2 La crisis de fundamentación de la Matemática y la opción del programa formalista de Hilbert

Por Jaime PARADIS (*)

Dos hechos fundamentales abonarán el terreno para que surja la escuela formalista. El primero de ellos acaece en la primera mitad del siglo XIX, cuando Lobachevski y Bolyai descubren la existencia de geometrías no euclídeas. La base de dicho descubrimiento reside en la no contradicción lógica de un sistema axiomático en el que se niega la proposición del V Postulado de las paralelas. El concepto de verdad matemática sufre una fuerte transformación acercándose al de «coherencia lógica». La tendencia axiomatizadora que tan buenos logros obtuvo en el terreno del descubrimiento de las nuevas geometrías, se extiende a los otros campos de la matemática, particularmente al de la aritmética, y a finales de siglo aparecen las construcciones de los números debidas a Peano, Frege...

El otro fenómeno que precede a la corriente formalista es el de la aparición de la teoría de conjuntos y la crisis de fundamentos de finales del siglo XIX. Para resolver el problema que planteaban la formulación de toda una serie de paradojas, se impuso la necesidad de depurar los lenguajes y revisar la lógica. De este modo apareció la teoría de tipos de B. Russell, que evitaba las paradojas de carácter semántico. Simultáneamente el problema de la fundamentación de la matemática daba lugar al nacimiento de las distintas escuelas que lo iban a abordar bajo ópticas y métodos distintos: la escuela logicista defendida por B. Russell, la escuela intuicionista, al frente de la cual se situaba Brouwer, y la escuela formalista encabezada por Hilbert.

En el año 1904 Hilbert hará un esbozo del trabajo formalista que más adelante presentará en forma de programa y que acabará convirtiéndose en escuela. El problema que habrá subyacente al programa formalista será el de buscar una demostración de consistencia para un cálculo formal axiomatizado.

Para demostrar directamente la consistencia de una teoría, sería necesario demostrar una proposición que versase sobre esta misma teoría. La teoría matemática, de la cual se espera demostrar su consistencia, pasa a ser de este modo el objeto de un estudio matemático, al que Hilbert denomina «metamatemática» o «teoría de la demostración». Dicho en otras palabras, Hilbert introduce una sutil diferenciación entre la teoría matemática, constituída por todas las fórmulas de la matemática intuitiva ($2 + 3 = 5$; $ax \cdot bx = abx^2$; etc.) y la metamatemática que tiene por objeto el estudio de la misma matemática, y que estará constituída por todas las proposiciones que se puedan hacer a partir de las fórmulas matemáticas, así por ejemplo pertenecerían al campo de la metamatemática expresiones del tipo ("$2 + 3 = 5$" es una fórmula aritmética, o bien "$ax \cdot bx = abx^2$" tiene sentido siempre y cuando «a» y «b» representen elementos numéricos). En concreto la proposición: «La aritmética es consistente» pertenece a la metamatemática.

Describamos brevemente lo que es un sistema formal y plantearemos después lo que pretendía Hilbert en su programa formalista.

Un sistema formal consta de una serie de signos a modo de vocabulario del sistema. Unas reglas perfectamente explicitadas que permiten construir combinaciones de signos válidas dentro del sistema formal, a modo de una gramática que nos indica cuáles son las «fórmulas admisibles» del sistema. Por último, unas reglas de deducción que nos permitan pasar de unas hileras de signos a otras también válidas dentro del sistema. Las reglas de deducción también tienen que estar perfectamente explicitadas. Hay que hacer observar que los signos en que se opera dentro del sistema, las hileras de signos que es lícito formar, y todas las fórmulas admisibles que podemos obtener son carentes de significado, se opera de manera mecánica con los signos, atendiendo tan sólo a su forma, y lo mismo se hace con las sucesiones de signos sin hacer apelación en ningún momento a cualquier significado de los mismos.

La formalización de una teoría matemática obliga en primer lugar a disponer de una buena notación simbólica con la ayuda de la cual se puedan codificar todas las proposiciones de la teoría matemática, y en segundo lugar, que las reglas de deducción formal correspondan a las que se usan de manera implícita e informalmente en la teoría matemática de la que se trata. Entonces se dice que esta teoría matemática es una interpretación de aquel cálculo formal, a pesar de que pueda haber otras interpretaciones.

Así pues, en síntesis, tenemos en primer lugar una teoría matemática de carácter informal, como por ejemplo la aritmética; en segundo lugar un sistema formal del cual la aritmética en este caso sería una interpretación, y en tercer lugar el estudio del sistema formal y sus propiedades estructurales, que recibe el nombre de metamatemática, y en donde el lenguaje y el razonamiento que se hace vuelven a tener un carácter informal.

La idea básica de Hilbert consistía en estudiar y analizar el sistema formal hasta el punto de que se pueda poner de relieve la imposibilidad de llegar a una contradicción para la aritmética clásica, es decir,

---

(*) Catedrático de Matemáticas del I.N.B. «Barrio Bessós» de Barcelona.

Hilbert pensaba que el conocimiento de la estructura en que se concatenan las distintas hileras de signos, conduciría a través de razonamientos nítidos y desprovistos de toda duda en cuanto a su validez, en un número finito de pasos y desterrando el uso del infinito (métodos finitistas), a demostrar la imposibilidad de deducir una fórmula aritmética y su negación. Naturalmente este resultado sería una proposición de la metamatemática, demostrada a través de razonamientos metamatemáticos y constituiría una prueba absoluta de consistencia. En todo caso, hay que insistir que la metamatemática no puede obtener resultados sobre el cálculo formal, haciendo uso de la interpretación del cálculo formal en la aritmética.

Nagel y Newman en su libro «El teorema de Gödel», plantean acerca de los objetivos de Hilbert: «... Hilbert no dio una explicación precisa de qué procedimientos metamatemáticos debían considerarse finitistas. En la versión original de su programa, los requisitos para una prueba absoluta de consistencia eran más estrictos que en las posteriores exposiciones del programa llevadas a término por los miembros de su escuela» (1).

La razón de ser del programa de Hilbert viene fundamentada en primer lugar por la imposibilidad de encontrar un modelo finito que pudiese cimentar la aritmética, y en segundo lugar porque se había encontrado una prueba absoluta de consistencia para el cálculo proposicional, a través del estudio de éste como sistema formal. El esquema de la demostración es el siguiente:

1.° Se demuestra que la fórmula «$p \rightarrow (\sim p \rightarrow q)$» es un teorema del cálculo proposicional.

2.° Si el cálculo no fuera consistente, o sea que existiese una fórmula F y su negación $\sim$ F como teoremas, entonces se tendría que toda fórmula del cálculo sería teorema, ya que sustituyendo en el teorema anterior p por F, se derivaría cualquier fórmula Q. En efecto

1 F
2 $F \rightarrow (\sim F \rightarrow Q)$
3 $\sim F \rightarrow Q$ por M.P. (1,2)
4 $\sim$ F
5 Q por M.P. (3,4)

3.° Se halla una propiedad común a todos los axiomas del sistema formal, y que sea «hereditaria» en el sentido de que los teoremas que se obtengan a partir de los axiomas, por las reglas de derivabilidad del cálculo, también posean esta propiedad. La propiedad elegida es la de ser tautología, común a todos los teoremas (tautología viene a ser toda proposición verdadera en todos los sentidos posibles).

4.° Basta ahora encontrar una fórmula del cáculo, que no sea tautología, como por ejemplo «PvQ». Entonces dicha fórmula no es teorema, y por el razonamiento hecho en 2.° queda demostrada la imposibilidad de que F y $\sim$ F sean teoremas simultáneamente del sistema.

Desde principios de siglo, el formalismo pretendió buscar una demostración de consistencia para el sistema formal de la aritmética. Fue en el año 1931 en que Gödel puso de manifiesto la imposibilidad de demostrar la consistencia de un sistema formal suficientemente amplio como para contener toda la aritmética. El sistema formal que utilizó para ello, fue el proporcionado por Russell-Whitehead (1910-13) en Principia Mathematica. No obstante, el método utilizado por Gödel es extensible a cualquier otro sistema formal que interprete la aritmética. Dicha demostración iba a suponer la renuncia del objetivo fundamental del programa de Hilbert. Más adelante Gentzen demostró por métodos no finitistas la consistencia deseada, pero los mismos métodos utilizados son tan susceptibles de duda, como el sistema que se pretende fundamentar.

A pesar de la pérdida del objetivo fundamental del programa de Hilbert, el estudio de los sistemas formales proporcionó notables conocimientos de la lógica formal, así como abrió nuevas perspectivas de estudio que han conducido a la teoría de funciones recursivas y máquinas de Turing (Church, Kleene, Turing...), que enmarca algunos problemas de algoritmos y computación, hoy en día tan importantes para el desarrollo tecnológico.

MATEMATICA, FORMALISMO E IDEOLOGIA

La aparición y desarrollo del formalismo, como estilo y método de trabajo para la matemática ha dado sin duda alguna sus frutos, fundamentalmente en el terreno de la fundamentación en que propiamente había nacido; ahora bien, es conveniente situar las técnicas formalistas en el justo lugar que ocupan en el proceso de creación de la matemática, si no queremos entresacar una imagen equivocada de las posibilidades reales del formalismo.

Como dice M. Sacristán en su libro «Introducción a la lógica y al análisis formal»: «... La principal aportación de la lógica formal a las ciencias no consiste en suministrarles herramientas para descubrir nuevos hechos o para inventar nuevos conceptos básicos, sino en darles métodos para analizar sus estructuras y sus nociones y afirmaciones fundamentales, con el objeto de precisar su claridad, su capacidad de fundar otras afirmaciones, etc.

Esta es la medida en la cual la ayuda de la lógica formal puede interesar al científico positivo, como suministradora de procedimientos que, con los demás métodos de la investigación básica, o investigación de fundamentos, sirven para analizar, aclarar y ordenar los resultados de la investigación fáctica. Hay autores que consideran una innecesaria artificialidad de la lógica el presentarse en la práctica muy abstractamente, como sólo apta para analizar resultados; pero el hecho es que cuando la lógica, en tiempos antiguos y medievales, se presentó como instrumento de la investigación factual, empírica, no dio de sí ningún resultado aplicable al descubrimiento. Antes al contrario, fue a veces una rémora del mismo» (2).

Veamos lo que dice al respecto Dirk J. Struik: «... La lógica formal nos permite establecer relaciones entre objetos («aislados») matemáticos y no matemáticos; pero después de todo se trata de relaciones trilladas (lo que no quiere decir que su estudio sea trivial) y, aun cuando su uso pueda permitir establecer proposiciones cada vez más complicadas, difícilmente harán de la matemática una ciencia creadora. La antigua ciencia oriental, con su estrecha conexión entre la matemática y la realidad, era ya infinitamente más rica» (3).

(1) Nagel, E. y Newman, J. R.: *El Teorema de Gödel.* Ed. Tecnos, pág. 51.
(2) Sacristán, M.: *Introducción a la lógica y al análisis formal.* Ed. Ariel, pág. 33.
(3) Struik, D. J.: *La matemática, sus orígenes y su desarrollo.* Ed. Siglo XX, pág. 48.

Se ha querido ver por ciertos matemáticos que el método axiomático-formalista constituye una fuente inagotable para el descubrimiento científico y una liberación del pensamiento, respecto a la creación matemática ligada al estudio de la realidad.

Así han proliferado a la sombra de la influencia del formalismo numerosos trabajos y publicaciones pretendidamente científicas, que han inundado de papel las estanterías de los departamentos matemáticos de las universidades, convirtiéndolos en inmensos archivos documentales de exóticos sistemas axiomáticos, que no importan a nadie. No es difícil encontrar tesis doctorales en las que se exhiben curiosidades tan notables como las que resultan de averiguar cómo se empobrecen los teoremas de una teoría particular al suprimir o alterar algunos de sus axiomas. Trabajos, que no pasan de ser copias baratas de la metodología que resolvió el problema anteriormente expuesto del V Postulado de los Elementos, y que si entonces creó la riqueza de las geometrías hoy produce la pobreza matemática reinante en muchos sectores.

La síntesis matemática emprendida fundamentalmente por el grupo Bourbaki, utiliza básicamente el estilo formalista (aunque su lenguaje es semiformalizado) logrando una reordenación de la matemática anterior alrededor de lo que llaman las tres estructuras madre de las matemáticas (estructuras de orden, estructuras algebraicas y estructuras topológicas). Su obra ha sido sin duda de inestimable valor para una síntesis global de toda la matemática desarrollada desde el período griego. Ahora bien, la forma de exposición deductiva, partiendo de las clases más generales y por ende más abstractas, para pasar posteriormente al terreno más concreto, enmascara a menudo las relaciones fundamentales que condujeron al descubrimiento científico y las causas genéticas de la teoría quedan completamente difuminadas, como una ola que borra la escritura hecha en la arena. Este hecho va íntimamente ligado al enmascaramiento que se produce de la relación del descubrimiento matemático y las ondiciones materiales de existencia en que éste se dá.

Esta cuestión es la que intentaré desarrollar brevemente, referida al origen y evolución posterior del formalismo, enmarcando en su contexto el papel jugado por Hilbert.

Dos cosas separan básicamente el formalismo que nace con Hilbert a principios de siglo y el formalismo que continúa, después de la segunda guerra mundial, a través del grupo Bourbaki. Los dos períodos vienen separados por los resultados de Gödel, aunque no es esto lo más importante por lo que respecta a su caracterización. En el primer período el programa de Hilbert plantea un auténtico plan de investigación de las leyes que gobiernan el proceso de creación matemática. Se propone un estudio a fondo de los refinamientos de la lógica que abarquen y expliquen todas las intrincadas y sutiles relaciones que habían ido apareciendo a lo largo del siglo XIX, y que fundamenten toda la matemática creada anteriormente. Delimita perfectamente los objetivos a alcanzar y establece un programa concreto para abordarlos. Que los recursos que pone en juego y el marco de estudio donde centrar la investigación (las estructuras de los sistemas formales) fueran insuficientes y demasiado estrechos para fundamentar toda la matemática, no invalida en absoluto, el carácter verdaderamente científico de su empresa. De hecho una de las cotas más altas alcanzada por el programa de Hilbert es precisamente los resultados de Gödel, aunque éstos supongan la ruina de los objetivos finales del programa. Opuestos dialécticos que componen una maravillosa sinfonía, que va de Hilbert a Gödel, que los enfrenta y los une al mismo tiempo, y que sin el primero no hubiese sido posible el segundo. A partir de Gödel, la cuestión de la fundamentación ya no podía seguir enfocándose bajo la misma óptica que antes. Se hizo trizas la creencia de llegar a través del formalismo a una fundamentación de la matemática, y quedó manifiesta la extraordinaria riqueza del quehacer matemático que difícilmente puede quedar cerrado en los límites de un sistema axiomático formal, por muy amplios que sean estos límites.

Por otra parte, se ha querido ver a través de la figura de Hilbert, el Adán del pecado original del formalismo, que representa la pérdida del paraíso terrenal de la matemática para situar a ésta como mera invención de la mente humana al margen del mundo material en que se desarrolla la vida y actividad humana.

Hilbert nunca perdió de vista que el estudio del sistema formal no constituía un fin en sí mismo, que la misma descripción del sistema formal se tenía que hacer con mucho cuidado para ser fiel imagen del objeto que en última instancia se sometía a estudio: La aritmética. Los pasos de sus investigaciones no eran simples palos de ciego en medio de signos despojados de sentido, sino pasos perfectamente guiados en la busca de la fundamentación. La misma exposición de su programa está llena de contenido, precisamente de un contenido demasiado fuerte como para ser tratado de una manera definitiva. Hilbert no olvidó la relación existente entre el contenido conceptual de las relaciones matemáticas, la armonía entre estas y el mundo real que fue soporte de su nacimiento, y las formas sígnicas que daban expresión a las relaciones matemáticas.

Leamos algunos comentarios que hace Struik, acerca de la obra de Hilbert:

«Hilbert fue especialmente quien, en la labor que realizó en busca de un fundamento impecable de la totalidad de las matemáticas, desarrolló un aparato puramente formal de signos y reglas de operación, pero recalcó siempre la armonía entre forma y contenido, entre teoría y práctica, entre signo humano y mundo objetivo.»

Y en otra parte del libro expone:

«... Debido a esta íntima relación entre pensamiento y naturaleza, entre experimento y teoría, revelada por la matemática moderna, Hilbert se mostró dispuesto a aceptar la noción de la «armonía preestablecida» formulada por Leibniz; pero en la relación entre la matemática teórica y sus aplicaciones vio todavía algo más que esta «armonía preestablecida»:

//Sin la matemática, es imposible la astronomía y la física de nuestro tiempo: estas ciencias, en sus partes teóricas, se disuelven, por así decir, en la matemática.//

A esta unidad del pensamiento y de la naturaleza es a lo que ha conducido el desarrollo de la matemática moderna.

A veces se afirma que, según Hilbert, la matemática es un juego desprovisto de sentido. Este trabajo muestra que tal afirmación no expresa la cabal comprensión que Hilbert tiene de la matemática (4).

(4) Struik: *Ib.*, págs. 40/73.

Para situar el formalismo y la figura de Hilbert en su exacto lugar es necesario situarnos en una perspectiva histórica. Pensar que las corrientes científicas y sus métodos de trabajo, se suceden al margen del desarrollo social es una idealización que se deja en la vieja caverna de Platón, la base de soporte de la producción científica y cultural.

El advenimiento del capitalismo representó en todos los órdenes de la vida —y el científico no fue excepción— un cambio de coordenadas que posibilitó un fuerte desarrollo de toda la actividad humana. Las necesidades de perfeccionamiento de la técnica mecánica (en la etapa del maquinismo, de la fabricación de precisas piezas industriales y la infraestructura de las vías de comunicación) requirió organizar sistemáticamente la producción de la ciencia a gran escala, y darle una orientación intímamente ligada a la realidad industrial. Es lo que Marx expuso como «la ciencia en el capitalismo se convierte en fuerza productiva directa». El mismo nacimiento de la Universidad Moderna data de la revolución burguesa, modelo de la cual fue la Escuela Politécnica Superior de París, creada poco después de la revolución francesa, en el 1805.

Por las mismas necesidades sociales que animaban el descubrimiento matemático, la actitud de la mayoría de científicos reflejaba una toma de postura materialista, respecto al rol que jugaba la matemática. Esta se convertía para la mayor parte de matemáticos en una herramienta de conocimiento del funcionamiento del mundo y del cosmos, y sus contenidos aparecían como independientes de la conciencia y voluntad del individuo, respondiendo a las leyes que gobernaban el mundo objetivo.

De esta forma se expresaba Riemann:

«¿Cuándo es verdadero nuestro entendimiento del mundo? Cuando la interconexión (Zusammenhang) de nuestras concepciones (Vorstellungen) corresponde a las interconexiones de las cosas» (5).

Esta actitud materialista que había jugado un papel hegemónico hasta la mitad del siglo XIX, empieza a perder relevancia a medida que el capitalismo se consolida y las fuerzas productivas alcanzan un grado elevado de perfeccionamiento técnico. La división del trabajo a gran escala va a crear profundos cambios en la organización social. Para mejor comprender la naturaleza y consecuencias de estos cambios, he elegido algunos párrafos Del Capital de Marx, capítulo XII (división del trabajo y manufactura):

«... La expansión del mercado mundial y el sistema colonial, que figuran entre las condiciones generales del sistema, suministran al período manufacturero material abundante para el régimen de división del trabajo dentro de la sociedad. No vamos a investigar aquí en detalle cómo este régimen se adueña no sólo de la órbita económica, sino de todas las demás esferas de la sociedad, echando en todas partes los cimientos para ese desarrollo de las especialidades y los especialistas, para esa parcialización del hombre que hacía exclamar ya a Ferguson, el maestro de A. Smith: /Estamos creando una nación de ilotas; no existe entre nosotros un sólo hombre libre/... (6)

... Además de distribuir los diversos trabajos parciales entre diversos individuos, se secciona al individuo mismo, se le convierte en un aparato automático adscrito a un trabajo parcial, dando así ~~realidad a aquella~~ desazonadora fábula de Menesio Agrippa, en la que vemos a un hombre convertido en simple fragmento de su propio cuerpo... (7)

... Las potencias espirituales de la producción amplían su escala sobre un aspecto a costa de inhibirse de los demás... Este proceso de disociación comienza con la cooperación simple, donde el capitalista representa frente a los obreros individuales la unidad y la voluntad del cuerpo social del trabajo. El proceso sigue avanzando en la manufactura, que mutila al obrero, al convertirlo en obrero parcial. Y se remata en la gran industria, donde la ciencia es separada del trabajo como potencia independiente de producción y aherrojada al servicio del capital... Entre el hombre de cultura y el obrero productor se interpone un abismo y la ciencia, que, puesta en manos del obrero, serviría para intensificar sus propias fuerzas productivas, se coloca casi siempre enfrente de él... La cultura se convierte en un instrumento susceptible de vivir separado del trabajo y enfrentado con él.» (8)

Este proceso de separación que se produce entre el obrero y el producto de su trabajo; la creciente especialización que hace del trabajador una simple pieza dentro del proceso productivo, no afecta esclusivamente al obrero manual, sino que los efectos de la división del trabajo se extienden a todas las áreas sociales, entre ellas al terreno de la producción científica. La actividad investigadora aparece cada vez más aislada del contexto global en que se dá. Tocan las campanas del fin de la era del científico universal, se acaba la imagen del sabio que entiende de la mayoría de aspectos de la ciencia, es el fin de los Newton, Descartes, Leibnitz, Bernuilli, Euler...

La especialización en el terreno científico y en concreto en la matemática generará unas nuevas formas de trabajar caracterizadas por la pérdida de visión global del proceso de creación científica y centramiento en un eslabón de la cadena de producción del que a menudo no verá los entramados que lo relacionan con los otros aspectos de la investigación. Ocurre en otro plano lo que le sucede al trabajador de una fábrica de coches moderna que realiza su trabajo en un lugar concreto de la cadena de producción ajustando una pieza que a sus ojos, tanto podría ser la de un coche como la de un avión, como podría perfectamente ignorar el qué está haciendo y por qué lo hace, si no fuera por las necesidades materiales de ganarse los garbanzos de cada día. Cierto proceso analógico ocurre a escala de la producción científica. A medida que el desarrollo matemático alcanza cotas de especialización y parcelas muy concretas de estudio, los medios técnicos de abordar los problemas requieren niveles cada vez más complejos y abstractos (y atención que abstractos no quiere decir que se alejen necesariamente de la realidad, ya que la complejidad del mundo en que vivimos exige conceptos y relaciones cada vez más sutiles, para entender el comportamiento de la naturaleza), y así sucesivamente la matemática aparece para muchos científicos como una actividad humana independiente del mundo y de la realidad. La ciencia empieza a ser tratada dentro de los salones académicos y se separa cada vez más del proceso social. Es relegada su función social y las matemáticas, aún más que las otras ciencias por su grado de abastracción, se separan de la vida.

De esta manera Jacobi en el año 1830 defendía ya que el objetivo de la ciencia es el honor del espíritu humano; Hermann Grassmann en el año 1844 mantiene la creencia de que la matemática se dedica a

(5) Riemann, B.: *Ges. Math* (1892), pág. 523.
(6) Marx, Karl: *El Capital*. Ed. F.C.E. Tomo I, pág. 288.
(7), (8) Marx: *Ib.* Tomo I, pág. 284.

estudiar la entidad especial planteada por el acto de pensar. Struik escribe acerca de este fenómeno:

«La introducción de nuevas y sutiles concepciones matemáticas (las cortaduras de Dedekind, la lógica matemática, la teoría de los agregados) parece colocar la matemática a ritmo acelerado como una ciencia del pensamiento puro, relacionada sólo incidentalmente on la naturaleza. Las matemáticas, para muchos de sus investigadores, parecía no ser otra cosa que un esquema formal, y de aquí sólo había un paso a la creencia de que la matemática no era nada más que un juego. Ya en 1882 Du Bois-Reymond lanza una advertencia contra esta posición:

//Un esqueleto de análisis puramente formalista y literal, al que conduciría la separación del número y los signos analíticos de la cantidad, degradaría esta ciencia natural —que en verdad es una ciencia natural— hasta reducirla a un simple juego de signos, en el que podrían asignarse significados arbitrarios a los signos escritos, como a las figuras de ajedrez o a los naipes de la baraja.//

... Bajo tal interpretación, la inmensa aplicabilidad de la matemática a la mecánica y a la física se convirtió en una notable coincidencia...

... Bertrán Russell llegó a definir la matemática pura como la clase de todas las proposiciones de forma p implica q, reduciendo todas las proposiciones de la matemática a proposiciones de lógica...

... La escuela formalista que se concentró en la tarea de demostrar que la estructura matemática puede obternese por medio de una serie de deducciones hipotéticas tomadas de axiomas no interpretados, no vio a menudo en la matemática nada más que eso, aunque Hilbert, su fundador, vio claramente el contenido real en la forma abstracta... (9)

... La propensión de ciertos matemáticos a sacrificar el contenido a la forma o a considerar su ciencia como separada de la naturaleza, fue —y sigue siendo— parte integrante de un movimiento académico general que encuentra en las concesiones al idealismo, la solución, no sólo de sus inquietudes científicas, sino también de algunas de sus preocupaciones sociales. El hecho de que en ciertos círculos de matemáticos —es decir, aquellos que se interesaban por las cuestiones de fundamentación— existiera una tendencia a cultivar la forma más bien que el contenido y a reducir las matemáticas a un simple esqueleto de proposiciones, fue recibido como una liberación.» (10)

Es fácil entender bajo estos presupuestos, que la separación que se había dado entre la matemática y su función social, condujera a pasar de una hegemonía materialista de la misma a una hegemonía idealista; a pasar de la concepción de la matemática como herramienta de comprensión y transformación del mundo, a la de creación libre de la mente humana, del concepto de verdad matemática que armoniza con la naturaleza, al de verdad como ausencia de contradicción lógica.

Es bajo esta influencia idealista en que se tiene que resolver la crisis de fundamentos y comprender el nacimiento de las escuelas logicistas, formalista e intuicionista.

La lógica junto a la matemática formalizada librarán un pulso sin precedentes a la matemática clásica enriquecida milenariamente por el desarrollo de sus ramas. Este pulso se mantendrá durante tres décadas, con clara posición de ventaja por parte de la corriente idealista, pero después de los resultados de Gödel, la matemática se erigirá triunfante, negándose a ser encasillada por un conjunto de axiomas y unos mecanismos de tratamiento, por muy refinados que estos sean. A pesar de este hecho, las causas sociales que sustentaron la visión idealista de la matemática siguieron impulsando a ésta por la vía formalista, pues paradójicamente este estilo de trabajo se extiende a partir de entonces a todas las áreas de la matemática, inaugurando el segundo período de desarrollo del formalismo cuyo máximo representante será el colectivo Bourbaki. Las consecuencias que esto desencadenó han sido muy notables y se prolongan hasta nuestros días, pero la extensión del tema merecería otro artículo.

Acabemos este escrito con unas palabras muy significativas de Struik, y que se refieren al rol de la matemática:

«La prueba de la verdad en la matemática —su carácter no contradictorio— es la prueba de su aplicabilidad al mundo real. Esta no es una afirmación que pueda probarse como un teorema: la prueba entre idealismo y materialismo no puede decidirse sobre el papel o en teoría, sino que tiene que decidirse también en la práctica de la vida. Los hechos de que la matemática es posible, de que es aplicable a la naturaleza y de que tiene una función social están todos ellos entrelazados...

... Nuestra convicción se basa en el hecho de que los teoremas corresponden a propiedades del mundo real ajenas a nuestra conciencia, las cuales pueden ser probadas y que su comprobación es accesible a todas las personas desde su más temprana juventud...

... La elección de los axiomas en casi todos los tipos de matemáticas actualmente estudiadas estará de acuerdo con ciertas relaciones objetivas. A este respecto, estamos de acuerdo con A. Tarski, quien es, por otra parte, un lógico:

//Así, se escucha y hasta se lee de tanto en tanto que no puede atribuirse ningún contenido definido a los conceptos matemáticos, que en la matemática no sabemos realmente de lo que estamos hablando y que no nos interesa si nuestras afirmaciones son o no verdad. Tales juicios deben ser mirados con desconfianza. Si en la construcción de una teoría nos conducimos como si no entendiéramos el significado de sus términos en esta disciplina, eso no quiere decir de ninguna manera que estos términos carecen de significación... Es de suponer que a nadie le interesaría un sistema formal respecto al cual no seamos capaces de darle una sola interpretación.//

Podemos añadir que hasta la misma subsistencia de los matemáticos como grupo (no necesariamente como individuo) depende del hecho de que la matemática tenga sentido. En caso contrario, en las nóminas de las universidades y escuelas superiores dejaría de haber lugar para ellos. Puede que algunos ricos estuvieran dispuestos a contratar a matemáticos como contratan ahora a jugadores de ajedrez o expertos en bridge, y tal vez otros se interesasen para ayudar a los matemáticos como artistas. No obstante, sabido es que los artistas encuentran pocos protectores bajo el capitalismo, mucho menos que los hombres de ciencias. El papel social constructivo que la matemática jugó en la edificación del capitalismo comercial e industrial fue esencialmente lo que hizo que se fomentara su estudio, aunque tuviera que adoptar formas cada vez más abstractas para llegar a planos más profundos de la realidad.» (11)

---

(9), (10) Struik: *Ib.* Págs. 36/40.
(11) Struik: *Ib.* Págs. 72/73.