hombre que forjó la mente griega y puso de nuevo en vigencia el Humanismo renacentista, con pretensiones de validez para todos los tiempos y para todos los países.

Una dialéctica constante, bien que no explícita siempre, de este módulo filosófico con la concepción cristiana del hombre y del mundo, no ha servido, en la mayor parte de los casos, sino para que esta última se bata en retirada, acusada por los representantes del humanismo greco-latino de inmiscuirse en un terreno donde sólo pueden alzar su voz la "filosofía" o la "cultura", una filosofía y una cultura previamente despojadas de toda significación religiosa, según convenía al giro que el humanismo tomó desde sus orígenes. Nada más falso que la afirmación, pontificada por Emilio Brehier, de que no existe una "filosofía cristiana"; sin embargo, los arrastres "laicos" del cliché cultural griego, casi incólumes a través de veinte siglos de Cristianismo, han difundido por doquier una idea del hombre, un humanismo, en no pocos puntos opuesto a la cosmovisión evangélica.

En los antípodas de este horizonte, pero relacionado con él, el materialismo histórico eleva una nueva fe sin Dios, según la cual el hombre se basta a sí mismo, y para que surja su reino no hace falta más que protegerle contra toda clase de "alienaciones", desde la provocada por la dependencia económica, hasta la debida a las supersticiones "místicas", combatidas por Sartre con un empeño crítico que bastaría para poner pavor en el ánimo de quien intente hacer de la razón una categoría inapelable. (Una razón, claro es, nuda y desangelada.) El que tales construcciones evidencien la indigencia filosófica de nuestra época atormentada no nos releva de la obligación de recusarlas formalmente en nombre de convicciones mejor establecidas.

Del lado de una Filosofía de la Cultura que ahora comienza a ensanchar sus perspectivas, convendría determinar las aportaciones positivas que podemos recibir de humanismos distintos del griego y, a primera vista, inferiores a él. Me refiero al mensaje de Oriente, cada día mejor conocido y que puede aducir algunas matizaciones al concepto y empleo de un "logos" no siempre exento de peligros ni, por consiguiente, sobrado de limitaciones. Es posible que esté aquí, en este "abuso de la razón", la causa primordial de la revisión que el humanismo necesita, al decir de muchos de sus impugnadores. Oriente podría, acaso, poner sordina a la embriaguez de una inteligencia que desearía imperar en única instancia, sorda tanto a los llamamientos de la afectividad (las "raisons de coeur", de Pascal), como a los postulados y derechos de la Revelación.

De cualquier modo, el concepto del hombre da rumbo y tono a la reflexión pedagógica. Si está en crisis la educación no es porque planes nuevos o remendados puedan eliminar o zurcir rasgaduras mucho más hondas, sino porque está virando la idea que el hombre tiene de sí mismo. La crisis del humanismo no tiene otro sentido.

He aquí por qué entiendo, señor Redactor Jefe, que, por encima de cualquier detalle metodológico, convendría entablar un diálogo amplio y sereno sobre las rectificaciones que nuestro tiempo postula en el concepto, acaso excesivamente filológico e intelectualista, que del hombre tenía el humanismo del Renacimiento. Los riesgos y venturas del pensamiento y de la historia en los últimos cinco siglos, ¿justificarán una modificación, una refutación, un enriquecimiento de este venerable canon, formulado cuando el hombre no tenía ante sí los problemas que ahora nos conturban?

Me inclino a afirmar que se trata de uno de los "temas mayores" que la reflexión pedagógica puede abordar hoy. ¿Sería pedir demasiado de usted que este tema se convierta en "cuestión disputada" durante el próximo curso?

Un estudiante de filosofía, Sáenz Bernabé, acertó a señalar, hace unos meses, un asunto que ha dado lugar a notables esclarecimientos. Acogiéndome a su benevolencia, le ruego dispense semejante acogida a mi propuesta, efecto de la turbación que un estudiante de Pedagogía experimenta ante el panorama que el pensamiento actual ofrece a quien desea hacerse luz sobre los problemas educativos esenciales.

Con mi gratitud, es de usted affmo. amigo,

R. VICENTE SEPÚLVEDA.

estudios

Matemática, Historia, Enseñanza y Vida*

HÁGASE LA LUZ...

Acabo de pulsar un botón para dar luz a mis cuartillas. He aquí un acto inconsciente de los muchos que realizamos todos los días sin preguntarnos cómo se obra el "milagro" de que la luz responda a nuestra llamada.

Si en tiempos de Grecia, o todavía en los más modernos del Renacimiento, alguien se hubiese atrevido a pronosticar la posibilidad de tal hecho, o de los más "milagrosos" aún: ver desde Atenas los juegos celebrándose en Olimpia, oír desde el mundo entero la voz del Papa..., a buen seguro que sus contemporáneos le hubiesen aislado por loco, o quemado vivo por hereje. Y sin embargo vivimos estos milagros y estamos tan familiarizados con ellos que ya no nos sobrecogen. Repetimos su realización todos los días sin más que eso: pulsar un botón distraídamente.

Tales "milagros" han sido ciertamente obra de siglos; obra a la que han aportado su remota contribución tanto Grecia como el Renacimiento, como la humanidad entera en todas las épocas de floración

* *Conferencia dada el 13 de diciembre de 1957 en el Aula Magna de la Universidad de Valladolid por don* PEDRO PUIG ADAM, *catedrático de Matemáticas del Instituto de San Isidro y consejero de redacción de esta Revista, con motivo de la clausura del cursillo de Metodología de las Matemáticas, organizado por las Escuelas del Magisterio de dicha ciudad.*

del pensamiento; porque es obra de esencial fecundación matemática.

Si comparamos las condiciones de vida de la humanidad hasta el siglo XVIII con las de ahora, si se piensa que todavía un Newton, un Leibniz hubieron de escribir sus obras a la luz de candiles como los griegos, de viajar como éstos arrastrados por fuerza animal, de vivir, en definitiva, en condiciones que no diferían grandemente del confort que pudieran tener las más grandes civilizaciones (griega, egipcia, babilonia), nos daremos cuenta de que es precisamente del cálculo infinitesimal, creado por ellos, de donde arranca la domesticación de las fuerzas naturales por el hombre, hasta traerlas y llevarlas en ayuda de su comodidad y bienestar.

Pulsando botones y palancas.

Pulsando botones y palancas nos iluminamos hoy, nos desplazamos con rapidez vertiginosa, transmitimos mensajes, oímos voces y vemos imágenes lejanas y aún volvemos a reproducirlas a largo plazo a tenor de nuestras apetencias evocadoras. Pensemos que todo ello no sería posible si las correspondientes técnicas de realización no hubieran apoyado en una fuerte osamenta matemática.

El simple hecho de que en las dos bornas del enchufe de esta lámpara exista a mi disposición una diferencia de potencial eléctrico dispuesta a convertirse en energía de distinta clase (luminosa, calorífica, mecánica, acústica...) según el aparato que a él conecte (lámpara, estufa, ventilador, radio...), es ya el resultado de un largo proceso de almacenamiento y transformación que, iniciado en los embalses o calderas, en las turbinas hidráulicas o de vapor, se continúa en los alternadores, en las líneas de alta tensión, en las redes de baja, y en las estaciones transformadoras de origen y término.

La realización de tales ingenios no sólo ha exigido una larga y paciente experimentación de medios y materiales, sino también la penetración profunda en las leyes cuantitativas de los fenómenos físicos que en ellos tienen lugar. Sólo así han podido proyectarse en forma de que respondiesen a las óptimas condiciones de economía, perfección y rendimiento.

Las entrañas matemáticas del "milagro".

Pero para ello ha habido que esperar a que la Ciencia exacta estuviera en sazón, es decir, en condiciones de suministrarnos el instrumental matemático de ataque preciso. Así resulta que los cálculos que implica hoy el proyecto de una presa, de una central, de una turbina, de un transformador, de una línea, de una red, de un sistema de interconexiones..., están tan erizados de matemática superior que los mismos Newton, Leibniz, Gauss..., iniciadores de las teorías matemáticas sobre las que se apoyan, tendrían un poco trabajo en entenderlos si resucitaran.

Basta pensar, por ejemplo, en el planteamiento de la transmisión en líneas mediante la ecuación en derivadas parciales llamada de los telegrafistas; en la utilización sistemática de funciones hiperbólicas en el campo complejo para el estudio del régimen permanente; en el uso de la transformación de Laplace para la integración de los sistemas de ecuaciones diferenciales a que da lugar el difícil tratamiento matemático del régimen transitorio (del que puede depender la inutilización de una instalación en un momento de sobrecarga accidental); en los complejos fenómenos termodinámicos y de mecánica de flúidos que hay que formular para estudiar el funcionamiento de una turbina y para proyectar la forma más adecuada de los álabes; en la esquematización matemática cada vez más compleja de los servomecanismos que intervienen en la autorregulación de una central, en las bases matemáticas necesarias para un estudio estadístico del consumo o del control de calidad en la fabricación, por ejemplo, de bombillas como la que me alumbra, etc., etc.

Pues bien, en todo este vasto panorama de teorías y aplicaciones matemáticas y en otras muchas que para no cansarles me dejo a sabiendas sin desplegar, se funda la posibilidad teórica del hecho de que al pulsar este botón, un haz haya iluminado instantáneamente mis cuartillas.

Y he querido partir precisamente del hecho corriente e intrascendente de encender un portátil para que, al comentarlo, surgiera aquí, desde el primer momento, en un plano consciente, el trascendental tributo que nuestro confort actual debe a la matemática.

Una reina y sirvienta incomprendida.

Toda nuestra vida de hoy está sumergida en ella. De puro esencial en nuestro vivir no percibimos la sumisión con que nos sirve y la autoridad con que al mismo tiempo nos gobierna. Sin embargo, la inmensa mayoría de las gentes sigue creyendo que nuestra ciencia es un juego poco menos que inútil al que se dedican cerebros soñadores, inadaptados a la realidad, elaboradores de quimeras en su torre de marfil. El vulgo sigue teniendo de las matemáticas el mismo concepto que la vieja de la anécdota griega, que al ver a Thales de Mileto caerse a un foso mientras contemplaba el firmamento, le increpó diciendo: ¿Cómo pretendéis enseñarnos lo que pasa allá arriba si no veis siquiera lo que se halla a vuestros pies? La vieja de tal leyenda no podía, naturalmente, prever que el conocimiento del movimiento de los astros permitiría siglos después guiar a los navegantes para descubrir nuevos continentes. Claro es que sobre éstos se cebaría pronto la codicia de los aventureros y traficantes de ultramar, hombres "prácticos" que sin duda seguirían burlándose de los esfuerzos que habían hecho posible el descubrimiento de las riquezas con que traficaban. La carencia de perspectivas en el pasado y en el futuro, con que ordinariamente se actúa y se critica, es pecado de incomprensión que nosotros los incomprendidos debemos ser los primeros en perdonar, pero también en combatir.

Por esto, los que nos dedicamos con fervor a la enseñanza de nuestra Ciencia, hemos de imponernos como una de nuestras misiones, en cátedra y fuera de ella, la de hacer ver a nuestros alumnos primero y al cuerpo social después, hasta qué punto está concertada nuestra vida con la Matemática, despertando así a las gentes de su error el creernos forjadores de sueños estériles.

Dentro de esta línea intencional está concebida esta charla, que con placer he preparado a requerimientos de mis queridos amigos los profesores Salas e Ibarra, que tanto se desvelan y contribuyen a la mejora de métodos de enseñanza matemática en nuestra Patria, como lo prueba la organización de este magnífico Cursillo. Me considero muy honrado al ser invitado a participar en su clausura y creo que el tema de esta mi charla tal vez venga a propósito, no solamente como apología de lo que nuestra vida actual debe a la Matemática, sino también por las consecuencias didácticas que han de deducirse de dicho balance apologético en orden a la necesaria evolución de programas, métodos y modos de enseñar nuestra Ciencia.

Escuela y vida.

Las humanidades de hoy ya no son las de antaño No preparamos a nuestra juventud sólo para vivir el recuerdo de nuestro pasado, ni mucho menos para que lo reciten sin revivirlo ante unos examinadores ocasionales. Preparamos a nuestros alumnos para el mejor cumplimiento de su misión futura. Para el examen definitivo de la vida. Para la vida eterna ante todo, pero también para esta vida presente que nos ha tocado vivir, tan llena de miserias como de maravillas.

Como profesores no podemos, pues, situarnos de espaldas a la realidad vital que nos circunda y avasalla, y menos nosotros, los profesores de Matemáticas; porque la Matemática, pese al grado de abstracción a que ha llegado, nació de la vida misma. Tomó su impulso inicial a ras de tierra, como los satélites artificiales que, desprendidos de ella, la están viendo ya tan empequeñecida. ¡Y pensar que fué la simple caída de la manzana y el liberador impulso de la honda lo que sugirió la ecuación matemática que ha permitido el lanzamiento de estos modernos proyectiles a tal distancia que ya no encuentran lugar donde caer! Parece como si la tierra se les hiciera tan pequeña que hubieran de darle muchas vueltas para posarse, como el perro que se acurruca en espiral en busca de una postura con que dormirse a nuestros pies.

También la Matemática se ha elevado enormemente luego de haber nacido en sencilla cuna junto al suelo. Tanto se ha elevado ya, que nosotros mismos, sus cultivadores y enseñantes, hemos terminado por olvidarnos de su origen modesto, como si nos avergonzáramos de él. Pecado grave de orgullo, de funestas consecuencias para la enseñanza. Volvamos con humildad la vista a dicho origen para darnos cuenta de cómo pudo surgir el pensamiento matemático en el hombre y de cómo se fué desarrollando a tenor de sus propias necesidades. Tal vez así nos daremos mejor cuenta de los errores que cometemos al presentar a nuestros alumnos la Ciencia como algo acabado y definitivo, sin darles oportunidad alguna para que vivan ellos mismos su elaboración.

Los orígenes del conocimiento matemático.

Es difícil saber cuáles fueron los conocimientos matemáticos inicialmente elaborados por el hombre. Los documentos primeros que la historia de la Matemática consigna son escritos egipcios sobre tiras de papiro o signos babilonios grabados sobre ladrillos. Suponen civilizaciones ya tan avanzadas como para disponer de un lenguaje escrito con el que transmitir y perpetuar su cultura. Estos escritos nos hablan de notables conocimientos sobre fracciones, sobre sistemas de numeración sexagesimal vinculados a cálculos astronómicos, de raíces cuadradas aplicadas a problemas de Geometría... Reflejan, pues, una organización embrionaria de conocimientos matemáticos, pero no nos informan sobre cuáles fueron las actividades matemáticas primitivas de la humanidad. Quizás fueran éstas geométricas o topológicas antes que aritméticas. Sorprende, por ejemplo, la geométrica perfección de las vasijas de arcilla de civilizaciones muy anteriores a la egipcia y babilonia; y, volviendo la vista a las tribus que aún hoy viven en estado primitivo, vemos que estos pueblos tejen, trenzan, es decir, aplican actividades topológicas; se ordenan en sus danzas, construyen chozas de perfecta geometría, mientras carecen todavía de un sistema escrito o hablado de numeración. Su lenguaje dispone de muy pocas palabras con las que referirse a los primeros números; todos los demás se designan con un término "muchos". Quizás sea ello índice de dicha y armonía.. En vida de naturaleza pródiga y comunidad perfecta no parece muy necesaria la operación de contar. ¿Para qué? Si el fruto está siempre a mano y lo de uno es de todos, ¿a qué discriminar cuánto tiene cada cual?

Pensando en ello he insinuado en otra ocasión que la aritmética pudo nacer del instinto de propiedad, cuando no del de previsión. Me imagino que el afán de conservar lo suyo llevaría al hombre a simbolizar sus rebaños mediante piedrecitas (cálculi) o mediante trazos marcados en los troncos de los árboles. Sin duda transcurrirían miles de años antes de que estos conjuntos se representaran mediantes palabras o signos numéricos. Pero ello no significa que no se ejercieran ya actividades matemáticas. La sola acción representativa de unos conjuntos por otros más simples (rayas, piedras) supone ya una abstracción, una *esquematización;* y es, por tanto, una auténtica actividad matemática.

La Ciencia de los esquemas.

Sin posibilidad de dar una definición exhaustiva de la Matemática, propuse en ocasión lejana presentarla precisamente así: como la "Ciencia de los esquemas". Se me pedían unas líneas para una colección de autógrafos sobre el mundo infantil, y he aquí lo que escribí: "Quiere saber el niño cómo anda el juguete recién comprado y sus dedines no paran hasta reducirlo a un montón de resortes, de ruedas, de piezas de hojalata. No le riñáis. Esta bendita curiosidad le llevará algún día a querer penetrar los secretos del mundo, de la civilización en que vive. Los científicos son grandes niños que escudriñan en sus laboratorios los maravillosos juguetes que el mundo natural ofrece a su curiosidad. Hurgando, hurgando, pasan del mundo de las cosas al mundo de los esquemas, y al arte maravilloso que estudia su belleza y su trazado: la Matemática."

Casi sin darme cuenta había propuesto una definición de Matemática que reflejaba el papel fundamental de esta ciencia en el estudio de los fenómenos naturales, así como la realidad de su origen vinculado a la vida misma y a sus problemas .El hombre primitivo, al designar cada una de sus ovejas por un trazo en el tronco de un árbol, como al representar mucho más tarde su terreno por un polígono en un papiro, empezó a hacer matemáticas, precisamente porque empezó a abstraer, a esquematizar, a simbolizar. Y con esta palabra "esquema", empleada en su doble sentido estricto y metafórico, podemos darnos cuenta del papel esencial que la Matemática ha desempeñado en el progreso humano.

Papel de la matemática en la filosofía natural.

El hombre, en un principio, impotente ante la inmensidad de las fuerzas naturales y atónito ante la complejidad de los fenómenos que a su alrededor se desarrollaban, se limitaba a observar, a comparar, a asociar. Más tarde experimentó por su cuenta, es decir, promovió fenómenos similares en condiciones más favorables para su estudio. "Hurgando, hurgando", coleccionó observaciones y experiencias y, luego de ordenarlas por afinidades, halló leyes comunes a fenómenos semejantes. Para descubrir tales semejanzas hubo de abstraer, es decir, hubo de prescindir de caracteres accesorios para atender a los esenciales en cada estudio, reduciendo la complejidad de las cosas reales a la sencillez de unos entes idealizados esquemáticos. Ello le permitió descubrir por inducción leyes simples; establecer con ellas sistemas hipotético-deductivos y tejer consecuencias, con las que predecir resultados de experiencias no efectuadas. De la predicción a la técnica no quedó más que un paso meramente intencional: proyectar para precaverse de aquellas fuerzas naturales y conducirlas más tarde para su provecho.

Con esto se ve clara la razón del por qué el enorme progreso de nuestras condiciones materiales de vida en siglo y medio escaso, es decir, desde Lagrange, Laplace, Gauss, a nuestros días, coincide con el desarrollo vertiginoso del análisis matemático. No se trata de una simple casualidad histórica, como no lo es el hecho de que los países de técnica más avanzada sean asimismo los de Matemática más pujante. Toda creación en el orden técnico supone la posibilidad de proyectar, es decir, de lograr previsiones teóricas, y por tanto, la creación de estructuras científicas en qué apoyarlas. En el doble juego inductivo-deductivo que las engendra desempeña la Matemática su papel fundamental.

Tras las esquematizaciones o abstracciones primeras, el hombre comprueba las consecuencias del sistema hipotético deductivo que sobre ellas ha montado, proyectando nuevamente al campo de la realidad los resultados suministrados por el mecanismo lógico abstracto. El ajuste o desajuste de tales consecuencias, de tales previsiones, a los hechos reales, le permitirá comprobar "a posteriori" la validez de la estructura esquemática representativa del complejo fenoménico estudiado.

Primer principio fecundador de la enseñanza matemática. Arranque genético vitalista.

Vemos, como primera consecuencia didáctica de esta génesis de los conocimientos matemáticos, que el mero juego deductivo cultivado por la enseñanza matemática tradicional, no basta para suministrar una formación matemática completa. Reducirse a cultivar en el alumno sus facultades lógicas, como así se decían, entendiendo por tal actividad lógica el puro y simple juego de implicaciones a partir de principios abstractos ya elaborados, era como mostrarles el funcionamiento de un mecanismo en vacío, desconectando la matemática del mundo físico, en el que ha tenido su auténtico origen. No se cultiva el modo de pensar abstracto dando las abstracciones hechas, sino educando a hacerlas, y en este parto del *sustratum* matemático de los fenómenos, de poco o nada nos sirve ya la lógica aristotélica. Necesitamos practicar una lógica mucho más compleja, en la que juega un papel decisivo la intuición de lo esencial.

Cultivemos, pues, dicha intuición. Es preciso que el alumno se adiestre en formar las abstracciones partiendo de situaciones concretas y sugerentes. Y es igualmente importante que se ejercite en proyectar los resultados del mecanismo lógico abstracto, interpretándolos en el mundo real y sensibilizando así el sentido de verosimilitud que tanto falta a nuestros escolares. La ausencia del cultivo de dichas dos fases, anterior y posterior a la puramente deductiva, ha sido una de las más acusadas causas del fracaso de la enseñanza abstracta tradicional. Sus estragos no pueden remediarse con la adición "a posteriori" de ejercicios de aplicación. Es en la génesis misma del conocimiento matemático donde tiene que estar presente la realidad si queremos que la matemática tenga desde su origen un rico contenido vital.

Resumiendo en pocas palabras la consecuencia primera de este análisis histórico de la creación matemática, diremos: La Matemática nació de la vida y para la vida; demos, pues, también a nuestra enseñanza matemática un constante arranque genético y una constante proyección vital. Y continuemos ahora nuestro análisis evolutivo.

LAS AMAS DE CASA DE NUESTRA CIENCIA.

Toda la Ciencia ha experimentado el mismo proceso de génesis y desarrollo basado en el citado doble juego inductivo-deductivo que ha hecho posible el ascenso a las leyes simples y la predicción posterior de leyes complejas. La misma matemática no se ha librado de tal proceso. Su origen es tan empírico y experimental como pueda serlo el de cualquier ciencia físico-natural. Lo que ocurre es que la elaboración experimental necesaria para intuir sus principios o axiomas fundamentales es tan breve que se nutre de observaciones realizadas y almacenadas inconscientemente durante la más tierna infancia. Y así, la infancia de la humanidad, que abarca la prehistoria y la historia antigua, acumularon el material empírico sobre el que asentó la sistematización matemática griega, efectuada tres siglos antes de Jesucristo.

Los griegos, al ordenar y sistematizar deductivamente la Aritmética y la Geometría, fueron como las primeras amas de casa de nuestra querida Ciencia. La transmisión de conocimientos matemáticos se facilitó mucho con las bellas síntesis de la escuela griega y los famosos Elementos de Euclides fueron durante siglos el libro de texto único en el que aprendió matemáticas la humanidad entera hasta la Edad Media. Pero creo que, como paradójica contrapartida, contribuyeron estos Elementos poderosamente a colapsar el progreso matemático durante todo este período.

La razón es fácil de entender. La Ciencia ha tejido deductivamente sus sistemas después de largos procesos analíticos e inductivos, los cuales quedan ya completamente disimulados y subvertidos en la presentación sintética de ella.

TRANSMISIÓN Y GÉNESIS.

Tal presentación resulta, pues, hipócrita en sí misma, y antiformativa, ya que suministra urdimbres confeccionadas sin enseñar a urdir, que es lo educativo. Las síntesis perfectas, como la euclídea, han acentuado, pues, sin proponérselo, la separación entre dos procesos que en la enseñanza no debieron haberse divorciado nunca: el de la *génesis* de los conocimientos y el de su *transmisión;* y así, para que surgieran nuevos progresos en el campo de la Aritmética fué preciso que el genio árabe combinara el aliento vital de los problemas indios con el método reductivo de los griegos, ideando el Algebra, ciencia reductiva por excelencia. Y fué asimismo preciso que el Renacimiento desenterrara y tradujera las obras de Arquímides, de Apolonio, menos sistemáticas que la euclídea, pero mucho más sugeridoras, para que progresara la Geometría, a impulsos de aquel lejano estímulo explorador.

SEGUNDO PRINCIPIO FECUNDADOR. PRESENTACIÓN EURÍSTICA.

Este hecho histórico nos suministra, pues, provechosa lección, base de otro principio didáctico fecundador: No pretendamos educar matemáticamente a la juventud limitándonos a transmitirle, ordenadamente, los conocimientos que nos han sido dados. Procuremos que sea el alumno mismo quien los elabore. Por elevada que sea la autoridad de su maestro, difícilmente toma el alumno interés por asimilar síntesis en cuya gestación no ha tomado arte ni parte. Lo que se aprecia y asimila de verdad no es tanto lo que se recibe como lo que se conquista. Y si la actividad es una necesidad vital del niño, en el caso del aprendizaje de la matemática es además una necesidad epistemológica. Todo concepto matemático descansa en una acción generadora del mismo, acción efectiva o imaginada, exterior o interiorizada. No hay concepto matemático que no derive de una acción. Así, la idea del número nace al coordinar conjuntos. La noción de medida nace de operaciones comparadoras. Los conceptos topológicos derivan de relaciones de situación (salir, entrar, estar entre), los conceptos geométricos surgen de transformaciones realizadas en las figuras (movimientos, simetría, semejanza, equivalencia, etc.). El álgebra moderna no es más que el estudio de una dinámica relacional en la que la relación tiene más importancia que lo relacionado.

Si, pues, la acción es palanca poderosa en la enseñanza de todas las disciplinas, en matemáticas más que palanca es una necesidad de carácter creador, eurístico, es decir, en un sentido de acción descubridora. El maestro no debe, pues, asumir el papel de centro transmisor de conocimientos, sino de guía del aprendizaje de sus alumnos; aprendizaje estimulado por situaciones interesantes y sugeridoras de las ideas que se desea inculcar. El maestro, más que parecerse a un conferenciante, debe convertirse en un auténtico maestro de taller; no debe adoptar una actitud *frente* a sus alumnos, sino *al lado* de ellos, casi mejor diría *suavemente detrás* como observador y consejero afectuoso de su trabajo y de su esfuerzo. Y no tanto con el propósito de aliviar dicho esfuerzo como de promoverlo, de despertarlo, actuando de manera que sea deseado.

ENTRA LA PEREZA EN ESCENA.

Y volvamos otra vez al hilo de la historia. Hemos presentado al pueblo árabe como creador del Algebra, la cual nace con objeto de automatizar la solución de los complicados problemas de herencia, a los que eran tan dados. Esta mecanización algebraica del razonamiento aritmético supone la entrada en escena de la pereza como personaje histórico. paradójicamente estimulante del progreso. Todos sabemos cuántos ingenios han ideado los hombres para liberarse del esfuerzo muscular. Pues bien, la invención del Algebra supone en un plano espiritual un desplazamiento parecido de esfuerzos mentales que, al pasar del difícil plano de elaboración consciente al de un automatismo formal, supusieron asimismo un ahorro de fatiga intelectual extraordinario.

PELIGROS DIDÁCTICOS DEL AUTOMATISMO.

Pero esta formalización, que ha sido interesantísima y fecunda en la historia de la humanidad, liberándola de esfuerzos que quedaron así disponibles para nuevas conquistas, resulta contraproducente anticiparla en el proceso educativo del alumno. Cuando la automatización de un proceso antecede al dominio del mismo se incurre de nuevo en el pecado de subversión genética de los conocimientos; pecado que se paga caro, porque crea en el alumno una rigidez mental devastadora desde el punto de vista pedagógico. Y con esta observación, quede consignada una nueva consecuencia didáctica que estimo de interés.

Ordenación lineal y ordenación cíclica.

Otras más se me ocurre aún como nota ocasional adecuada al momento histórico en que nos hemos detenido. Los griegos organizaron, como he dicho, deductivamente la Aritmética y la Geometría. Unos siglos después crean los árabes el Algebra y también la Trigonometría. Los programas tradicionales de bachillerato, que estudiábamos a comienzos de siglo, parecían de está suerte concebidos como siguiendo linealmente la gestación cronológica de tales materias, convertidas en asignaturas por separado. Pero al disponerlas asimismo linealmente en años sucesivos, en los cuales la inteligencia del alumno evoluciona rápidamente, se vulneraban las leyes de su desarrollo.

Porque la Aritmética y la Geometría elaboradas por Euclides, lo mismo que el Algebra y la Trigonometría elaboradas por los árabes y enriquecidas por el lenguaje simbólico de Vieta, tenían cada una de por sí un grado de madurez incompatible con el desarrollo intelectual del niño, sobre todo en los primeros años del Bachillerato. Se olvidaba que Euclides no escribió sus Elementos para uso de niños de once o doce años; y estos niños, con más sentido común que científico, repudiaban lógicamente (en su lógica infantil, claro es) la superlógica del adulto que se cree obligado a demostrar verdades evidentes reduciéndolas a otras que no lo son más.

El prurito de presentar nuestra Ciencia estructurada al modo clásico, en unidades lógicas creadas a lo largo del proceso indicado, hubo de ceder paso a la exigencia psicológica impuesta por la evolución infantil. Y así surgió el método *cíclico* de programación, que en lugar de correr radialmente y por separado los referidos sectores del conocimiento matemático, los organiza en ciclos de ampliación concéntrica, a través de unidades de concepción funcionales que vengan a sustituir las unidades lógicas clásicas.

Los orígenes del cálculo infinitesimal.

Y en marcha otra vez a lo largo de los siglos, no ha de causarnos extrañeza que, después de la algebrización de la Aritmética, llegara un día en el que también la Geometría cayera bajo las garras del Algebra. Fué, como sabéis, el siglo XVII el que alumbró en los genios de Descartes y Fermat la esquematización analítica del espacio, fundiendo los conceptos de ecuación y de lugar.

Un paso más y el problema de las tangentes habia de dar origen a un operador analítico nuevo: la derivada, obtenida combinando la sustracción y la división con el paso al límite; mientras el problema del área daba nacimiento al concepto de integral, como límite continuo de una suma. Barrow, profesor que fué de Newton, al descubrir más tarde el carácter inverso de estos dos operadores, cerraría la clave del arco que había de sostener el potentísimo instrumento del cálculo infinitesimal. Iniciado simultáneamente éste por Newton y Leibniz, se desarrolló con rapidez inverosímil a impulsos de la Mecánica primero y de la Física toda después.

Simbiosis entre la matemática y el mundo físico.

Es emocionante y aleccionador el fenómeno de simbiosis entre la Física y el Análisis que a lo largo de todo este proceso se ha producido. Problemas concretos pidiendo su esquematización analítica. El análisis ideando esquemas precisos para abastecer tal demanda. Pero inmediatamente el genio generalizador del matemático combinando, tejiendo y proliferando esquemas nuevos, por puro juego investigador abstracto. Y estos nuevos esquemas hallando posterior aplicación a nuevas demandas de la Física y de la Técnica. Así, en esta carrera, en la que tan pronto la creación abstracta ha ido por delante de las necesidades de la Filosofía natural como ha tenido que acelerar su marcha a empujones de ella, se ha llegado al exuberante florecimiento científico de los siglos XIX y XX. Tan reciente es todo ello que aún nos parece sentir en nuestra carne la vibrante emoción de las generaciones científicas que nos han precedido y a ver, por ejemplo, confirmada por las experiencias de Herz, la existencia de ondas electromagnéticas teóricamente descubiertas *en el papel* por Mawell veinte años antes, o la enorme alegría del astrónomo Galle al comprobar con su telescopio la existencia de un nuevo planeta: Neptuno, en el lugar pronosticado por Leverrier, que venía persiguiéndolo sobre sus cuartillas durante largos meses de cálculo.

Pero en nuestros mismos maravillosos y azarosos días, ¿no es portentoso ver confirmada con la aterradora y potente realidad de los ingenios atómicos la inverosímil relación entre masa y energía hallada en los campos más abstractos de la teoría de la relatividad?

Un ejemplo lineal retrospectivo. De Einstein a Thales.

Si partimos de cualquier punto teórico actual y retrocedemos según el hilo histórico que a él conduce, hallaremos ejemplos a granel de la simbiosis aludida entre la matemática y la filosofía natural. Sin ir más lejos, la misma teoría de la relatividad, de la que acabamos de hacer mención, tiene como instrumento matemático expresivo el cálculo diferencial absoluto, hermanado a la teoría de variedades dimensionales, cuya curvatura investigó Riemann a media-dos del siglo XIX, generalizando los estudios de Gauss a principios del mismo siglo sobre curvatura intrínseca de superficies. La línea histórica que confluye en Einstein llega, pues, con orden cronológico inverso a través de Ricci y Levicivita (creadores del cálculo diferencial absoluto), de Riemann y Gauss.

Pero si continuamos la cadena causal retrospectiva y nos preguntamos qué pudo decidir a Gauss a estudiar intrínsecamente las superficies, nos daremos pronto cuenta de que éste vivió en la época de las mediciones de los arcos de meridiano, época en la que el estudio del geoide terrestre respondía a una necesidad de orden técnico derivada del establecimiento del patrón "metro" y del deseo internacional de vincularlo a nuestro planeta. Se comprende, pues, que el príncipe de los matemáticos, como le llamaban en su época, abordara el estudio general de la curvatura de una superficie, relacionándola con las medidas de arcos que unos seres inteligentes pudieran obtener sobre ella. Pero, a su vez, el establecimiento del sistema métrico decimal no fué un capricho, sino otra necesidad internacional. La de uniformar las medidas en las ya complejas transacciones comerciales que el incremento de las comunicaciones con ultramar había promovido. El descubrimiento de América, efectuado pocos siglos antes, había creado la necesidad de mejorar la navegación de altura y de resolver concretamente el problema de la situación de buques en alta mar. Ello obligó, de un lado, a perfeccionar la construcción de cronómetros para poder resolver el problema de la determinación de longitudes (por comparación de horarios astronómicos locales), y de otro, la técnica de anteojos y sextantes para la determinación de latitudes. Pero estas técnicas se nutren de la dióptrica, con lo que aludimos nuevamente a Descartes, y de patrimonios más antiguos, como son la Trigonometría y la Astronomía esférica; con lo cual, retrocediendo paso a paso, volveríamos a cruzar la civilización árabe y a la escena de Thales, distraído contemplando las estrellas, y a la vieja, burlándose de él.

MIRANDO AL FUTURO: ENERGÉTICA Y CIBERNÉTICA.

Y si, por el contrario, partiendo del cálculo diferencial absoluto y de la teoría de la relatividad, seguimos la línea de su entronque posterior con la mecánica cuántica y la física nuclear, llegamos a los días presentes, en los cuales la humanidad prevé que se le agoten las ricas reservas de combustible que ha alimentado su industria durante los dos últimos siglos (hulla y petróleo) y considera aprovechadas asimismo casi todas las fuentes rentables de energía hidráulica (obra de éste) y en consecuencia busca nueva e inagotable fuente de energía en la propia materia. Búsqueda que desemboca primero, y al calor de corrientes de odio, en la transformación monstruosa y desordenada producida en la bomba atómica, pero que en tiempo de paz se pretende dominar encauzando y vigilando sus procesos concienzudamente. Esta tarea de vigilancia y regulación, altamente delicada, confíase a servomecánicos de muy compleja estructura. Y surgen así las dos grandes técnicas del presente y del mañana: la energética y la cibernética. Para una y otra ya no es suficiente el instrumento del cálculo infinitesimal que dominó la física matemática del siglo pasado. Ha sido preciso idear nuevas abstracciones, nuevos esquemas, que se mostraran más ágiles, más manejables para el tratamiento matemático de tales técnicas. Citaré al paso, para no cansarles, sólo algunos títulos: matrices, finitas e infinitas, espacios de Hilbert, teoría de operadores, cálculo operacional, estadística matemática y probabilidades...

LOS CEREBROS ELECTRÓNICOS Y SU FISIOLOGÍA MATEMÁTICA.

Los largos y complejos cálculos que tales técnicas exigen han aguzado el ingenio de la raza humana para buscar en la máquina no sólo el alivio al esfuerzo muscular, como en los siglos antecedentes, sino también a los esfuerzos mentales que por su naturaleza automática puedan reducirse a reflejos condicionados, es decir, a respuestas fijas en correspondencia con estímulos determinados. Y entre tales ingenios se hallan los llamados "Cerebros electrónicos". La matemática que regula las entrañas de tales celebros es ya una matemática de circuitos que tiene más carácter cualitativo que cuantitativo, y que ofrece otro ejemplo impresionante de la simbiosis entre la matemática y el mundo físico. Tuve ocasión de vivir este ejemplo personalmente tras una conferencia de Aiken (el constructor avanzado de tales ingenios en EE. UU.), al comprobar que la artificiosa álgebra que empleaba para manejar formalmente los circuitos electrónicos, haciendo un uso "sui géneris" de los signos algebraicos usuales, no era en el fondo más que aquella álgebra que el matemático inglés Boole ideó hace más de un siglo para esquematizar ciertas operaciones lógicas entre clases o proposiciones. Y caí en la cuenta de ello tratando de investigar directamente las leyes formales que en definitiva jugaban en las relaciones de conexión de tales circuitos: álgebra binaria cuya coincidencia de leyes con la de clases me maravilló. Posteriormente supe que no era yo el primero en hacer aplicación de dicha álgebra a circuitos, ya que Shanon y otros lo habían hecho con anterioridad para los circuitos ordinarios.

INVASIÓN Y ECLOSIÓN DE LA MATEMÁTICA ACTUAL.

Pero ya no es solamente en el mundo físico natural donde la Matemática juega hoy su papel de reina y sirvienta. Poco a poco va penetrando asimismo, con paso lento y seguro, en los secretos del mundo psíquico y del mundo social. Citaré solamente tres ejemplos elocuentes: primero, la aplicación de la teoría de matrices y vectores multidimensionales al problema de la discriminación de aptitudes, y tratamiento matemático de los tests empleados por la psicología experimental (la tal psicología de aptitudes y el análisis factorial en que se apoya, es ciencia incipiente que tiene en España un avanzado investigador en Mariano Yela, uno de los más brillantes discípulos que he tenido en San Isidro); segundo, la teoría de la información, fundada en un isomorfismo entre la desorganización estructural de los signos de un mensaje perturbado y la agitación molecular de un gas, lo que permite medir la cantidad de información de un mensaje según un símil entrópico al modo como la entropía se evalúa en mecánica estadística; y, finalmente, la moderna teoría del juego estratégico y su aplicación a los complejos fenómenos económicos.

Para no cansarles, dejo deliberadamente sin mención las innúmeras aplicaciones de la estadística matemática a los diversos campos de actividades profesionales (aplicaciones ya tratadas en este cursillo), así como las tan notables del análisis matemático a problemas de biología, de programación lineal, etcétera, etc. La lista sería interminable.

Su desnudez esquelética y su multivalencia.

La eclosión matemática de los dos siglos anteriores fué gigantesca; hizo posible toda la técnica hasta la segunda guerra mundial. Pero el desarrollo matemático del presente siglo, estimulado por los alucinantes problemas de ataque y defensa de la segunda guerra, cristalizados en las modernas teorías del átomo y cibernética, dejará acaso minúscula la eclosión anterior. Por de pronto la matemática naciente está adquiriendo una fisonomía propia característica. La fisonomía formalista, tan opuesta a la metafísica de los orígenes del cálculo infinitesimal. La demanda de posibles esquematizaciones es ya tan grande que el matemático carece de tiempo que perder en hurgar esencias. Prefiere crear estructuras relacionales *bien definidas* entre conceptos *indefinidos*, a los cuales se dará carta de naturaleza matemática tan sólo con que cumplan la legislación que los gobierna. Esquemas muchos de los cuales (grupos, anillos, cuerpos, ideales...) constituyen el andamiaje común de teorías procedentes de los más variados campos, y que, al ser desnudadas de su ropaje concreto, han aparecido con el mismo esqueleto abstracto; pero también muchos otros esquemas que la fantasía del matemático crea libremente sin más trabas que la no contradicción de sus leyes. Esquemas estos últimos que, de momento, carecen de interés concreto, pero a los cuales no podemos negar la posibilidad de adaptación futura a entidades físicas que puedan hallar en ellos su molde adecuado, como así ha ocurrido en el ejemplo citado del álgebra de clases, creada por Boole hace cien años, tan "in abstracto" como "fuera de siglo".

Nuestra amada Ciencia de los esquemas ha sido, pues, despojándose en tal forma de sus primitivos ropajes concretos, que, ascendiendo según planos de abstracción y simbolización crecientes, ha terminado desnudándose a sí misma de contenidos conceptuales, hasta organizarse en los puros esqueletos pragmáticos que constituyen las estructuras matemáticas de hoy. En su misma desnudez aparente radica su multivalencia, es decir, sus posibilidades de adaptación y, por ende, su paradójica fecundidad. La ley ha desplazado al concepto; la cualidad, al número. Aunque nos cause asombro, hemos de reconocerlo así. Un fenómeno del momento histórico en que vivimos. Cada época tiene su técnica, así como su filosofía acorde y su lenguaje matemático adecuado.

De un lado, el mundo físico con sus métodos de observación cada vez más precisos y quizá por ello mismo suministrándonos aparentes paradojas que nos llenan de perplejidad. De otro lado, el mundo de nuestras abstracciones, de nuestros esquemas, espejismo acaso de nuestras propias estructuras mentales. Toda teoría físico-matemática no es en el fondo más que un puente tendido entre ambos mundos. A veces hace falta tender más de uno, y entonces hablamos de dualidad del mundo físico. ¿No sería más justo hablar de dualidad de esquematizaciones?

Renovarse es vivir.

Señores, hay interrogantes que invitan a terminar. Pero ¿cuál debe ser en el orden didáctico la última consecuencia que debemos extraer del deslumbrante panorama expuesto? ¡Una vigorosa señal alerta! Cuando la matemática, en conexión con la vida toda, evoluciona a tal ritmo, su enseñanza, que, como hemos dicho, es preparación para la vida, no puede permanecer indiferente a tal evolución. No nos está permitido dormirnos sobre el cómodo colchón de nuestra rutinita. Rutina de programas, de métodos, de modos. Hemos de vivir renovándonos. Ya lo dijo Enrique Rodó en las primeras palabras de sus bellos "Motivos de Proteo": Renovarse es vivir, palabras a las que añadiría, parafraseándole, y enquistarse en morir.

Estoy convencido de que, si no en esta generación, en las venideras, habrá de cederse sitio en los programas elementales a buena parte de esta matemática cualitativa, que plantea a su vez problemas didácticos interesantes con los cuales está nuestro buen amigo Ibarra tan encariñado.

Claro es que habrá de imponerse ante todo una discriminación y jerarquización muy cuidadosas de teorías, tanto en el orden formativo como utilitario. Mis más recientes manifestaciones internacionales a este respecto se inspiran en tal sentido cauteloso y moderador. No vayamos a perder la cabeza apresurándonos a introducir novedades sólo por el hecho de serlo; de estar de moda en la creación matemática actual. ¡Pobres de los niños entonces! Pero abramos decididamente paso a nuevas teorías capaces de fecundar el pensamiento matemático del niño haciéndole apto para las nuevas concepciones, aunque para ello tengamos que jubilar definitivamente remanentes académicos caducados que la tradición conserva tan sólo por razones de herencia. No hay peor enemigo del progreso que la rutina con disfraz conceptual.

TODA UNA DIDÁCTICA POR HACER.

Al plantearnos el problema didáctico del aprendizaje de tales nuevas teorías, acaso nos hallemos con la sorpresa de que se adaptan mucho mejor a las inteligencias vírgenes que a las nuestras, deformadas por defectuosos sistemas de educación. Al menos así parecen pronosticarlo las consecuencias de un fino análisis de Piaget, el conocido psicólogo infantil ginebrino, sobre estructuras mentales, y las numerosas y universales experiencias personales del profesor Gattegno, del Instituto de Educación de la Universidad de Londres.

Un inmenso problema didáctico queda abierto. Su correcta y objetiva solución nos obligará a profundizar en el conocimiento psicológico del niño, de sus intereses, de su inteligencia. Sabemos aún muy poco de ésta, al menos en lo que a la evolución del pensamiento matemático se refiere, pensamiento que hemos observado siempre a través de rígidos esquemas conceptuales que la tradición educativa nos dió organizados a su modo. Lo cierto es que cuando prescindimos de nuestros prejuicios y ponemos objetivamente a prueba la lógica en acción del niño, ante problemas estimulantes aparentemente elevados, nos sorprende la adaptabilidad y multivalencia de su pensamiento virgen aún de deformaciones.

NUESTRA RESPONSABILIDAD Y NUESTRA TAREA.

La aversión que hacia la matemática siente la inmensa mayoría de los educados según la tradición, nos indica bien claramente que todavía está casi todo por hacer en la Pedagogía Matemática Elemental. He aquí nuestra tarea. Tarea urgente como ninguna y de vital alcance nacional; pues si queremos sobrevivir como nación en un mundo técnico y económico que con tal vértigo evoluciona, hemos de empezar ampliando las bases de nuestra cultura matemática elemental, no sólo en el sentido social de accesibilidad a la enseñanza, sino también en el sentido de accesibilidad didáctica y de eficiencia formativa. Sólo ensanchando y consolidando lo más posible los primeros estratos del edificio, lograremos la máxima altura de las cúspides minoritarias capaces de procurarnos en el futuro una técnica avanzada y una economía próspera y autónoma.

Hemos de darnos cuenta, pues, de la enorme responsabilidad que como formadores de nuestra juventud tenemos contraída y por tanto del ingente trabajo que nos espera.. Ingente, sí; pero tan bello que no cabe premio ni gloria mayor que la de contribuir al bien patrio llevando la alegría de los niños a unos estudios que hasta ahora habían constituído su tortura.

PEDRO PUIG ADAM.

La tarea formativa de los Colegios Mayores universitarios

En el amplio campo de la educación se han realizado en España, durante los últimos veinte años, fundamentales transformaciones. Una aspiración de actualizar nuestras instituciones docentes, para situarlas al nivel de los tiempos, ha presidido todas las reformas que el legislador ha introducido en los sistemas vigentes. Algunas de ellas han encontrado resonancia en la sociedad española, que con su crítica elogiosa unas veces y censora otras, ha contribuído a perfeccionar las fórmulas legales.

Algo de esto ha ocurrido con los Colegios Mayores. Restaurados en 1942, son reconocidos por la Ley de Ordenación de la Universidad española, de 29 de julio de 1943, como los "órganos para el ejercicio de la labor educativa y formativa general que incumbe a la Universidad". Desde entonces varias promociones de jóvenes universitarios han pasado por estas instituciones. A la hora de enjuiciar los resultados han sido expuestos muy diversos pareceres. La mayor parte de éstos, hay que confesarlo, expresan una opinión muy deficiente acerca de la formación de los Colegios Mayores. Se ha insistido frecuentemente en la necesidad de una reforma del régimen legal de estos Centros. Y tal régimen ha sido modificado para lograr efectivamente el cumplimiento de la importante función que les está confiada.

El Decreto de 26 de octubre de 1956, Orgánico de Colegios Mayores, constituye el texto legal vigente. Ha pasado más de un año desde que esta disposición fué publicada en el "Boletín Oficial del Estado". Su aparición debiera haber sido resaltada ampliamente, ya que el contenido del Decreto encierra materia suficiente no sólo para una glosa calurosa, sino para el análisis y estudio de una teoría, bastante completa, acerca de una institución genuinamente española. Sin embargo, no conocemos ninguna aportación que, ofrecida en diarios o revistas de cierta difusión, haya contribuído a difundir la nueva reglamentación.

Sin amplias pretensiones, vamos a destacar en este artículo las principales finalidades encomendadas a los Colegios Mayores. Si con ello contribuímos a estimular las actividades de alguno de ellos y al propio tiempo a un mejor conocimiento en los sectores interesados en los problemas de la educación, habremos alcanzado el fin que nos proponemos.

1. EDUCACION Y FORMACION RELIGIOSA

La misión del Colegio Mayor en esta primordial faceta, no nos parece que deba desarrollarse principalmente en el terreno de la instrucción. La adquisición de conocimientos debe proporcionarla, y en grado conveniente, la Universidad o la Escuela Especial. Sin duda, que puede completarse con la orga-