.

Alumnas de 2.° de Matemáticas, subconjunto C.

Alumnas de 3.° de Matemáticas, subconjunto D.

Alumnas que cursan 2.° y 3.° de Matemáticas N.

Indicamos que B está contenido en A así: $B \subset A$. Que N es la intersección de los conjuntos C y D así: $N = C \cap D$.

B y C son conjuntos disjuntos, su intersección es el conjunto vacío, lo expresamos: $B \cap C = \emptyset$ $B \cap D = \emptyset$

Representamos gráficamente estos conjuntos por medio de círculos (fig. 4).

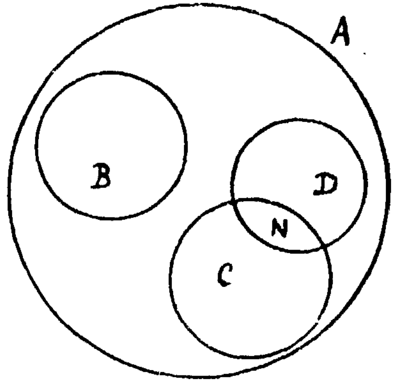


Fig. 4

Los puntos del círculo A que no pertenecen a B, C y D, son los restantes cursos.

El conjunto C tiene 28 elementos, el conjunto D tiene 32 elementos, la reunión de los dos conjuntos, que se expresa $C \cup D$, contiene 58 elementos, y no 60, porque los dos elementos del conjunto N pertenecen a ambos.

El conjunto de todas las alumnas puede dividirse en dos subconjuntos el de externas y el de internas. Ambos son uno de ellos complementario del otro.

Todo esto lo aprenden con facilidad e interés y les resulta muy entretenido.

Al mismo tiempo aplicamos la teoría de la divisibilidad tal como nos lo enseña el Profesor J. R. Pascual Ibarra en su artículo antes citado. No lo repetimos aquí por no ser original y porque puede verse en la revista *Gaceta Matemática.* Se obtiene el m. c. d. como intersección de conjuntos, y el m. c. m. como lo reunión. Ampliando el dibujo con tres círculos secantes, se obtiene el conjunto vacío como la intersección de los números que no tienen factores comunes; este conjunto vacío se representa por el factor uno, *elemento neutro* en el grupo *multiplicativo.*

* * *

Una de las figuras presentadas por las alumnas es (fig. 5) una familia de círculos

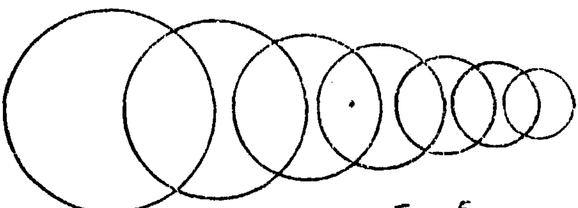


Fig. 5

cuyos centros están alineados y sus radios sujetos a variación decreciente. La distancia entre los centros de dos círculos consecutivos es igual al radio del círculo mayor.

Observamos intersecciones de conjuntos, luego se nos ocurre preguntar: ¿Podremos trazar tangentes comunes a todos los círculos? Tal como está el dibujo presentado, no podemos.

¿Qué condición necesitaremos para que se puedan trazar tangentes comunes a todos ellos?

Una alumna dice: Lo mejor es trazar primero las tangentes formando ángulo, y después las circunferencias.

¿Cómo trazar estas circunferencias tangentes? Los radios que van al punto de tangencia deben ser perpendiculares a las tangentes. Poco a poco, discutiendo y probando, llegan a la siguiente construcción:

a) Dibujamos un ángulo cuyos lados serán las tangentes; su bisectriz, la línea de los centros. La bisectriz es un *conjunto* de puntos que cumplen cierta condición, es el lugar geométrico ..., etc.

b) Por un punto cualquiera A de la bisectriz (fig. 6) trazamos perpendiculares

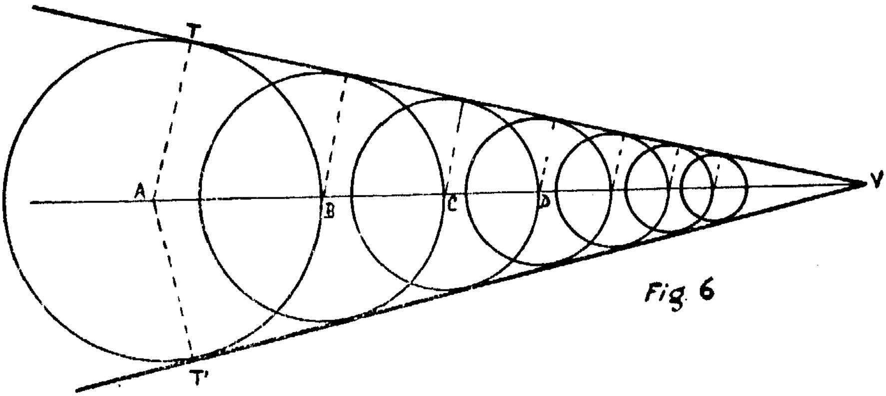


Fig. 6

a los dos lados del ángulo. A será el centro de la circunferencia, los segmentos AT = AT′ los radios.

c) El punto B, intersección de la primera circunferencia con la bisectriz, será el centro de la segunda. Por este punto B trazamos perpendiculares a las tangentes, y así sucesivamente vamos formando todas las circunferencias.

En esta construcción se advierte mucha regularidad; debe haber una ley expresable por medio de una fórmula. Tenemos que buscarla.

1.° Medimos los radios y vamos formando una sucesión de valores decrecientes: $R_1 > R_2 > R_3 > \ldots\ldots\ldots$

2.° Medimos las distancias de los centros al vértice del ángulo formado por las tangentes, y obtenemos: $D_1 > D_2 > D_3 > D_4 > \ldots\ldots$

3.° Hallamos la razón entre los radios y las correspondientes distancias del centro al vértice.

Obtenemos en todas las circunferencias la misma razón. La razón es constante. Los radios y las distancias del centro al vértice son magnitudes directamente proporcionales.

Los radios son todos paralelos entre sí.

Se nos han formado triángulos que tienen los ángulos iguales y los lados proporcionales.

Estudiamos el teorema de Tales, la semejanza de triángulos y la semejanza en general.

Esta misma figura, en la clase de tercer año, nos sirve para empezar el estudio de Trigonometría. La razón constante entre el radio y la distancia del centro al vértice, razón entre un cateto y la hipotenusa, es el seno del ángulo formado por una tangente y la bisectriz.

En las clases de quinto año buscamos la relación entre cada término y el siguiente de las sucesiones obtenidas anteriormente.

De las razones

$$\frac{R_1}{D_1} = \frac{R_2}{D_2} = \frac{R_3}{D_3} = \ldots\ldots = \text{sen } a$$

se obtiene:

$$R_1 = D_1 \text{ sen } a \quad " \quad R_2 = D_2 \text{ sen } a \quad " \quad D_1 = \frac{R_1}{\text{sen } a}$$

$$D_2 = D_1 - R_1 = \frac{R_1}{\text{sen } a} - R_1$$

Y expresando R_2 en función de R_1 obtenemos:

$$R_2 = \left(\frac{R_1}{\text{sen } a} - R_1\right) . \text{ sen } a = R_1 - R_1 (1 - \text{sen } a).$$

Buscando del mismo modo el valor de R_3, tendremos:

$$R_3 = R_2 (1 - \text{sen } a) = R_1 (1 - \text{sen } a)^2$$

Vemos que los radios forman una progresión geométrica de razón igual a (1 — sen a).
La progresión formada por las distancias de los centros al vértice, tiene la misma razón.
En efecto: Si

$$\frac{R_1}{D_1} = \frac{R_2}{D_2}$$

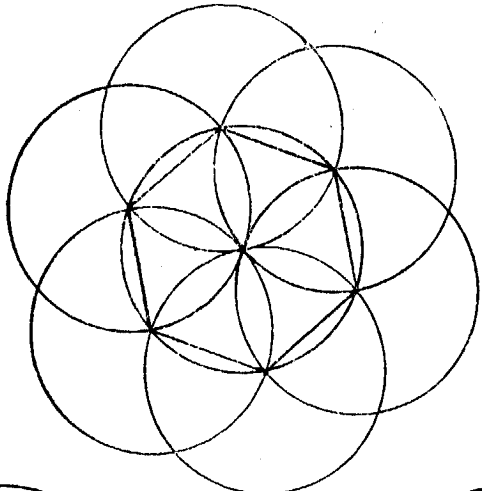
será también

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{D_1}{D_2} = 1 - \text{sen } a$$

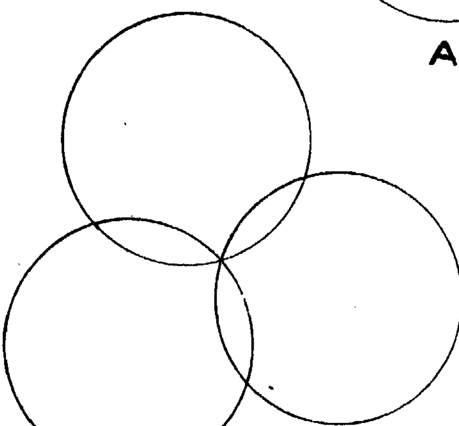
Estudio de la progresión que forman los radios.—Es una progresión de razón menor que la unidad, decreciente e ilimitada en los dos sentidos. Ningún término puede ser el primero o el último; siempre podemos hallar otro mayor y otro menor. La llamamos decreciente, en el sentido en que la hemos tomado. En sentido creciente, los términos crecen infinitamente; en sentido decreciente, los términos tienden a cero.
Partiendo de un término cualquiera como primero, la suma de los términos de la progresión, tomados en sentido decreciente, será:

$$\text{lim. } S_n = \frac{R_1}{\text{sen } a}$$

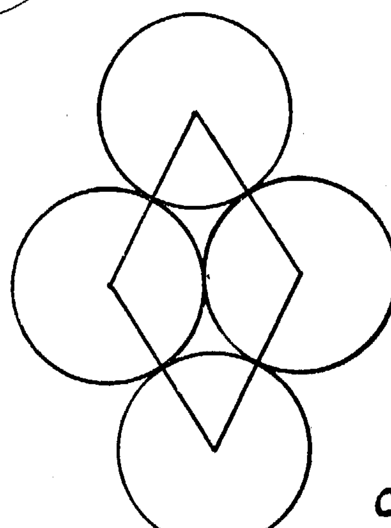
Vemos que el límite de esta suma es igual a D_1.
El limite de la suma de todos los radios de las circunferencias a partir de una de ellas, que llamaremos R_1, en sentido decreciente, es igual a la distancia del centro de esta circunferencia al vértice del ángulo formado por las tangentes.
Esta propiedad se desprende de la construcción de la figura.
Podemos seguir hallando las áreas de los círculos y la progresión que forman estas áreas.



A

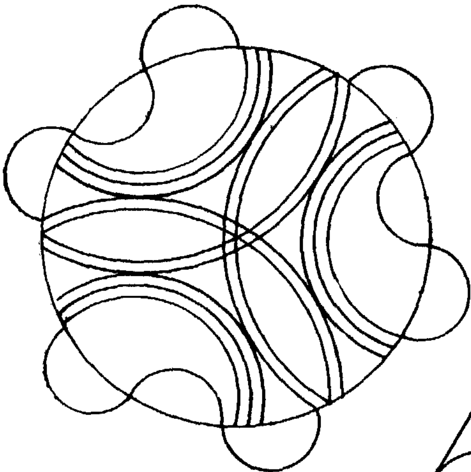


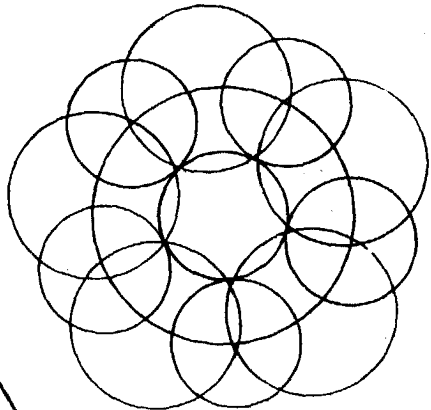
B



C

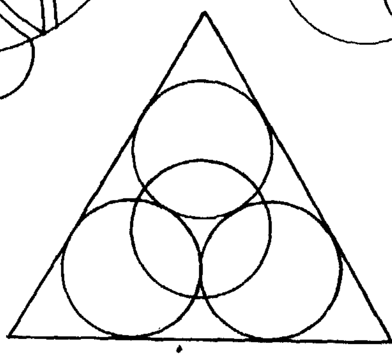
Serie de dibujos presentados por las alumnas





F

E



D

Otros dibujos de alumnas

La razón de las áreas será el cuadrado de la razón de los radios $(1 - \text{sen } a)^2$ y el límite de la suma de sus términos:

$$\frac{\pi R_1^2}{1 - (1 - \text{sen } a)^2}$$

La variación del ángulo formado por una tangente y la bisectriz nos permite calcular casos particulares y casos límites.

* * *

Las figuras estudiadas nos bastan para darnos cuenta de la multivalencia de las situaciones geométricas.

Muchas otras figuras presentadas por las alumnas nos dan ocasión de estudiar simetrías, grupos finitos de transformaciones, polígonos inscritos y circunscritos, etc. Con ellas podemos desarrollar todo el programa de segundo año y algo más.

¿Cómo reaccionan las alumnas ante estas clases? Oigamos sus comentarios:

"Espero con ilusión la hora de la clase de Geometría."

"Estas clases han sido para mí un descubrimiento, algo que no podía imaginar. Lo estudiado anteriormente en Geometría me parecían unas razones que daban unos señores y que ellos entenderían, pero yo no. Ahora lo entiendo todo claramente y las clases no son sólo interesantes, sino también amenas. Hasta la aritmética se entiende mejor, al ver cómo en las figuras geométricas toman forma las ideas abstractas."

"El imaginar el movimiento de las figuras me ayuda mucho para comprender la geometría y sus leyes."

"Aprendo muchas cosas, pero en lo que encuentro más gusto es en comprender y ver con toda claridad el por qué de todas las cosas que guardaba en la memoria sin entenderlas."

"Estas lecciones resultan muy amenas y se mantiene muy fácilmente la atención. Resulta interesantísimo ir deduciendo y descubriendo propiedades de unos dibujos hechos sin pensar en nada."

"Ahora veo que no necesito memoria para saber geometría; basta saber observar y descubrir todo lo que en las figuras se encierra."

"Encuentro las clases muy entretenidas e interesantes, y ahora la geometría me gusta más. Los mismos teoremas que ya sabía me parecen distintos y los entiendo mucho mejor; todo se ve más claro."

"Razonar ante un dibujo hecho por nosotras mismas y descubrir en él las propiedades que encierra, es algo que pone en acción la inteligencia y aumenta su capacidad. No aprendemos lo que nos ha preparado el profesor, sino lo que existe en sí y que se puede entender."

"Estas clases se me hacen muy cortas. Es la primera vez que siento pena cuando se termina la clase."

Esperamos que nuestras alumnas lleguen a estudiar sin la preocupación de un examen. Estudiarán movidas por el interés de aprender. El mejor premio para ellas ha de ser la satisfacción profunda, el íntimo gozo por el éxito obtenido al fin de su trabajo, con la conquista de una nueva verdad para su inteligencia, de una nueva parte de la Verdad Eterna que es Dios. Creemos que será el mejor medio para descubrir y fomentar vocaciones para la enseñanza de la Matemática.

MARIA DOLORES PUIG SABADELL
(Religiosa Esclava del Sagrado Corazón de Jesús)