

FASES EN LA ABSTRACCIÓN DE PATRONES LINEALES

Ana-Isabel Roig y Salvador Llinares

Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante

Resumen. *Este estudio tiene como objetivo caracterizar los procesos de abstracción de estudiantes de secundaria en problemas de generalización de patrones lineales y generar una explicación considerando las fases de Participación y Anticipación. Los resultados obtenidos nos han permitido identificar dos momentos en el proceso de abstracción: Proyección y Anticipación Local.*

Abstract. *The goal of this study is characterize the secondary school students' abstraction processes in generalization problems of linear patterns and provide an explanation from the Participatory and Anticipatory stages. The findings suggest the existence of two moments in the abstraction process: Projection and Local Anticipation.*

INTRODUCCIÓN

El estudio que presentamos en este artículo tiene como objetivo caracterizar los procesos de abstracción que tienen lugar durante la resolución de problemas de generalización. Este tipo de problemas se utilizan habitualmente para introducir la generalización en el aula (Mason, 1996). Para resolver problemas de generalización el estudiante debe identificar, analizar, y describir patrones y extraer generalizaciones apropiadas a partir de ellos. De acuerdo con Zazquis y Liljedahl (2002) “*al explorar patrones lo estudiantes se dedican a detectar similitudes y diferencias, a clasificar y etiquetar, a buscar algoritmos, a conjeturar y argumentar, a establecer relaciones numéricas entre componentes o, más en general, a generalizar sobre datos y relaciones matemáticas*”. Estas habilidades son fundamentales para el aprendizaje de las matemáticas y, en particular, para el aprendizaje del álgebra (English y Warren, 1995), hasta tal punto que los problemas de generalización se han tomado como eje central de la introducción al álgebra en muchos currículos.

Los diferentes patrones que intervienen en este tipo de problemas son de tipo gráfico y numérico. Los patrones gráficos se presentan como una sucesión de figuras y se espera que el estudiante sea capaz de extender la sucesión, reproducir la figura correspondiente a un término cualquiera de la sucesión o calcular el número de elementos que la componen sin necesidad de reproducirla. Los patrones numéricos suelen presentarse mediante una tabla o como una sucesión numérica. Los patrones lineales son aquellos cuyo término n -ésimo puede expresarse como $an+b$.

Sea cual sea el contexto en el que se presenta el problema de generalización, el objetivo es que el estudiante obtenga la regla que define el patrón dado. Para ello las tareas que se le piden habitualmente son:

- Continuar la sucesión dibujando o escribiendo los términos siguientes a los dados.

- Calcular un término cercano que podría resolverse continuando la sucesión dibujando o escribiendo los números hasta llegar al término pedido (*generalización cercana*, Stacey, 1989)
- Calcular un término lejano para el que resulta demasiado difícil o pesado continuar la sucesión con lo que se pretende que el estudiante busque una regla general (*generalización lejana*, Stacey, 1989)
- Expresar verbalmente la regla que ha permitido el cálculo de los diferentes términos. Esto muchas veces se plantea como una explicación a los compañeros de forma que estos sean capaces de entenderlo (Pegg y Redden, 1990; Radfor, 2000)
- Expresar simbólicamente la regla que permite encontrar el término n-ésimo de la sucesión.

Las investigaciones realizadas hasta estos momentos han identificado relacionadas con la resolución de este tipo de problemas, han identificado diferentes estrategias y dificultades que tienen los estudiantes de secundaria en la abstracción de estos patrones (Castro, 1995; Cañadas, Castro y Castro, 2007; Orton y Orton, 1999; English & Warren, 1998; Stacey & Macgregor, 2001; Zazkis & Lideljahl, 2002). En este contexto, el objetivo de nuestra investigación es caracterizar el proceso de abstracción de patrones lineales y generar una explicación considerando la *Abstracción Reflexiva* (Piaget, 1977/2001) operativizada en las fases de *Participación* y *Anticipación* propuesta por Tzur y Simon (2004).

MARCO TEÓRICO

Piaget (1977/2001) denominó *Abstracción Reflexiva* al proceso por el cual se desarrollan nuevas estructuras desde las previamente existentes a través de dos fases, una fase de proyección en la que las acciones en un nivel llegan a ser objetos de reflexión en el siguiente nivel y una fase de reflexión en la que tiene lugar una reorganización del conocimiento. Desde esta perspectiva el proceso de abstracción de nuevas estructuras matemáticas (como puede ser la identificación de patrones lineales) se considera un proceso de construcción cognitiva.

Partiendo de la *Abstracción Reflexiva*, Tzur y Simon (2004) desarrollan el mecanismo *Reflexión sobre la Relación Actividad-Efecto* con el que explican de forma operativa el proceso de desarrollo de nuevas estructuras matemáticas a partir de las previamente disponibles para el estudiante.

Dada una situación problemática, el objetivo del estudiante, las actividades que realiza para conseguir su objetivo y los efectos de dichas actividades, son la base de este mecanismo. Según estos autores, la abstracción se deriva de los registros de experiencia generados al realizar actividades y tiene forma una regularidad en la relación entre la actividad realizada y el efecto generado.

Tzur (2007) indica que en este proceso interviene dos tipos de comparaciones:

El mecanismo Reflexión sobre la Relación Actividad-Efecto consiste en dos tipos de comparaciones: entre el objetivo del estudiante y los efectos de la actividad, lo que lleva a una clasificación de los registros actividad-efecto; y entre las diferentes situaciones que dan lugar a cada tipo de registros, lo

que lleva a abstraer una relación actividad-efecto como una regularidad anticipada y razonada. (p. 276).

Estas comparaciones y la información que se obtiene a partir de ellas son esenciales para la abstracción de regularidades. La abstracción de regularidades en la relación entre las actividades y sus efectos permite al estudiante anticipar los efectos de nuevas actividades sin necesidad de llevarlas a cabo. Tzur y Simon (2004) distinguen entre dos tipos de anticipación. Esta diferenciación es la base de la distinción entre dos fases en el proceso de abstracción: la *Fase de Participación* y la *Fase de Anticipación*.

En la *Fase de Participación*, el estudiante construye registros de la actividad cuya comparación le permite generar información. La coordinación le lleva a inferir una estructura. Esta estructura se usa para anticipar los efectos de nuevas actividades sin llevarlas a cabo. Sin embargo, este conocimiento sólo está disponible para el estudiante en el contexto de la actividad en la que se generó. La estructura abstraída es provisional, y en otros contextos, el estudiante no será capaz de reconocer si la estructura está implicada. En la *Fase de Anticipación*, el estudiante puede reconocer una estructura implicada en la situación y usarla, independientemente del contexto. Esto implica que se ha establecido una relación entre la estructura y un conjunto de situaciones en las que puede estar implicado. La diferencia entre las dos fases se basa en la naturaleza de las anticipaciones llevadas a cabo por el estudiante y por tanto, en cómo se usa la regularidad abstraída.

METODOLOGÍA

Participantes y problemas

511 estudiantes de 4º de educación secundaria (15-16 años) respondieron a 2 problemas de generalización de patrones. La figura 1 muestra uno de los problemas utilizados.

Para obtener más información, 71 de los estudiantes fueron entrevistados. El objetivo de las entrevistas era que los estudiantes verbalizasen los procesos de razonamiento seguidos durante la resolución de los problemas. Durante la entrevista, los estudiantes disponían de su cuestionario previamente resuelto y de lápiz y papel por si les resultaba necesario escribir.

Problema: LA SUCESIÓN

En un documento antiguo se ha encontrado la siguiente representación:

* * * * * * * * *
* * * * * *

Continúa la sucesión gráfica hasta el término 5º.

Expresa con números los cinco primeros términos de esta sucesión.

¿Cuál es el número que está en la posición 10ª?

¿Cuál es el número que está en la posición 25ª? ¿y en la 50ª?

¿Cuál es el término que ocupa el lugar n?

Resuélvelo y explica cómo lo has hecho.

Figura 1. Problema de generalización usado en la investigación

Análisis

Se realizó un análisis descriptivo de los procesos de resolución llevados a cabo por los estudiantes. En este análisis se tuvo en cuenta tanto la respuesta al cuestionario, como los comentarios realizados durante la entrevista. El análisis se centró en cómo los estudiantes coordinaban la información aportada por los casos particulares para abstraer

el patrón. Usaremos los resultados del análisis en el problema “La sucesión” (figura 1) para ejemplificar la manera en la que se presentan las fases de Participación y Anticipación en el proceso de generalización de patrones lineales en el grupo de estudiantes que fueron entrevistados.

RESULTADOS

La distinción teórica entre fases propuesta por Simon y Tzur nos ha permitido identificar diferentes comportamientos al resolver el problema. En esta sección se presentan las características de las fases de *Anticipación* y *Participación* en el problema “La sucesión”. Después, se detallarán diferentes características de la Fase de Participación.

Fase de Anticipación y Fase de Participación

A pesar de que las diferentes tareas que componían el problema “La sucesión” guiaban al estudiante en el proceso de construcción del patrón, pudimos identificar a aquellos estudiantes que lo habían construido previamente en Fase de Anticipación. Estos estudiantes reconocían la sucesión como una progresión aritmética de diferencia 2, determinaban su fórmula y la aplicaban para calcular los diferentes términos.

$1^{\circ} \rightarrow 3$
 $2^{\circ} \rightarrow 5$
 $3^{\circ} \rightarrow 7$
 $4^{\circ} \rightarrow 9$
 $5^{\circ} \rightarrow 11$
 $(1 \cdot 2) + 1 = 3$
 $(5 \cdot 2) + 1 = 11$
 $a_5 = 3 + (4)2 = 11$
 $a_4 = 3 + (3)2 = 9$
 $a_3 = 3 + (2)2 = 7$
 $a_{25} = 3 + (24)2 = 51$
 $a_{50} = 3 + (49)2 = 101$
 $a_n = 3 + (n-1)2 = 3 + 2n - 2 = 2n + 1$
 Este problema se puede resolver
 a) utilizando las fórmulas de las progresiones aritméticas
 $a_n = a_1 + (n-1)d$

Figura 2. Respuesta de E12 al problema “La sucesión”

El proceso de resolución llevado a cabo por E12 es un ejemplo de este tipo de comportamiento. Como se puede observar en la figura 2, E12 afirma que “Este problema se puede resolver utilizando las fórmulas de las progresiones aritméticas”. Da la fórmula $a_n = a_1 + (n-1)d$ y la aplica para calcular los diferentes términos. Los cálculos realizados muestran que usa de forma correcta los diferentes elementos de la estructura previamente conocida a este patrón en particular.

Otros estudiantes necesitaban realizar todas las tareas del problema para obtener el patrón, construyendo la estructura implicada mientras realizaban la resolución. Este comportamiento se consideró como un indicador de la Fase de Participación. En esta fase, los estudiantes comienzan la resolución usando una estrategia recursiva. El proceso de resolución llevado a cabo por E34 es un ejemplo de este tipo de comportamiento tal como se puede observar en el siguiente fragmento de entrevista:

- E34: *En la posición 10...21 [estrellas]*
 I: *21. ¿Cómo lo has calculado?*
 E34: *Añadiendo 2. 9, 11... Si el quinto [termino] es 11 añadiendo 2, más 2, más 2...*

E34 empieza con el término 5°, calculado durante la resolución del cuestionario, y va añadiendo continúa añadiendo dos hasta llegar al término 10°.

Esta distinción nos permitió clasificar las respuestas de los estudiantes de acuerdo con la fase (Anticipación o Participación) evidenciada durante el proceso de resolución. La tabla 1 recoge los resultados obtenidos.

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido
Otros	3	4,2%	4,3%
Participación	55	77,4%	78,6%
Anticipación	12	16,9%	17,1%
Total	70	98,6%	100%
Perdidos	1	1,4%	

Tabla 1. Porcentaje de respuestas en la fase de Anticipación y Participación

El 4.3% de los estudiantes presentó dificultades relacionadas con términos específicos usados en el enunciado del problema. “Sucesión”, “Término”, “Posición” son palabras a las que estos tres estudiantes parecen no dar sentido en relación con la representación gráfica dada. Esto implica que no puedan realizar las tareas relacionadas con dibujar nuevos términos y expresarlos numéricamente. Sólo el 17,1% de los estudiantes reconocieron la sucesión como una progresión aritmética de diferencia 2 y aplicaron esta estructura matemática como instrumento para la resolución, mostrando que había sido construida previamente en *Fase de Anticipación*. Finalmente, la mayoría de estudiantes (78,6%) inició el problema siguiendo una estrategia recursiva, lo que se consideró una evidencia de la *Fase de Participación*.

El proceso de abstracción en *Fase de Participación*

Cuando un estudiante no identificaba la progresión aritmética como instrumento para la resolución del problema, el proceso seguido mostraba diferentes momentos del proceso de abstracción por el que se llegaba a la anticipación dependiente del contexto que caracteriza la *Fase de Participación*. Teniendo en cuenta las dos fases de la *Abstracción Reflexiva (Proyección y Reflexión)* descritas por Piaget (1977/2001), hemos distinguido dos momentos del proceso entendidos como subfases de la *Fase de Participación*.

- *Proyección*: se construyen diferentes términos de la sucesión sin que se produzca la abstracción del patrón.
- *Anticipación Local*: se abstrae el patrón y se usa para anticipar el valor de nuevos términos de la sucesión.

La *Proyección* tiene lugar cuando el estudiante realiza las tareas iniciales siguiendo una estrategia recursiva. Para calcular los términos 25° y 50°, en esta subfase, el estudiante continúa con la estrategia recursiva y esto le impide construir el patrón. E07 es un ejemplo de este tipo de comportamiento.

E07 necesita listar todos los términos de la sucesión hasta el 50° para poder obtenerlo. En la entrevista, en vista del uso de esta estrategia, la investigadora le propuso calcular el término 1000°.

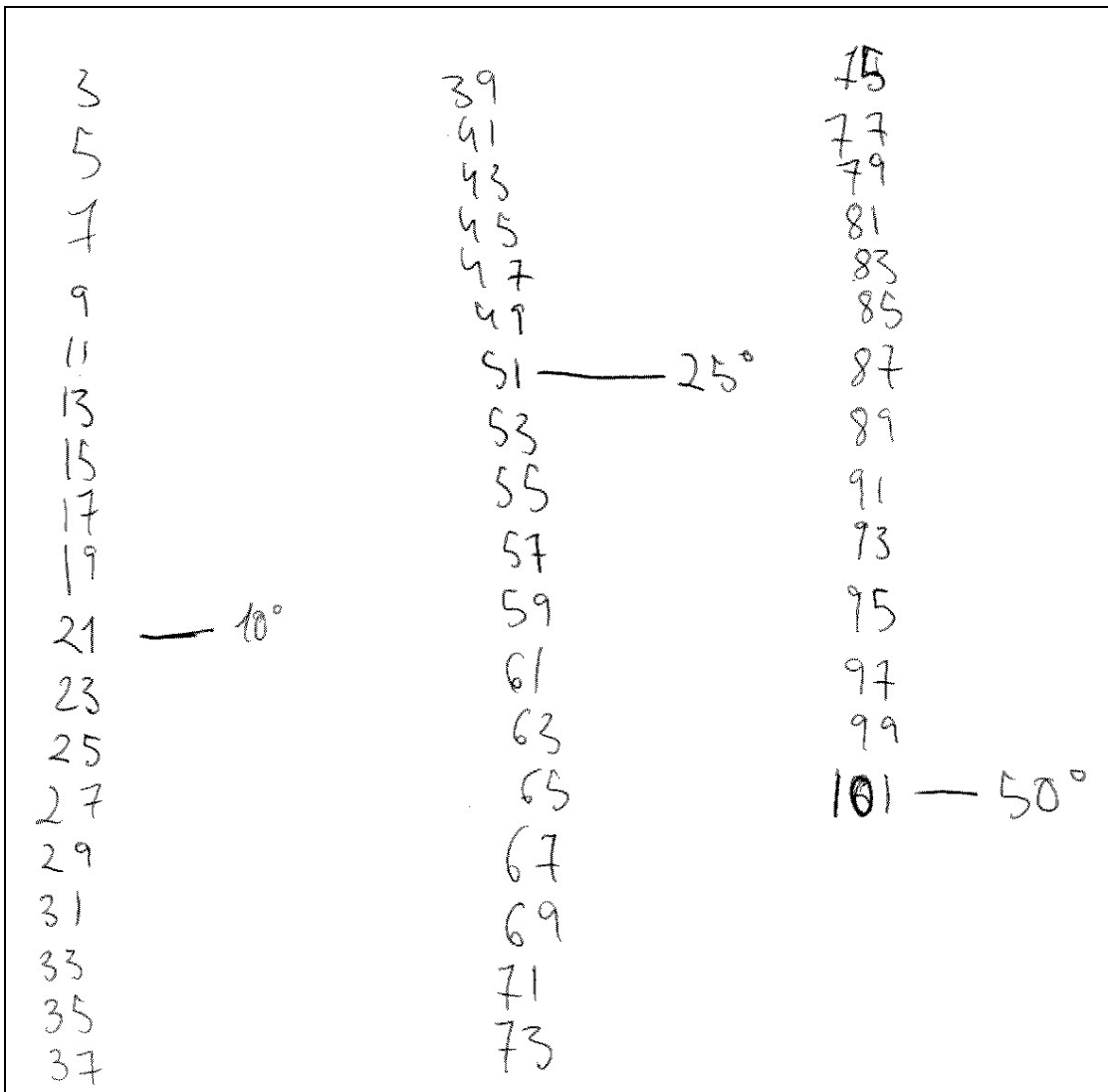


Figura 3. Respuesta de E07 al problema “La sucesión”

Este fragmento de entrevista muestra como E07 persiste en el uso de la estrategia recursiva, proponiendo seguir con la lista para obtener el término requerido.

- R: ¿Qué número ocuparía la posición 1000? ¿Sabrías cómo hacerlo?
 E07: Tendría que ir poniendo de dos en dos, ¿no?
 I: Irías poniendo... irías escribiendo.
 E34: Claro

Aunque esta estrategia no es factible, E07 no intenta obtener un patrón que le permita calcular un término lejanos sin conocer el anterior. Esta es una característica de la *Proyección*.

Tal y como sucede en el ejemplo anterior, algunos estudiantes no pudieron abstraer el patrón desde el conjunto de casos particulares generados. Sin embargo, hay estudiantes que a partir de estos casos particulares son capaces de abstraer el patrón y usarlo para el cálculo de nuevos términos. E34 nos proporciona un ejemplo de este salto cualitativo que supone la abstracción del patrón. Tal y como se ha mostrado anteriormente, este

estudiante sigue una estrategia recursiva para calcular los primeros términos. En el siguiente fragmento de entrevista, queda reflejado el momento en el que obtiene una regularidad que inicialmente desconocía.

- E34: *Al principio estaba sumando [...] 3, 4, 5... 11. Este es el quinto [término], ¿no?*
 I: *Si, este es el quinto [término]*
 E34: *El sexto [término], el sexto sería así, el séptimo [término será] así...*
 I: *Ajá. Añadiendo dos.*
 E34: *El octavo [término será] así, el noveno [término será] así y el [décimo]... así. O sea, que he sumado 5 veces 2.*

La nueva regularidad “sumar 5 veces 2” para calcular el término 10° se aplica para el cálculo de otros términos. E34 pasa de sumar recursivamente 2, a multiplicar por 2. En este caso la abstracción viene motivada por el intento de abreviar la estrategia recursiva inicial.

No es común poder observar el momento exacto en el que se produce el cambio de la estrategia recursiva a una regla general. La manifestación más habitual por la que podemos saber que la abstracción se ha producido, consiste en que el estudiante haga uso del patrón para calcular los términos 25° y 50°. Este uso es una característica de la *Anticipación Local*. En el siguiente fragmento de entrevista E34 usa el patrón “sumar n-5 veces 2 a 11” para el cálculo del término n (n=50) que se apoya en el valor del término en la posición 5°.

- I: *¿Cómo has calculado este 101? (que es el valor dado al término de la sucesión que ocupa el lugar 50) [...]*
 E34: *No se si está bien. Estos 50 menos 5. Me daría 45.*
 I: *45.*
 E34: *Ahora, el 5 [5° término] ya se que son...*
 I: *Sabes que son 11.*
 E34: *Ahora, 45 por 2 me daría 90.*
 I: *Ajá.*
 E34: *Y sumo 90 con 11 y sale... 101*

La tabla 2 muestra el porcentaje de estudiantes que inicialmente usaban estrategias recursivas y que fueron capaces de abstraer el patrón (*Anticipación Local*). En esta tabla se indica que el 69,1% de los estudiantes en Fase de Participación no construyeron un patrón adecuado que les permitiese calcular términos lejanos. Este dato muestra la dificultad que tiene la abstracción del patrón desde el conjunto de casos particulares.

	Frecuencia	Porcentaje total (70)	Fase de Participación (55)
Proyección	38	54,3%	69,1%
Anticipación Local	17	24,3%	30,9%
Total	55	78,6%	100%

Tabla 2: Porcentajes de respuestas en los momentos de Proyección y Anticipación Local

DISCUSIÓN

Los resultados presentados ponen de manifiesto una clara distinción entre procesos de resolución propios de la *Fase de Participación* y de la *Fase de Anticipación*, proporcionando nuevas evidencias empíricas de la distinción teórica propuesta por Tzur y Simon (2004). Además nuestro objetivo de caracterizar los procesos por los cuales los

estudiantes construyen y usan los patrones lineales nos ha llevado a detallar diferentes momentos de la construcción del patrón que se produce en la *Fase de Participación* dando lugar a la *Proyección* y la *Anticipación Local*, entendidas como diferentes momentos de la *Fase de Participación*.

La caracterización del proceso de abstracción resultante de este estudio es compatible con la distinción de Niveles del proceso de generalización propuestos por García-Cruz y Martínón (1997 y 1998). El Nivel 3 (nivel de comprensión conceptual o generalización global en el que el estudiante generaliza una estrategia) corresponde a la *Fase de Anticipación*, mientras que el Nivel 1 y 2 (respectivamente: nivel de actividad de procedimiento en el que se reconoce el carácter recursivo del patrón lineal y nivel de comprensión de procedimiento o generalización local en el que se establece un invariante desde las acciones realizadas) corresponden a la *Proyección* y *Anticipación Local* que articulan la fase de Participación.

El mecanismo clave en el paso de la fase de Proyección a la fase de Anticipación Local es el cambio en el foco de atención desde el conjunto de datos particulares de los primeros términos hacia su estructura. Dörfler (2002) indica que este proceso viene determinado por un cambio consciente que convierte el conjunto de datos en un ítem cognitivo (la regularidad) con entidad propia.

REFERENCIAS

- Cañadas, M.C., Castro, E. y Castro, E. (2007). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de la ESO en el problema de las baldosas. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Actas del XI simposio de la SEIEM* (pp. 283-294). Tenerife: SEIEM.
- Castro (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Tesis doctoral. Universidad de Granada, España.
- Dörfler, W. (2002). Formation of mathematical objects as decision making. *Mathematical Thinking and Learning*, 4(4), 337-350.
- English, L. y Warren, E. (1995). General Reasoning Processes and Elementary Algebraic Understanding: Implications for Initial Instruction. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 17(4), 1-19.
- English, L. y Warren, E. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *Mathematics Teacher*, 91(2), 166-170.
- García-Cruz, J. A. y Martínón, A. (1997). Actions and invariants in linear generalising problems. En E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference for the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 289-296). Helsinki: PME.
- García-Cruz, J. A. y Martínón, A. (1998). Levels of generalization in linear patterns. En A. Olivier (Ed.), *Proceedings of the 22nd Conference for the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 329-336). Stellenbosch: PME.
- Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Dieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching* (pp. 65-86). Dordrecht/Boston/London: Kluwer.

- Orton, A. y Orton, J. (1999). Pattern and the approach to algebra. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the Teaching and the Learning of Mathematics* (pp. 104-120). Cassell: London.
- Pegg, J. y Redden, E. (1990). Procedures for, and experiences in, introducing algebra in New South Wales. *Mathematics Teacher*, 83, 386-291.
- Piaget, J. (1977/2001). *Studies in reflecting abstraction*. Sussex: Psychology Press (Edited in 1977 by Presses Universitaires de France).
- Radford, L. (2000). Sings and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 42(3), 237-268
- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 147-164.
- Stacey, K. y Macgregor, M. (2001). Curriculum Reform and approaches to algebra. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra* (PP. 141-154). Dordrecht: Kluber Academic Publishers.
- Tzur, R. (2007). Fine grain assessment of students' mathematical understanding: participatory and anticipatory states in learning a new mathematical concept. *Educational Studies in Mathematics*, 66, 273-291.
- Tzur, R. y Simon, M. A. (2004). Distinguishing two stages of mathematics conceptual learning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 2, 287-304.
- Zazkis, R. y Liljedahl, P. (2002) Generalization of patterns: the tension between algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 379-402.