

# **SOBRE PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS RELACIONADOS CON LA DIVISIÓN DE FRACCIONES**

Mauricio Contreras del Rincón. I.E.S. Benicalap-Valencia

Bernardo Gómez Alfonso. Universidad de Valencia

## **Resumen**

*En esta comunicación se resume una investigación cuyo objetivo es indagar acerca del modelo usual de enseñanza de la división de fracciones y acerca de su efecto en las realizaciones de los estudiantes de ESO, cuando abordan distintos tipos de problemas multiplicativos que involucran división de fracciones.*

*Para este trabajo se ha hecho un análisis histórico-epistemológico que ha dado cuenta de las variables: contextos, modelos físicos, constructos, algoritmos y la estructura dimensional de los problemas.*

*Entre los resultados de la investigación se concluye que el modelo usual de enseñanza condiciona el reconocimiento de la operación que hay que realizar y el enfoque de resolución cuando los problemas con fracciones están en contexto. En concreto los estudiantes tienden a utilizar el esquema cuaternario de la regla de tres con preferencia al esquema ternario de ley de composición.*

## **Abstract**

*In this communication it is summarized a research that has the objective of investigating on the usual teaching model of the fractions' division and on its effect in the ESO students' achievements, when they approach to the different kind of multiplicative problems that introduce fractions' division.*

*A historic-epistemological analysis that gives account of the variables, such as contexts, physic models, constructs, algorithms and the dimensional problems structure has been done for this paper.*

*Among the research results it is concluded that the usual teaching model conditions the reconnaissance of the operation that has to be done and the resolution approach when the problems with fractions are in context. Finally, students have a tendency to use the quaternary scheme of three's rule with preference to the ternary scheme of law composition.*

## **INTRODUCCIÓN**

El presente trabajo es una síntesis de la investigación llevada a cabo dentro del programa de doctorado del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Valencia. La investigación se enmarca en la línea seguida por los miembros del grupo de Pensamiento numérico y algebraico (PNA) de dicho Departamento. El tema de estudio son los problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones.

La indagación parte de la constatación de que el modelo actual de enseñanza de la división de fracciones no da cuenta de la riqueza de modelos físicos, constructos, contextos, esquemas, métodos y algoritmos involucrados.

Así, por ejemplo, a pesar de que hay una variedad de algoritmos disponibles para la división de fracciones, parece que la enseñanza enfatiza excesivamente el de “productos cruzados” o el de “invertir y multiplicar”, y en situaciones descontextualizadas.

También ocurre que el tipo de números implicados en el problema media a la hora de reconocer cuál es la operación que se necesita para resolverlo (Fischbein y otros, 1985); esto puede ser atribuido a que el modelo primitivo de división (repartir) deja de funcionar cuando los números involucrados son fraccionarios en vez de naturales. Parece ser que este fenómeno no está siendo tenido en cuenta por la enseñanza suficientemente.

Además, la existencia de diferentes constructos de división y de fracción (Kieren, 1976) afecta a la conceptualización de la operación de división de fracciones y tal vez influya a la hora de identificarla.

Por último, el análisis estructural que hace Vergnaud (1983, 1988), señala que la división no es una operación ternaria sino una operación cuaternaria, normalmente entre dos espacios de medida. En este sentido está por ver si los estudiantes perciben los problemas de división de fracciones de modo diferente a los problemas de división de números enteros, y a qué esquema: ternario o cuaternario, les lleva esta percepción.

## **OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN**

Estas constataciones, que son las que han dado sustento a este trabajo, se concretan en los siguientes objetivos de investigación:

- 1) Indagar acerca de las restricciones del modelo usual de enseñanza en relación a conocer las variables de la división de fracciones que se enfatizan. A saber: las variables del problema: “constructos”, contextos, y modelos físicos; y las de resolución: esquemas, métodos y algoritmos.
- 2) Indagar cómo se presentan e interrelacionan en la enseñanza estas variables.
- 3) Indagar su incidencia en las respuestas de los estudiantes a un cuestionario de lápiz y papel: qué variables del problema tienen en cuenta, qué variables de resolución utilizan, y qué interrelación se puede observar entre ellas.

Los puntos 1 y 2 permitirán definir el modelo usual de enseñanza y su evolución.

Un objetivo central en el punto tres, es indagar acerca de cuál de los esquemas cuaternario o de “regla de tres” y ternario o de “ley de composición”, utilizan con preferencia cuando se enfrentan a un cuestionario de problemas multiplicativos contextualizados relativos a la división de fracciones.

## **HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN**

Las hipótesis de la investigación que aquí se presenta son las siguientes:

- 1) El modelo usual de enseñanza condiciona el reconocimiento de la operación y el enfoque de resolución en los problemas que involucran división de fracciones, cuando los enunciados están contextualizados.
- 2) Los estudiantes interpretan la situación preferentemente bajo el esquema cuaternario.
- 3) Hay contextos más o menos favorecedores de un determinado enfoque de resolución o de un determinado algoritmo para la división de fracciones.

## **EL SIGNIFICADO DE LOS TÉRMINOS**

Utilizamos en este trabajo términos que han sido usados en la literatura con significados diferentes.

Por ejemplo, al hablar de constructos de la división de fracciones se quiere hacer referencia tanto a los constructos de número racional mencionados de Kieren (1976, pp. 101-144; 1985, pp. 24-36): parte-todo, operador, razón, medida y división, como los significados de división descritos por Fishbein, Deri, Nello y Marino (1985, pp. 3-21): partición y agrupación. Además, se incorporan bajo este nombre otros significados de división localizados en textos antiguos y modernos: proporción e inversión de la multiplicación.

Los contextos se consideran aquí como situaciones externas a las matemáticas que están presentes en los enunciados de las tareas que suelen proponerse en los textos de enseñanza. En este trabajo se consideran agrupados en cinco bloques: escalas, medidas, ábacos, tasas y grifos.

Los algoritmos se consideran aquí como un conjunto ordenado de pasos que permiten obtener el resultado de una división de fracciones. En los textos se han localizado los siguientes: 1. Reducción de fracciones a común denominador y división de numeradores. 2. Multiplicación por el inverso del denominador. 3. Productos cruzados. 4. Conversión de las fracciones en decimales. 5. Uso del protocolo de la calculadora. 6. Reducción a la unidad.

Por modelo físico se entiende, en este trabajo, una representación gráfica que sirve de apoyo para ilustrar la división de fracciones. Los modelos localizados han sido: recta numérica, rectángulos, círculos y polígonos.

El esquema cuaternario, consiste en interpretar la situación como una relación entre cuatro elementos, de acuerdo con el esquema de una tabla de proporcionalidad. Este esquema admite varios métodos de resolución: el *reglado* (planteamiento de una regla de tres), el de la *proporción*, el de la *ecuación* y el de *reducción a la unidad* (ver Gómez, 2005).

El esquema ternario consiste en interpretar la situación como una *operación* en la que intervienen tres elementos (dos entradas y una salida). Admite como método de resolución el enfoque de ecuación y el enfoque de división.

Bajo la expresión “enfoque de resolución” se denota aquí la terna que resulta al optar por un determinado esquema, un método y un algoritmo.

## **EL ANÁLISIS DE ALGUNOS PROBLEMAS DE DIVISIÓN DE FRACCIONES**

Para seleccionar los problemas multiplicativos que involucran división de fracciones que se han utilizado en esta investigación se ha recurrido al análisis histórico–epistemológico propio de la Didáctica de las Matemáticas. Este análisis ha permitido localizar en distintas épocas históricas los valores de las variables denominadas: constructos, algoritmos, contextos y modelos físicos. Con la misma finalidad, se han revisado algunas de las investigaciones recientes sobre el problema de investigación (en particular, Yamaguchi y Jwsaki, 1999).

Del estudio precedente se ha obtenido un conjunto de 29 problemas de diferentes épocas históricas, que se han caracterizado de acuerdo con las variables señaladas, usando como marco teórico las ideas del análisis estructural (Vergnaud, 1983, 1988) y el análisis dimensional (Schwartz, 1981, 1988).

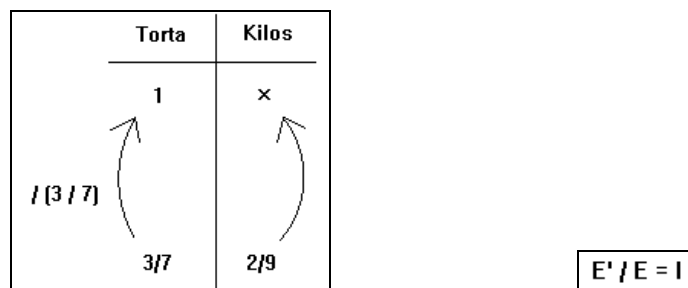
El tipo de análisis realizado queda ilustrado en los siguientes ejemplos.

TAREA TORTA. Tiene dos apartados, ambos con el mismo contexto pero diferente estructura.

### **APARTADO 1: PESO DE LA TORTA.**

*3/7 de torta pesan 2/9 de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?* (Rey Pastor y Puig Adam, 1932, pp. 211 y 212).

a) Estructura y enfoque de resolución:



En este caso se desconoce el valor unitario, por tanto, de acuerdo con el análisis de Vergnaud, el problema es de división-partición y el enfoque de resolución es escalar.

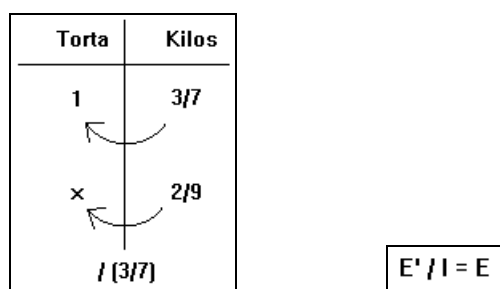
Desde el punto de vista del análisis dimensional de (Schwartz), hay que dividir  $\frac{2}{9}$  kilos entre  $\frac{3}{7}$  tortas, es decir, hay que hacer un cociente de cantidades extensivas de distintos espacios de medida ( $E'$  y  $E$ ), para obtener una cantidad intensiva (los kilos que pesa cada torta,  $I$ ).

b) Variables:

El modelo es circular de tarta, el contexto es de medida, puesto que se pide el peso de la torta, el constructo es de “partición”.

**APARTADO 2: PORCIÓN DE TORTA.** Si cada torta pesa  $\frac{3}{7}$  de kilo, ¿qué porción de torta tendré con  $\frac{2}{9}$  de kilo? (Rey Pastor y Puig Adam, 1932, pp. 211 y 212).

a) Estructura y enfoque de resolución:



A diferencia del ejemplo anterior, ahora se conoce el valor unitario; por tanto, el problema es de división-agrupación y su enfoque de resolución es funcional, ya que hay que dividir entre el valor unitario ( $\frac{3}{7}$ ).

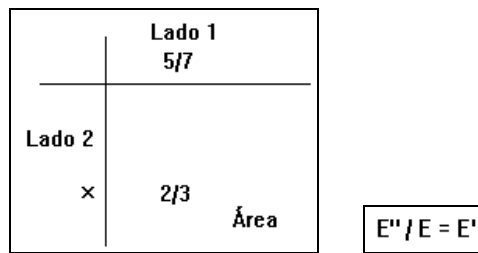
Desde el punto de vista dimensional, hay que dividir  $\frac{2}{9}$  kilos entre  $\frac{3}{7}$  kilos/torta, es decir, hay que dividir una cantidad extensiva del segundo espacio de medida ( $E'$ ) entre una cantidad intensiva (el valor unitario,  $I$ ) para obtener una cantidad extensiva del primer espacio de medida (porción de torta,  $E$ ).

b) Variables: Al igual que en el ejemplo anterior el modelo es circular de tarta, el contexto es de medida, pero ahora el constructo es de “agrupación”.

A continuación se muestran otros dos ejemplos con estructura diferente, pero con enfoques de resolución similares.

**TAREA: LA MESA DE ANA.** La superficie de la mesa de Ana es un rectángulo que mide  $\frac{2}{3}$  de  $u^2$ . Sabiendo que uno de sus lados mide  $\frac{5}{7}$  de  $u$ , averigua cuánto mide el otro lado (Gairín y Sancho, 2002, pp. 244-247)

a) Estructura y enfoque de resolución:



En este problema se conoce la longitud de uno de los lados de la mesa de Ana y su área y se trata de hallar el otro lado. Para ello, hay que tener en cuenta que el área es el producto de las dos dimensiones y, por tanto, el lado que se busca es:  $x = \frac{2/3}{5/7}$ . Desde el

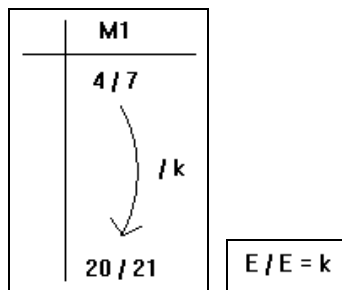
punto de vista del análisis estructural, es un producto de medidas. El esquema de resolución es ternario y, por tanto, admite dos métodos de resolución: división y planteamiento de una ecuación. El análisis dimensional muestra que el problema es del tipo  $E''/E = E'$ , ya que hay que dividir el área ( $E''$ ) entre el lado ( $E$ ) para obtener el otro lado ( $E'$ ) y las tres son cantidades extensivas.

b) Variables: El modelo es rectangular; el contexto es de medida, puesto que se trata de hallar la anchura de la mesa de Ana, y el constructo de la división de fracciones en este caso es el inversión de una multiplicación o “factor perdido”.

**TAREA: MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN.**

APARTADO b) EL DIVISOR. *El dividendo de una división es 4/7 y el cociente 20/21. ¿Cuál es el divisor?* (Valdivia Ureña y García Roca, 1969, p. 43).

a) Estructura y enfoque de resolución:



Este problema es un ejemplo de ábaco, que se resuelve mediante un esquema ternario.

Uno de los métodos de resolución involucra una ecuación: si  $\frac{4/7}{X} = \frac{20}{21}$ , entonces

$$X = \frac{4/7}{20/21}. \text{ Otro método consiste en el planteamiento directo de la división } \frac{4/7}{20/21}.$$

Desde el análisis estructural, se trata de un único espacio de medidas. Desde el análisis dimensional, corresponde al caso  $E / E = k$ , ya que se trata de determinar el escalar ( $k$ ) que liga las dos cantidades del mismo espacio de medida ( $E$ ).

b) Variables: No se evidencia ningún modelo físico. El contexto es numérico, y el constructo de la división de fracciones que interviene es el de “inversión de la multiplicación o división”.

**FASE EXPERIMENTAL**

**1.- Metodología**

Una vez caracterizados los problemas, se pasó al diseño del cuestionario. Para ello, entre Febrero y Abril de 2004 se realizaron dos estudios pilotos sucesivos, con dos grupos diferentes de segundo ciclo de E.S.O. (15-16 años) del I.E.S Balears de Valencia. Entre ambos pilotajes transcurrió un período de tiempo de 30 días. Como consecuencia de estos pilotajes se fueron descartando algunas de las tareas que no resultaron discriminantes o que eran redundantes.

El cuestionario definitivo consta de un conjunto de ocho tareas, en las que se recogen problemas de tres clases: a) un solo espacio de medida, b) isomorfismo de medida, y c) producto de medidas. Además, en estas tareas intervienen cinco tipos de contextos: a) escalas, b) medidas, c) ábacos, d) tasas, y e) grifos. Se ha procurado que las tareas difieran en algún valor de las variables.

La muestra a la que se pasó el cuestionario definitivo está compuesta por un grupo de 31 estudiantes de 3º de E.S.O, del I.E.S. Benicalap de Valencia, diferente a los grupos del pilotaje. La prueba tuvo lugar en la primera semana de Junio de 2005, de forma que los estudiantes tenían ya experiencia en el trabajo con fracciones, con la regla de tres y con la iniciación al álgebra. Para contestar los ítems, disponían de una calculadora científica con teclas de fracción. No se pasaron todas las tareas a todos los estudiantes del grupo, ya que la prueba se organizó en sesiones diferentes y no estaban presentes todos ellos.

Una vez realizada la prueba, se pasó al análisis de las actuaciones de los estudiantes, mediante el estudio de las respuestas al cuestionario. Este análisis se hizo teniendo en cuenta los siguientes aspectos: a) enfoques de resolución observados en las respuestas, b) incidencia de las variables en las respuestas de los estudiantes. En particular, se analizó qué enfoques de resolución resultaron mayoritarios para cada uno de los valores de las variables.

## **2.- Análisis de respuestas**

Como ejemplo, se muestran a continuación algunos resultados obtenidos en las tareas citadas en el apartado anterior.

### **2.1 Tarea TORTAS.**

- a. En el contexto de esta tarea, que es “medida”, 10/18 estudiantes utilizan un esquema cuaternario de proporcionalidad simple y solamente 2/18 recurren al esquema ternario de ley de composición. Por tanto, el enfoque cuaternario es mayoritario en esta tarea.
- b. En el apartado 1, los estudiantes tienden a seguir el orden de presentación de los datos para efectuar el planteamiento y forma de resolución en “cuadro”, comienzan con el primer dato del enunciado, siguen con el segundo, debajo del primero el tercero, y debajo del segundo la incógnita. No ocurre así en el apartado 2, como se ve en los ejemplos presentados a continuación.
- c. El método más usado es el *reglado*. Ninguno plantea el método de la *proporción* ni el de la *ecuación* (Gómez, 2005). Hay alumnos que convierten las fracciones a decimales, tal vez porque usan la calculadora. Otros se manejan con soltura con las fracciones, pero no las simplifican.
- d. Solamente 1/18 estudiante utiliza un modelo físico de tarta para representar el problema.

- e. En el apartado 1, el constructo, que según el análisis del apartado anterior es el de “partición”, no parece que se haga visible en este enunciado, porque está al revés. Si la pregunta fuera “con 2/9 de kilo tengo el peso de 3/7 de torta, ¿cuántos kilos pesa una torta?, tal vez se vería con más facilidad el constructo y la operación de división asociada. En el apartado 2, según el análisis del apartado anterior el constructo es el de “agrupación”, pero el hecho de que la pregunta sea sobre la “porción” de torta que corresponde a 2/9 de kilo hace que dicho constructo sea más difícil de localizar. Si la pregunta fuera “¿cuántas tortas tendré con 2/9 de kilo?” el constructo se mostraría más claramente. Este hecho hace que muchos estudiantes se decanten por el método reglado.
- f. En relación con los algoritmos observados en las respuestas de los estudiantes aparecen los siguientes: “producto de extremos partido por producto de medios”, “invertir y multiplicar”, si bien con errores de manipulación.
- g. 5/18 no contestan.

Ejemplos de respuestas en la tarea “TORTAS”

Alumno 1 (Fernando)

**2.- TORTAS**

1) 3/7 de torta pesan 2/9 de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?

2) Si cada torta pesa 3/7 de kilo, ¿qué porción de torta tendré con 2/9 de kilo?

(Rey Pastor y Puig Adam, "Elementos de Aritmética", 1932, pgs. 211 y 212).

1) ~~Handwritten scribbles~~

$$\frac{3}{7} \rightarrow \frac{2}{9} \quad x = \frac{1 \cdot \frac{2}{9}}{\frac{3}{7}}$$

$$1 - x$$

$$0,4286 \rightarrow 0,2 \quad x = \frac{1 \cdot 0,2}{0,4286} \approx 0,51848$$

1 → x

---

2) ~~Handwritten scribbles~~

$$0,4286 \rightarrow 1 \quad x = \frac{0,2 \cdot 1}{0,4286} \approx 0,51848$$

$$0,2 \rightarrow x$$

Fernando, utiliza un esquema cuaternario y el mismo enfoque de resolución en los dos apartados, ya que en ambos aplica la regla de tres estándar. Para su respuesta prefiere utilizar la expresión decimal de las fracciones. Cómo se puede observar, el estudiante no se ve influido por el hecho de que los apartados del problema son diferentes desde el punto de vista estructural, tal vez porque está anclado en el método reglado, que aplica mecánicamente.

Alumna 26 (Mercé)

**2.- TORTAS**

1)  $\frac{3}{7}$  de torta pesan  $\frac{2}{9}$  de kilo. ¿Cuánto pesa la torta?

2) Si cada torta pesa  $\frac{3}{7}$  de kilo, ¿qué porción de torta tendré con  $\frac{2}{9}$  de kilo?

(Rey Pastor y Puig Adam, "Elementos de Aritmética", 1932, pgs. 211 y 212).

1)  $\frac{3}{7} \rightarrow \frac{2}{9}$      $\frac{1}{7} \rightarrow \frac{2}{9} : \frac{3}{1} = \frac{2}{27}$   
 $\frac{7}{7} \rightarrow \times$      $\frac{7}{7} = \frac{2}{27} \cdot \frac{7}{1} = \frac{14}{27}$   
 La torta pesa  $\frac{14}{27}$  kg

2)  $\frac{3}{7} \rightarrow \frac{7}{7}$      $\frac{7}{7} \cdot \frac{2}{9} = \frac{14}{9} : \frac{3}{7} = \frac{98}{189}$   
 $\frac{2}{9} \rightarrow \times$   
 Tendré  $\frac{98}{189}$  de torta.

Mercé, usa en los dos apartados el enfoque cuaternario, pero a diferencia de Fernando, utiliza dos métodos de resolución diferentes, tal vez influida por el enunciado de las tareas. En el apartado (1), de acuerdo con el enfoque estructural, la tarea debería sugerir una división-partición,  $\frac{2}{9} : \frac{3}{7}$ , pero en lugar de ello la estudiante usa un método de reducción a la unidad, ya que la pregunta es explícitamente el valor unitario. Lo hace en dos pasos: primero busca el valor de la unidad fraccionaria  $\frac{1}{7}$  y después el de la unidad entera,  $\frac{7}{7}$ , que es una torta. En el apartado (2), no usa el método de reducción a la unidad debido a que el valor unitario ya está dado en el enunciado. Aunque, de acuerdo con el análisis estructural, la tarea es de división-agrupación  $\frac{2}{9} : \frac{3}{7}$ , la estudiante usa el método reglado, escribiendo  $\frac{7}{7}$  en vez de 1.

Nótese que en este apartado la estudiante abusa del lenguaje algebraico mediante un solapamiento de signos: después del signo igual pone el resultado y a continuación encadena el signo de la división.

En ambos apartados contesta sin simplificar y da por bueno el valor  $\frac{98}{189}$  de torta.

La diferencia con el estudiante anterior parece ser que aquél usa siempre el método reglado y ésta sólo lo usa en caso necesario.

## 2.2 Tarea LA MESA DE ANA:

- En el contexto de esta tarea, que es “medida”,  $\frac{8}{14}$  estudiantes utilizan un esquema ternario de ley de composición,  $\frac{2}{14}$  recurren al planteamiento de una ecuación y ningún estudiante utiliza el esquema cuaternario. Por tanto, el enfoque ternario es mayoritario en esta tarea.
- Hay alumnos que usan el algoritmo que hemos denominado “conversión en decimales”, tal vez porque usan la calculadora. Otros algoritmos usados son “producto de extremos partido por producto de medios”, “productos cruzados” e “invertir y multiplicar”, si bien algunos de ellos con errores de manipulación.
- En el constructo de esta tarea, que es “factor perdido de una multiplicación”, no tiene incidencia el esquema cuaternario, mientras que sí aparece en algunas respuestas el enfoque de ecuación.
- Los estudiantes no utilizan ningún modelo físico para la resolución de la tarea.
- $\frac{4}{14}$  estudiantes no contestan.



## Ejemplos de respuestas en la tarea “LA MESA DE ANA”

### Alumno 2 (Tamer)

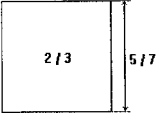
**4.- LA MESA DE ANA**

La superficie de la mesa de Ana es un rectángulo que mide  $\frac{2}{3}$  de  $u^2$ . Sabiendo que uno de sus lados mide  $\frac{5}{7}$  de  $u$ , averigua gráficamente cuánto mide el otro lado.

$$\frac{5}{7} \cdot x = \frac{2}{3} u^2$$

$$0,714x = 0,6\bar{6}$$

$$x = \frac{0,6\bar{6}}{0,714}$$

$$x = 0,9337$$


(Gairín, J. M. y Sancho, J. "Números y algoritmos", 2002, págs 244-247)

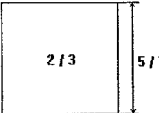
El estudiante usa un método algebraico, ya que plantea una ecuación. La incógnita es el factor perdido de la multiplicación:  $\frac{5}{7} \cdot x = \frac{2}{3}$ . Se puede pensar que utiliza un esquema ternario porque sólo aparecen tres términos, pero no se puede caracterizar así dado que en vez de hacer directamente la división de fracciones  $\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = x$ , recurre a un planteamiento previo de factor perdido mediante una ecuación. El algoritmo que usa es “conversión en decimales”.

### Alumno 4 (Jorge)

**4.- LA MESA DE ANA**

La superficie de la mesa de Ana es un rectángulo que mide  $\frac{2}{3}$  de  $u^2$ . Sabiendo que uno de sus lados mide  $\frac{5}{7}$  de  $u$ , averigua gráficamente cuánto mide el otro lado.

Mide  $\frac{5}{7}$



$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{15}{14} = \frac{5}{7}$$

(Gairín, J. M. y Sancho, J. "Números y algoritmos", 2002, págs 244-247)

El estudiante utiliza directamente el esquema ternario de ley de composición, divide directamente. Se observa, además, que comete el error de cambiar la ubicación de los dos productos del algoritmo que consiste en la división del “producto de extremos” por el “producto de medios”, poniendo en el numerador lo que va al denominador y viceversa.

El estudiante identifica las relaciones entre los elementos del problema, sus dificultades no radican en la tarea, sino en el algoritmo.

### 2.3 Tarea “MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN”, apartado b) “EL DIVISOR”: ejemplo 4

- En el contexto de la tarea, que es numérico, un total de 5/14 estudiantes utilizan directamente un esquema ternario de ley de composición, dividen, y 5/14 recurren al auxilio del álgebra, plantean una ecuación.
- El orden de presentación de los datos no parece influir. Es más, algunos invierten el orden de presentación de las fracciones para hacer la división, colocando en el numerador  $\frac{20}{21}$ , y en el denominador  $\frac{4}{7}$  (ver respuesta del alumno 4. Jorge).
- Algunos estudiantes transforman las fracciones en decimales, probablemente porque usan la calculadora. Otros algoritmos utilizados, pero no de modo

significativo, son: “producto de extremos partido por producto de medios”, “productos cruzados”, y uso del protocolo de la calculadora, aunque se observan errores en la manipulación del algoritmo.

- d. Con el constructo de esta tarea, que, según el análisis del apartado anterior, es “inversión de la multiplicación o factor perdido”, se observa que no tiene ninguna incidencia el enfoque cuaternario, mientras que están igualados los enfoques ternario y de ecuación.
- e. No hay modelo físico para esta tarea.
- f. 4/14 estudiantes no contestan.

### Ejemplos de respuestas en la tarea “EL DIVISOR”

Alumno 4 (Jorge)

**3. - EL DIVISOR**

2) El dividendo de una división es  $\frac{4}{7}$  y el cociente  $\frac{20}{21}$ . ¿Cuál es el divisor?.

(Valdivia Ureña y García Roca, 1969)  $\frac{42}{70}$

$$\begin{array}{l} \cancel{2} \sqrt{DD = \frac{4}{7}} \\ c = \frac{20}{21} \end{array} \quad \frac{\frac{20}{21}}{\frac{4}{7}} = \frac{84}{140} = \frac{42}{70}$$

Tiene dificultades con la formulación de la división. En vez de  $D/d = q$ , escribe  $q/D=d$ .

Además, aplica mal la regla para dividir las fracciones: invierte la ubicación del producto de medios y del producto de extremos.

El estudiante usa un esquema ternario y maneja inadecuadamente la relación entre dividendo, divisor y cociente. Usa sus propias abreviaturas (DD en vez de D).

### RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En este apartado, dado el carácter breve del informe que aquí se presenta, sólo se aportan datos acerca de los distintos enfoques de resolución, y en segundo lugar, acerca de la confirmación de las hipótesis de la investigación.

#### 1. Enfoques de resolución.

En las realizaciones de los estudiantes se han localizado todos los enfoques de resolución diferentes señalados en el análisis de los problemas:

1.1) Uso de un esquema cuaternario de proporcionalidad simple con dos variantes: El planteamiento reglado (uso de una regla de tres), siguiendo el orden literal del enunciado; y la reducción a la unidad. Ambos aparecen en el caso del isomorfismo de medidas, si bien el primero es mayoritario y el segundo es minoritario. Ejemplos de estos planteamientos se encuentran, respectivamente, en las respuestas de Fernando y de Mercé a la tarea “Tortas”.

1.2) Uso de un esquema ternario (ley de composición) de división de fracciones. Este enfoque tiene incidencia en los casos del producto de medidas y de un solo espacio de medida. En las respuestas de los estudiantes se observan errores tanto en la interpretación de la relación de división, como en la aplicación del algoritmo. Ejemplos de este planteamiento se encuentran en las respuestas de Jorge a las tareas “La mesa de

Ana” y “El divisor”. En la primera, el modelo físico le ayuda en la resolución, mientras que en la segunda, el modelo de ábaco numérico le confunde.

1.3) Planteamiento de una ecuación. Este enfoque es mayoritario en las tareas de producto de medidas y de un solo espacio de medidas. Así, la tarea “La mesa de Ana” es un ejemplo que hace pensar que el modelo físico determina el enfoque de resolución, como se aprecia en la respuesta de Jorge.

La incidencia de cada uno de estos enfoques en las 8 tareas del cuestionario de la investigación es la siguiente:

		1.1)	1.2)	1.3)
Tarea 1	Monedas	15/16	0/16	0/16
Tarea 2	Tortas (ejemplos 1 y 2)	10/18	2/18	0/18
Tarea 3	El divisor (ejemplo 4)	0/14	5/14	5/14
Tarea 4	La mesa de Ana (ejemplo 3)	0/14	8/14	2/14
Tarea 5	Medidas	11/26	9/26	0/26
Tarea 6	Velocidad	5/20	11/20	0/20
Tarea 7	Las dos cintas	0/20	15/20	0/20
Tarea 8	Desagüe	19/23	0/23	0/23

## 2. Sobre las hipótesis de la investigación.

### 2.1) Hipótesis 1

El modelo de enseñanza parece que condiciona tanto el reconocimiento en contexto de la división de fracciones como el enfoque de resolución.

### 2.2) Hipótesis 2

En las respuestas de los estudiantes se ha observado que se usa preferentemente el esquema cuaternario, frente al esquema ternario o ley de composición, aún incluso cuando la tarea propuesta es de tipo ternario.

Sin embargo, la hipótesis 2 es más segura en el caso de un isomorfismo entre dos espacios de medida  $M_1$  y  $M_2$ , pero no tanto en el caso de un producto de medidas, ni en el de un solo espacio de medidas.

### 2.3) Hipótesis 3

La hipótesis 3 no parece confirmarse a la vista de los datos obtenidos: los contextos no influyen necesariamente en los algoritmos que utilizan los estudiantes. Más que el contexto parece que es el constructo el que influye en el planteamiento del problema, o tal vez la acción combinada del contexto y del constructo. Además, se ha observado la existencia de otras variables (no tenidas en cuenta en el diseño inicial de la investigación) que parecen influir en las realizaciones de los estudiantes. Así, habría que investigar la influencia tanto de la estructura sintáctica del enunciado, como de la forma de presentación de los datos.

## IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA

Los estudiantes tienen dificultades para reconocer la operación de división cuando los datos del problema son fracciones en situaciones contextualizadas, tal vez por el hecho de que el modelo usual de enseñanza no favorece la práctica escolar contextualizada y no tiene en cuenta todas las variables asociadas a los problemas de división.

Cabe esperar que la enseñanza de los problemas de división de fracciones cambie si se produce en un marco que tenga en cuenta los siguientes aspectos:

- Estructura de los problemas
- Enfoques de resolución
- Variables: constructos, contextos, modelos y algoritmos

Desde este punto de vista, el modelo estructural de Vergnaud (1983, 1988) es lo suficientemente explicativo y potente como para ser considerado una herramienta de análisis de los problemas multiplicativos que involucran división de fracciones.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Fischbein, E.; Deri, M.; Nello, M. y Marino, M. (1985). The role of implicit models in solving problems in multiplication and division. *Journal for research in mathematics education*. 16, 1, pp. 3-21.

Gairín, J.M. y Sancho, J. (2002). *Números y Algoritmos*, Madrid: SINTESIS.

Gómez B. (2005). *La regla de tres en Vallejo y su época*. En impresión.

Kieren, T. (1976) On the mathematical, cognitive and instructional foundations of rational numbers. En R. Lesh (Ed.). *Number and Measurement: Papers from a research workshop*. Columbus, OH: ERIC/SMEAC, pp. 101-144.

Rey Pastor, J. y Puig Adam, P. (1932). *Elementos de Aritmética*. Col. Elemental intuitiva. Tomo I. Sexta Edición. Madrid: Imp. A. Marzo.

Schwartz, J. L. (1981). *The role of semantic understanding in solving multiplication & division word problems*. Final report to NIE (Grant NIE-G-80-0144). MIT, Cambridge, MA.

Schwartz, J. L. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades*, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum; Reston, VA: NCTM, pp. 41-52.

Valdivia Ureña y García Roca (1969). *Matemáticas 3º curso*. Valencia: Bello.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of mathematics concepts and processes*. London: Academy Press, pp. 127-174.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Numbers concepts and operations in the middle grades*. Hillsdale, NJ: Erlbaum; Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, pp. 141-161.

Yamaguchi, T. y Jwasaki, H. (1999). La división de fracciones no es una división, sino una multiplicación. *Proceedings of the 23 Conference of PME* Vol. IV, pp. 4-337/4-344.