suma+ 58
Junio 2008, pp.117-124

Penélopes, Ítacas y Ulises

Cuando emprendas tu viaje hacia Ítaca
debes rogar que el viaje sea largo,
lleno de aventuras, lleno de experiencias.

Pero ¡cuidado, navegante!
Recuerda que no existe El camino
Sólo estelas que son huellas
de otros en su navegar
Surca los mares en busca de estelas
para aprender, y aprender de quienes saben.

Que sean muchos los días de verano;
que te vean arribar con gozo, alegremente,
a puertos que tú antes ignorabas.
Los lestrigones y los cíclopes,
el minotauro
y el feroz Posidón no podrán bloquearte
si tú no los llevas ya dentro, en tu laberinto.

No has de esperar que Ítaca te enriquezca:
Ítaca te ha concedido ya un hermoso viaje.
Sin ella, jamás habrías partido;

Y cuando llegues a la pequeña isla,
Mírate en el espejo de Penélope
Sin duda, entonces, comprenderás lo que significan las Ítacas.

Vivir, jugar, crear

Ítaca es el claro del bosque, la falta, lo que no sabes, lo que no conoces, lo que no comprendes, la prueba que el héroe debe superar en los cuentos fantásticos, la salida del laberinto, la libertad. Es el motor, la motivación, lo que nos mueve a crear.

Y **creatividad** es sinónimo de pensamiento divergente, es decir, capaz de romper continuamente los esquemas de la experiencia. Es creativa una mente que trabaja siempre, que siempre hace preguntas, que descubre problemas allí donde los demás encuentran respuestas satisfactorias, que se encuentra a gusto en las situaciones cambiantes donde los demás sólo perciben peligros, capaz de juicios autónomos e independientes, que rechaza lo que está codificado, que remanipula los objetos y conceptos sin dejarse inhibir por el conformismo. Todas estas cualidades se manifiestan en el proceso creativo. Y este proceso -¡escuchad!, ¡escuchad!- tiene un **carácter lúdico**. Siempre. Aunque estén en danza las "severas matemáticas" dice Rodari (2008) en su *Gramática de la fantasía*.

Xaro Nomdedeu Moreno
Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana al-Khwārizmī
ariadna@revistasuma.es

Y continúa diciendo que:

> ...la formación matemática no ha de discurrir sobre la vía forzada de la habilidad técnica y de la eficacia, sino que ha de partir del reconocimiento de que la conceptualización es una función libre y creativa de nuestra mente…

La vida y el juego

Ese carácter lúdico que se manifiesta en el proceso creativo, fue elevado a su más alto rango en palabras de Schiller, en sus *Cartes sobre l'educació estètica de l'home*:

> El objeto del impulso sensible, expresado con un concepto universal, es la vida [leben] en el sentido más amplio; concepto que abraza a todo ser material y a toda presencia sensible inmediata. El objeto del impulso formal, expresado con un concepto universal, es la forma [gestalt], entendida tanto en un sentido impropio como en el sentido propio; concepto que abraza todas las propiedades formales de las cosas y todas las relaciones de las cosas con la facultad de pensar [denkkräfte]. El objeto del impulso de juego, presentado en un esquema universal, podríamos llamarlo forma viva [lebende-gestalt]; concepto que sirve para designar todas las propiedades estéticas de los fenómenos y, en una palabra, aquello que en el sentido más amplio de la palabra llamamos belleza. (Shiller, 1983)

Las estelas

Ese impulso de juego es el que crea el resplandor en las estelas de l@s maestr@s, y quien les presta su belleza.

Estelas que se cortan, se cruzan, divergen y convergen, pero, en los tramos esenciales, concurren, como han constatado los muchos buscadores de estelas que han sido (Grupo Deca, 1990):

> La destreza para resolver genuinos problemas es un verdadero arte que se aprende con paciencia y considerable esfuerzo, enfrentándose con tranquilidad, sin angustias, a multitud de problemas diversos, tratando de sacar el mejor partido posible de los muchos seguros fracasos iniciales, **observando los modos de proceder, comparándolos con los de los expertos y procurando ajustar adecuadamente los procesos de pensamiento a los de ellos.** Es la misma forma de transmisión que la de cualquier otro arte, como el de la pintura, la música, etc. (Escudero, página web)

Esos tramos esenciales de concurrencia subyacen en las estrofas del poema que abre este artículo, adaptación libre de los de Constantino Kavafis y Antonio Machado. Y en resumen dicen que l@s maestr@s seguían ciertos pasos:

1. Estudiar la situación, aceptar el reto, tomar contacto.
2. Elaborar la hoja de ruta, el plan de navegación y poner a punto los instrumentos, las estrategias.
3. Iniciar el viaje. Avanzar y retroceder, tejer y destejer, sin perder el ánimo ante los atascos
4. Revisar el cuaderno de bitácora, recapitular, reflexionar, valorar lo vivido en el propio camino y formular nuevas preguntas, proponer nuevos retos.

Diofanto

Entre los grandes maestros se encuentra Diofanto, a quien dedicaré este capítulo y de quien se dice que:

> Rompiendo con la costumbre de enunciar los problemas en forma de historieta redactada, en general, con arreglo a moldes mitológicos, planteó, por celo religioso, todas sus proposiciones, excepto una, en abstracto, con lo que su Aritmética gana en claridad para nosotros, pero debió ser, por el contrario, más oscura para los antiguos, habituados a la forma concreta, como lo demuestra el haber vuelto a adoptar, después de Diofanto, las normas tradicionales. (Vera, 1970)

La destreza para resolver genuinos problemas es un verdadero arte que se aprende con paciencia y considerable esfuerzo

La Antología Palatina muestra que tales historietas se recuperaron con posterioridad. Ejemplos de epigramas matemáticos de dicha Antología son el famoso epitafio del propio Diofanto o el de las manzanas robadas propuesto en el artículo anterior.

Uno de los problemas abstractos más famosos, transitado por el maestro fue, y sigue siendo, el de los números poligonales. Siglos más tarde, Descartes hizo lo propio con otros números figurados, los piramidales.

Pero los problemas que popularizaron el nombre del padre del álgebra, fueron aquellos cuya solución entera depende de dos variables y una sola condición, lo cual se tradujo en una ecuación con dos incógnitas y la condición de que sus soluciones pertenecieran al campo de los números enteros. Estamos hablando de las ecuaciones diofánticas, que han dado mucho juego como adivinanzas y rompecabezas matemáticos.

En su honor he seleccionado las cinco propuestas que siguen. Como ya se indicó en el primer artículo de esta sección, las experiencias, soluciones y sugerencias que aportéis, saldrán en el número siguiente.

Problemas propuestos

Números para contar

Un enunciado sin contexto religioso, ni político, ni económico, ni nada de nada.

> *Existe un famoso problema que consiste en contar el número de cuadrados cuyos lados están sobre una malla cuadrada. ¿Existe algún número figurado que pueda expresar la solución?*

Acertijo

En las antiguas cajetillas de cerillas, solían venir acertijos que, como es de suponer, iban dirigidos al ingenio del público en general. Se suponía que no había que utilizar ningún aparato matemático, sino el puro razonamiento mental. Uno de ellos decía así:

> *En un corral hay conejos y gallinas, contándose en total 22 patas. ¿Cuántas gallinas y conejos hay?*

Tragedia

Y con los contextos volvió la carga de estereotipos que cada sociedad impone. Es el ejemplo del clásico problema anónimo de los maridos celosos:

> *Cuarenta cortesanos de la corte de un sultán eran engañados por sus mujeres, cosa que era claramente conocida por todos los demás personajes de la corte sin excepción. Únicamente cada marido ignoraba su propia situación. El sultán convocó a los hombres de su corte y les dijo:*
>
> *- Por lo menos uno de vosotros tiene una mujer infiel. Quiero que el que sea la expulse una mañana de la ciudad, cuando esté seguro de la infidelidad.*
>
> *Al cabo de cuarenta días, por la mañana, los cuarenta cortesanos engañados expulsaron a sus mujeres de la ciudad. ¿Por qué?.*

Es obvio que este enunciado ha dejado de ser polítiamente correcto en las sociedades occidentales contemporáneas. Podemos optar por la solución drástica de Diofanto o por sustituir el contexto, a la manera de Gianni Rodari, para inventar nuevos relatos a partir de los antiguos, basándonos sólo en la estructura interna y cambiando los personajes. Se pueden enunciar así problemas isomorfos mejor adaptados al aula actual. Por suerte, hoy en día circulan ya versiones literarias como el cuento *El rescate* de Luis Balbuena y otras participativas, lúdicas y no sexistas, como la siguiente, planteada como juego en el aula por José Colera:

> *El material necesario son diez gorros negros y nueve blancos. Diez personas se sientan en corro a la vista del resto de participantes. A cada una de las personas del corro se le pone un gorro en la cabeza. El resto de participantes da una palmada y la persona que concluya que su gorro es negro se pone de pie. Si no se levanta nadie, el resto de participantes da una nueva palmada, y así sucesivamente. Si hay seis personas que llevan gorro negro, se levantarán las seis, a una, cuando oigan la sexta palmada. ¿Qué razonamiento les llevará a tal actuación?*

Trozos de tarta

También es famoso un rompecabezas que habla de cómo obtener el máximo de trozos de tarta equivalentes, practicando sólo tres cortes. Ahora os propongo una extensión de dicho rompecabezas:

> *¿Cuántos trozos de tarta podemos obtener como máximo practicándole sólo cuatro cortes?*

Los buenos problemas tienen en común con las buenas historias, los acertijos y los chistes, esa chispa que asombra cuando, al final, se desvela el misterio. Algunos acertijos son casi chistes:

Dinamarca

> *Piensa un número entero comprendido entre 1 y 9, multiplícalo por 9, réstale 5, suma sus cifras hasta obtener un número de una sola cifra, piensa un país europeo que empiece por la letra del alfabeto que ocupa ese lugar, luego, piensa un nombre de gran mamífero que empiece por la siguiente letra del alfabeto.*

Soluciones a los problemas del número anterior

Las manzanas

Cupido está abatido porque las Musas le han quitado casi todas las manzanas que había recogido para Afrodita. Veamos el detalle:

Clio le ha quitado 1/5, Euterpe 1/12, Talía 1/8, Melpómene 1/20, Terpsícore 1/4, Erato 1/7, Polimnia 30, Urania 120 y Calíope 300. De modo que Cupido se ha quedado sólo con 50 manzanas.

Solución

En aquella época no existía todavía el método algebraico clásico, que inauguró precisamente Diofanto con la decisión antes explicada.

> Con Diofanto, el número se desprende de su vestido geométrico, y la forma y el método se apartan de la tradición logística para adentrarse en la zona del razonamiento algebraico que había de proyectar su influencia hasta el siglo XVII con Fermat y Descartes, muchas de cuyas contribuciones no se comprenden sin el matemático de Alejandría, el cual inaugura la época del Álgebra sincopada, es decir, del Algebra que interpola en el lenguaje ordinario algunas abreviaturas para simplificar y mecanizar el razonamiento, sustituyendo la incógnita por un símbolo único e indicando con sendas palabras, siempre las mismas, la adición y la sustracción y la igualdad...

El método seguido era válido en muchos casos como el que nos ocupa. Era el método de la falsa posición, según el cual: supongamos que (falsa posición o suposición) el total de manzanas fuera el mcm de los denominadores (para hacer más sencillos los cálculos). Éste número es 840.

Supongamos que el número buscado fuera 840, entonces su quinta parte sería 168, la doceava 70, la octava 105, la veinteava 42, la cuarta 210 y la séptima 120, por lo que las manzanas restantes hasta completar 840 deberían ser 125, no 500 que suman las 30 más 120 más 300 más 50.

Pero multiplicando 125 por 4 sí que obtenemos ese 500, así pues, el número de partida deberá ser multiplicado por esa misma cantidad y obtendremos la verdadera solución:

$$840 \times 4=3360$$

Entonces Cupido recolectó un total de 3360 manzanas.

Adoptando la notación que introdujo Diofanto y generalizó Vietta, la resolución resulta mucho más mecánica, aunque menos inteligible para quienes no están suficientemente familiarizados con los métodos abstractos.

Sea x el total de manzanas recolectadas por Cupido:

$$x-\left(\frac{x}{5}+\frac{x}{12}+\frac{x}{8}+\frac{x}{20}+\frac{x}{4}+\frac{x}{7}\right)=500$$

$$x-\left(\frac{x}{5}+\frac{x}{12}+\frac{x}{8}+\frac{x}{20}+\frac{x}{4}+\frac{x}{7}\right)=500$$

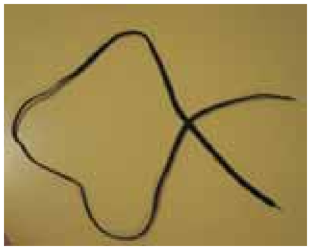
$$x\left(1-\frac{1}{5}-\frac{1}{12}-\frac{1}{8}-\frac{1}{20}-\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)=500$$

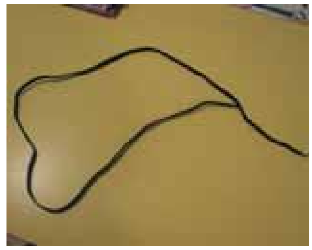
$$\frac{25}{168}x=500 \Rightarrow x=\frac{84000}{25} \Rightarrow x=3360$$

La orquídea

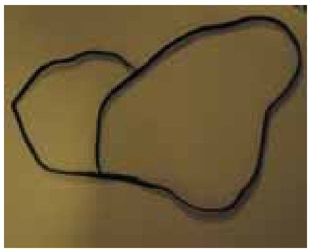
Busca una línea que corte una y sólo una vez a cada uno de los once arcos de la orquídea. No está permitido pasar por los vértices.

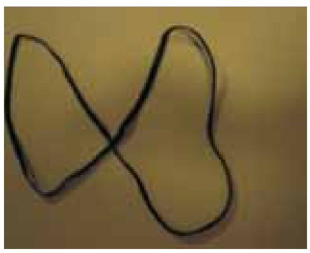
La primera figura tiene un vértice par, el cruce del cordel, y dos vértices impares, los extremos.





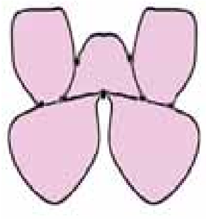
La segunda tiene un vértice de orden 3, el cruce, y otro de orden uno, el extremo. Tiene, pues dos vértices impares también. La tercera tiene dos vértices impares de orden 3. Las restantes tienen cero vértices impares.



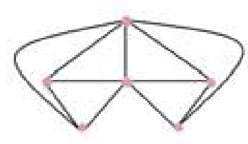


Si el cordel cruza sobre un vértice impar, aumenta en dos unidades su orden, pero no hay posibilidad de aumentar el número de vértices impares, puesto que dependen de los extremos del cordel y éstos sólo pueden situarse en las tres posiciones de las tres fotografías iniciales.

Si engrosamos los bordes de los pétalos de la orquídea, veremos que se van transformando en “ríos” y los pasos en puentes.

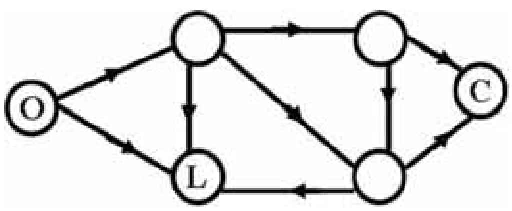


Si los ríos siguen ensanchándose, las islas se transforman en puntos y los puentes en segmentos de un grafo:



El grafo equivalente al laberinto de la orquídea tiene más de dos vértices impares. No es posible obtenerlo con un solo cordel, no es posible dibujarlo de un solo trazo.

La oveja, el lobo y la col



Observa el laberinto que representa el grafo. Tiene una entrada y dos salidas: una guardada por un LOBO y otra en la que hay una COL. Una OVEJA está en la entrada y avanza por el laberinto. En cada cruce elige al azar uno de los dos caminos posibles. Si llega a la col, sale del laberinto relamiéndose, pero, si tropieza con el lobo, está irremisiblemente perdida ¿Cuál es la probabilidad de que salga del laberinto con vida y bien alimentada? ¿Y de que se la coma el lobo?

La jugada representada en las imágenes dio como resultado 18 ovejas muertas y 6 ovejas salvadas. La media obtenida con las jugadas de los distintos grupos se aproximó al resultado teórico obtenido con el diagrama en árbol:

La cueva

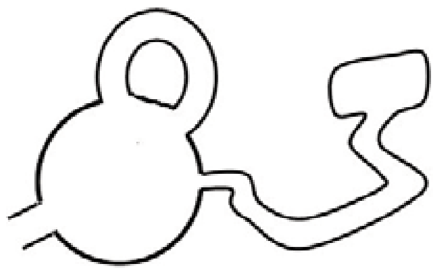
Varios excursionistas se han perdido en una cueva de la que parten cuatro caminos. Uno de ellos conduce al exterior en una hora; otros dos forman un bucle que se tarda en recorrer, de vuelta a la cueva, un día, tanto en un sentido como en el otro; el restante es un camino sin salida, del que deberán retroceder e invertirán en ello dos días.

Como no llevan ninguna luz y la cueva está oscura y llena de obstáculos, eligen, cada vez que hacen un intento de salir, uno de los cuatro caminos al azar. Si sólo tienen comida y agua para sobrevivir hasta tres días, ¿qué proporción de excursionistas crees que logrará salir de la cueva?

Si tuviesen alimentos para subsistir indefinidamente, ¿crees que se salvaría todo el grupo?

¿Cuánto tiempo crees que tardaría cada excursionista en salir, por término medio?

La primera parte del problema fue abordada por alumn@s de 5º de la Escuela Europea de Bruselas, del grupo de la profesora María Luisa Moreno. El nivel de este grupo es equivalente a 4º de la ESO. Se utilizaron 2 periodos de 45 minutos.



Si sólo tienen comida y agua para sobrevivir hasta tres días, ¿qué proporción de excursionistas crees que logrará salir de la cueva?

Conjetura individual ingenua:

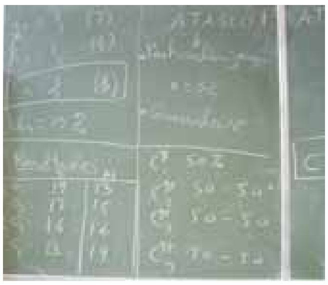
Nº de alumnos	7	5	3	1
Proporción que se salva	1/4	1/3	1/2	15%

Defensa conjeturas, atasco.
Estrategias para salir.
Caso particular n=32.
Simulación: dado, tablero, habichuelas, tabla.

Resultados recogidos en las tablas:
g1= 13-19
g2=17-15
g3=16-16
g4=19-13

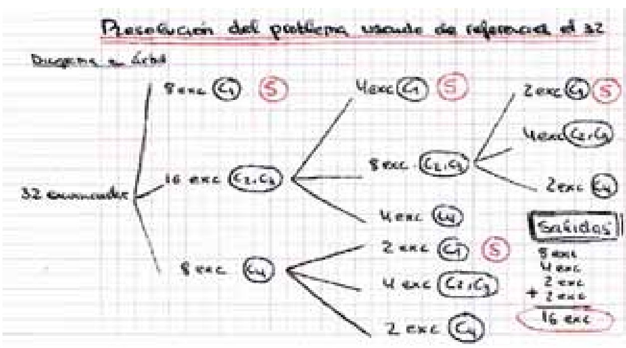
Conjetura de los grupos a la vista de todos los resultados:

g1= 50-50 aunque, opinan que debería ser 52-48, porque han sacado la media de los grupos con la calculadora. Insisten en que debe ser exactamente 52-48
g2=17-15---50-50
g3=16-16---50-50
g4=19-13---50%



Estas ya no son conjeturas ingenuas, han sido inducidas por la experiencia en cuatro jugadas o simulaciones, son mucho más fuertes que las primeras, pero aun no se apoyan en un razonamiento contundente, deIductivo.

Se ponen a buscar ese argumento. El grupo 4 apunta la estrategia del diagrama en árbol. Lo construyen para 32 excursionistas.

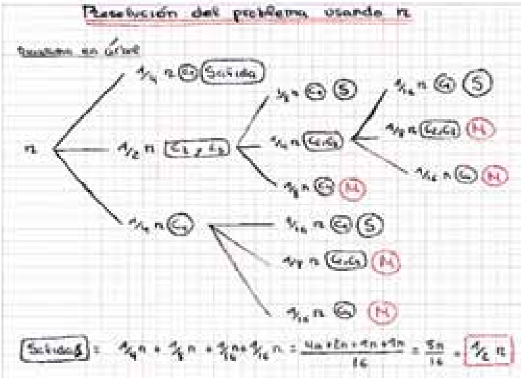


Comprenden que todavía no han encontrado el razonamiento definitivo, pero pierden interés porque para ellos ya está suficientemente claro.

Tabla del grupo 4

Nº excursionista	Recorrido	Duración	Salvado	Muerto
1	2,1	2d+1h=49h	x	
2	4,1	1d+1h=25h	x	
3	4,3,1	1d+1d+1h=49h	x	
4	2,1	2d+1h=49h	x	
5	3,1	1d+1h=25h	x	
6	2,2	2d+2d=96h		x
7	3,3,1	1d+1d+1h=49h	x	
8	1	1h	x	
9	2,4	2d+1d=72h		x
10	2,3	2d+1d=72h		x
11	2,1	2 d+1h=49h	x	
12	2,2	2d+2d=96h		x
13	4,1	1d+1h=25h	x	
14	4,3,3	1d+1d+1d=72h		x
15	1	1h	x	
16	1	1h	x	
17	4,3,2	1d+1d+2d=96h		x
18	1	1h	x	
19	1	1h	x	
20	2,3	2d+1d=72h		x
21	2,2	2d+2d=96h		x
22	4,4,4	1d+1d+1d=72h		x
23	2,2	2d+2d=96h		x
24	1	1h	x	
25	3,1	1d+1h=25h	x	
26	2,3	2d+1d=72h		x
27	3,2	1d+2d=72h		x
28	1	1h	x	
29	1	1h	x	
30	2,1	2d+1h=49h	x	
31	4,3,1	1d+1d+1h=49h	x	
32	4,4,2	1d+1d+2d=96h		x

Algun@s de los que se propusieron al inicio para abordar el problema general de entrada, comprenden que ahora están en mejores condiciones para hacerlo:



Se han divertido y han resuelto el problema a su nivel. La segunda pregunta se aborda también en dos niveles:

> *Si tuviesen alimentos para subsistir indefinidamente, ¿crees que se salvaría todo el grupo?*

Un grupo de alumno@s de 4º de la ESO del IES Francesc Tàrrega de Vila-real, atendido por su profesor Joan Batalla, nos ha hecho llegar su material, del que voy a exponer una pequeña muestra.

Comienzan con una división de opiniones, 12 de 21 opinan que se salvan todos.

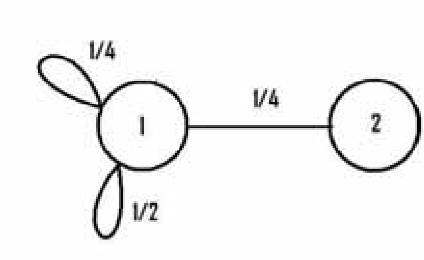
Defender su opinión ya es otra cosa. Preguntamos, la razón de que algún excursionista acierte la salida. "Por casualidad" –dice un alumno. A partir de ahí surgen palabras como suerte, aleatoriedad, azar, probabilidad,… Pronto descubren la necesidad de una notación adecuada. 1 para la salida, 2 para el callejón sin salida, 3 y 4 para las entradas del bucle. La notación da sus frutos rápidamente: una de las alumnas dice, 3 y 4 tienen más posibilidades. Ello conduce a plantear dos tipos de ruleta según el estilo de resolución: una con cuatro sectores equivalentes para quienes prefieren pensar en cuatro salidas equiprobables, otra con dos sectores de un cuarto de círculo y un semicírculo para las dos entradas del bucle. Con un poco de ayuda dibujan el primer árbol, pero la gran mayoría eliminan del proceso las entradas ya visitadas. Por fin plantean la situación correctamente.

Llegan a ver que se salva ¼ de cada ramillete: ¼ del primero, luego ¼ de los ¾ que quedan, luego ¼ de los ¾ de los ¾ y así sucesivamente.

Otros llegan a resultados como:

$$\frac{1}{4}+3\left(\frac{1}{4}\right)^2+9\left(\frac{1}{4}\right)^3+27\left(\frac{1}{4}\right)^4+\dots$$

Simulando el problema mediante un grafo, podemos ver con mayor contundencia el razonamiento recurrente



$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}\left\{1-\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)\right]+\dots\right\}+\dots$$

Pero el "sucesivamente" les genera un problema. "No terminaremos nunca de hacer la suma" –dice una alumna.

Tras varias intervenciones recuerdan que el año anterior trabajaron las progresiones geométricas y ya se encuentran en condiciones de abordar la solución. Se trata de la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica ilimitada de primer término ¼ y razón, 3/4:

Se salvan: $\dfrac{1/4}{1-3/4}=1$

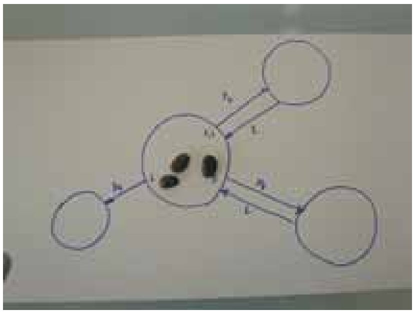
Pero este resultado les despista. Es necesaria otra discusión para que comprendan que ¼ y ¾ eran del total de excursionistas, es decir, realmente debían haber escrito $e/4$ y $3e/4$, con lo que el resultado habría sido e, es decir, se salvan todos. El profesor escribe:

Se salvan: $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}3^i\left(\frac{1}{4}\right)^{i+1}e=\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^i e=\frac{1}{4}\times\frac{1}{1-3/4}\times e=e$

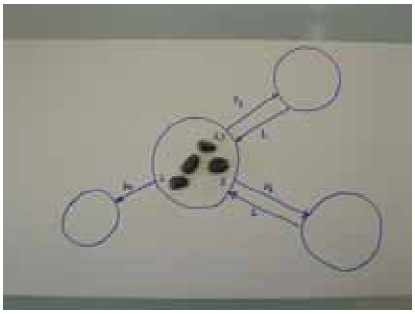
La tercera pregunta se aborda también en dos niveles, el primero más lúdico y concreto y el segundo más formalizado. La profesora Sanja Dabic introduce la pregunta a un grupo de 4º de la ESO:

> *¿Cuánto tiempo crees que tardaría cada excursionista en salir, por término medio?*

En primer lugar comienzan las conjeturas ingenuas.

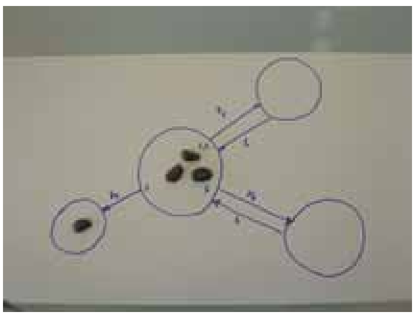


En general manifiestan la dificultad de razonar sobre un proceso ilimitado. Con ayuda de la profesora abordan el problema jugando en el ábaco probabilístico aplicado a un paseo aleatorio. Comienzan con el grafo en estado crítico, es decir, cada estado interior tiene carga crítica, insuficiente para comenzar el juego.



Introducen una ficha en el estado inicial para poder comenzar.

Cuando todos los estados interiores repiten la posición inicial, se para el juego.



Por cada excursionista que sale, debe comenzar el juego de nuevo si queremos que se salve otro, y en cada uno de estos bucles del proceso se invierten los mismos tiempos:

Dos fichas han viajado de 1 a 2 y de 2 a 1, lo que les ha costado un día a cada una. Una ficha ha viajado de 1 a 3 y ha tardado en hacer su camino 2 días.Una cuarta ficha ha tardado una hora en salir al exterior.

Luego:

$$m_{1,2} = \frac{2\times 1d + 1\times 2d + 1\times 1d}{1} = 4d + 1h$$

Considerando el grafo del juego con sus dos bucles, podemos razonar formalmente:

$$m_{1,2} = \frac{\frac{n}{2}\times 1d + \frac{n}{4}\times 2d + \frac{n}{4}\times 1h}{\frac{n}{4}} = 4d + 1h$$

Duración media del paseo aleatorio: cuatro días y una hora.

EL HILO DE ARIADNA ■

REFERENCIAS BIBLIOGÁFICAS

GRUPO CERO (1989): *De 12 a 16. Un proyecto de curriculum*, Mestral llibres, Valencia.

GRUPO DECA (1990): *Didáctica sobre resolución de problemas*, CEP de Burgos, Burgos.

GUZMAN, M. (1988). *Aventuras Matemáticas*, Labor, Barcelona.

MASON, J., BURTON, L., STACEY, K. (1988): *Pensar matemáticamente*, Labor, Barcelona.

RODARI, G. (2008): *Gramàtica de la fantasia*, Proa, Barcelona.

SCHILLER, F. (1983): *Cartes sobre l'educació estètica de l'home*, Laia, Barcelona.

VERA, F. (1970): *Científicos griegos*, Aguilar, Madrid.

Internet

http://platea.pntic.mec.es/~jescuder/prob_int.htm