SUMA 49
Junio 2005, pp. 7-14

Polígonos y estrellas

En este artículo se definen, clasifican y relacionan los conceptos de estrella, polígono estrellado y forma estrellada. El estudio de estas figuras geométricas se hace en función de su generación a partir de un polígono convexo, dando lugar a diversos métodos de creación y construcción de estrellas y formas estrelladas.

In this article, several ways of constructing star figures are presented. These have been defined and classified in stars, stars polygons, and star forms. These forms are commonly present in the real life and usually are known as stars. *Some methods related to the creation and construction of star forms generated from convex polygon are presented.*

La idea inicial del trabajo fue analizar geométricamente las formas rematadas en *puntas* cuya presencia es habitual en el entorno cotidiano y que comúnmente se conocen con el nombre de *estrellas*. La presencia de estas formas en la realidad cotidiana es un elemento motivador para el estudio de contenidos relacionados, por ejemplo, con la geometría de los polígonos y la trigonometría, además de constatar la utilidad y aplicación de la Geometría y en general de las Matemáticas a la comprensión del entorno.

Obtención de estrellas con un polígono convexo

Las múltiples acepciones de la palabra *estrella* hacen necesario definir con claridad este concepto en el ámbito matemático. El diccionario de la Real Academia define "objeto de figura de estrella ya con rayos que parten de un centro común, ya con un círculo rodeado de puntas". En lenguaje matemático, denominaremos *estrella* a la figura obtenida por cualquiera de los métodos que se describen a continuación.

Conectar vértices

Sea P_n un polígono regular de n lados. Se elige uno de sus vértices y, a partir de él, se trazan segmentos que unen dos vértices no consecutivos. Este trazado se realiza de manera ordenada y sistemática, en el sentido de dejar sin unir en cada paso el mismo número de vértices.

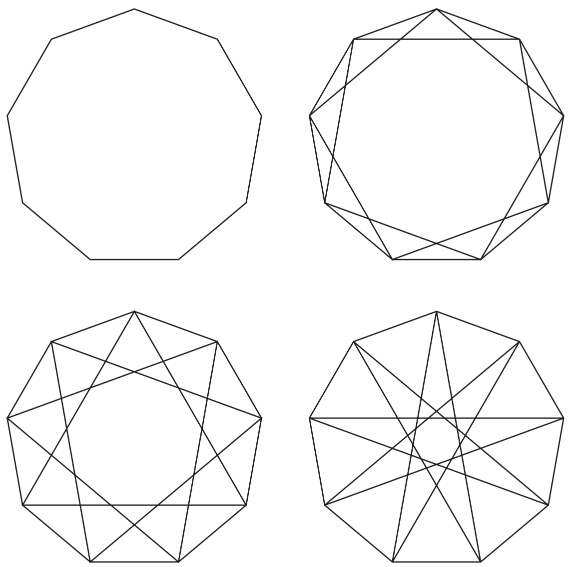


Figura 1. Estrellas derivadas del eneágono

Inmaculada Fernández Benito
IES María Moliner. Laguna de Duero. Valladolid.
Encarnación Reyes Iglesias
ETS de Arquitectura. Universidad de Valladolid. Valladolid.

Estrella es la figura obtenida cuando todos los vértices del polígono inicial están conectados.

Una estrella así construida se denota por n/q, (notación de *Schläfli*) donde n es el número de vértices del polígono regular del que procede y $q-1$ es el número de vértices que se dejan sin unir en cada paso. Es decir, se unen los vértices P_i y P_{i+q}, $q = 1,..., n-1$, con la identificación $P_n \equiv P_{i+n}$.

Estrella es la figura obtenida cuando todos los vértices del polígono inicial están conectados.

Con la definición, se verifican las siguientes propiedades:

1. Si $q = 1$, se obtiene el n-polígono inicial.

2. Si no se considera orientación en los segmentos que unen los vértices, la estrella denotada por n/q coincide con la $n/(n\text{-}q)$. Por tanto, para un polígono regular de n lados las estrellas distintas que se pueden construir son: $n/1$, $n/2$, $n/3$,..., n/q con $q < n/2$.

3. Si n es par, la construcción de la estrella n/q con $q = n/2$ sólo traza segmentos que dividen al polígono en dos partes de igual área. Ver un ejemplo para $n = 8$ en la figura 2.

4. Si n y q son primos entre sí, al construir una estrella se obtiene un único polígono llamado polígono estrellado. En cualquier otro caso, la estrella no es un polígono, sino que está formada por varios polígonos.

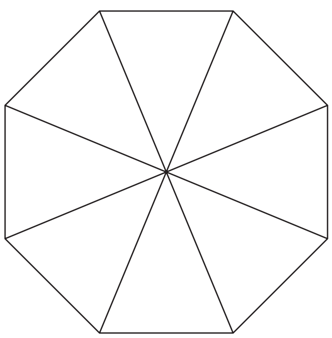


Figura 2. Estrella 8/4 derivada del octógono

En la figura 3 aparecen representadas las estrellas 5/2 y 6/2, conocidas con los nombres de pentagrama (símbolo de los Pitagóricos) y hexagrama (Estrella de David o sello de Salomón) respectivamente. La primera se identifica a su vez con la estrella denotada por 5/3 y es un polígono de cinco lados. La segunda que no es un polígono, está formada por dos triángulos equiláteros girados 60º uno respecto de otro.

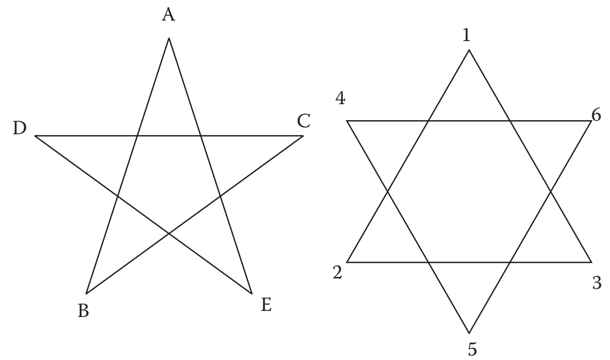


Figura 3. Pentagrama (un polígono) y Hexagrama (dos triángulos)

Prolongar lados

Sea P_n un polígono regular convexo de n lados. Se prolongan sus lados hasta que las rectas que los contienen se corten por última vez.

En este proceso se llama *estrella* a la figura que se obtiene en cada intersección de las prolongaciones de los lados del polígono.

Es claro que no siempre se obtiene un único polígono, sino que la estrella puede estar formada por varios. En caso de que la estrella sea un solo polígono, a éste se le llama *polígono estrellado*.

Las estrellas obtenidas por este método contienen en su interior al polígono inicial y son semejantes a las construidas según el método *conectar vértices*, donde el polígono de partida queda circunscrito a las estrellas trazadas.

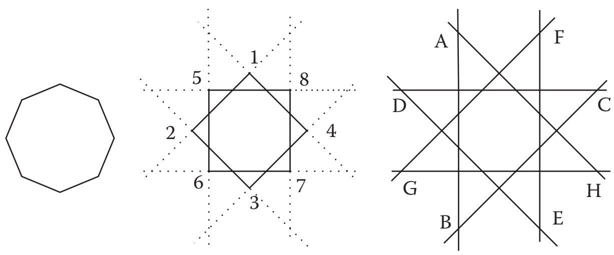


Figura 4. Estrellas derivadas del octógono

En la figura 4, la estrella denotada con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 no es un polígono, sino dos cuadrados girados 45º uno respecto del otro. Sin embargo, la denotada por *A, B, C, D, E, F, G, H,* sí que es un polígono de lados los segmentos *AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH y HA,* y vértices los puntos *A, B, C, D, E, F, G y H.*

Según el diccionario de la Real Academia, una estrella es un objeto de figura de estrella ya con rayos que parten de un centro común, ya con un círculo rodeado de puntas.

Resaltar contornos

Conectando los 2*n* segmentos externos de una estrella, construida según cualquiera de los procedimientos anteriores, resulta un polígono cóncavo que también se denomina *estrella*.

La estrella obtenida según este método se denota por |*n/q*|.

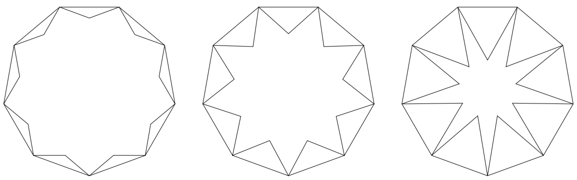


Figura 5. Estrellas | 9/q |, q = 2, 3, 4 derivadas del eneágono

Es evidente que esta *estrella* es un polígono de 2*n* lados iguales que posee las mismas simetrías que el n-polígono regular de partida. Tiene *n* vértices o *puntas* de la estrella y otros *n* vértices o *mellas* de la estrella.

En la figura 6 se muestra la diferencia entre las estrellas 8/2 y |8/2|. La primera no es un polígono (está formada por dos cuadrados) y la segunda es un polígono cóncavo de dieciséis lados y dieciséis vértices.

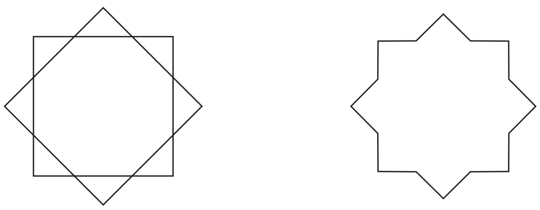


Figura 6. Estrellas 8/2 (izquierda) y |8/2| (derecha)

Hacemos notar que con esta construcción siempre se obtiene un único polígono cóncavo que se llamará simplemente *estrella*; sin embargo no lo incluiremos en la categoría de *los polígonos estrellados*, en los que se consideran, además de los segmentos del contorno, los segmentos interiores que determinaron la estrella.

Figura 7a. Diseños con estrellas |5/2|

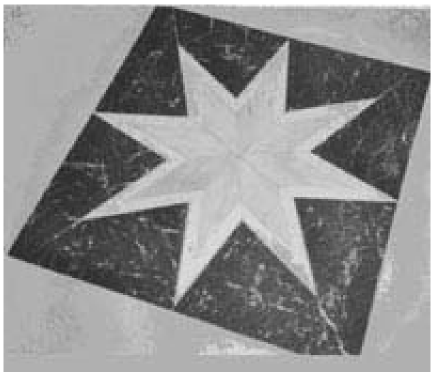


Figura 7b. Diseños con estrellas |8/3|

Formas estrelladas

Anteriormente se ha definido el concepto de estrella desde un punto de vista matemático. En nuestro entorno se pueden observar otras figuras rematadas en puntas que poseen cierta regularidad y que no se adaptan a las definiciones dadas. Estas formas que en lenguaje cotidiano son también llamadas estrellas, en el contexto de este artículo las denominaremos *formas estrelladas*.

A continuación se muestran métodos de construcción de algunas de ellas.

Por simetrías

En primer lugar se trazan los segmentos que unen el centro de un n-polígono regular con cada vértice del mismo, determinando n triángulos isósceles. Seguidamente se construyen los triángulos simétricos de éstos respecto al lado del polígono, obteniéndose así una *forma estrellada* compuesta por 2*n* triángulos.

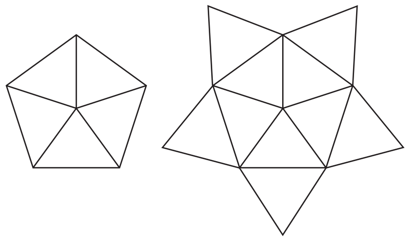


Figura 8. Forma estrellada de diez triángulos

En la parte central de la figura 8 se muestra esta forma estrellada para $n = 5$. La forma radiada de la derecha de la misma figura, es una *estrella jeroglífica* del antiguo Egipto considerada símbolo del tiempo por la relación de su ángulo (72º) con el número de horas (720) de un mes de treinta días.

> *Si en un polígono regular convexo se prolongan sus lados hasta que las rectas que los contienen se corten por última vez, se llama estrella a la figura que se obtiene en cada intersección de las prolongaciones.*

Composición de cuadriláteros

Uniendo cada uno de los n vértices *mella* del polígono cóncavo |n/q| con su centro, se obtiene una *forma estrellada* compuesta por cuadriláteros, figura 9.

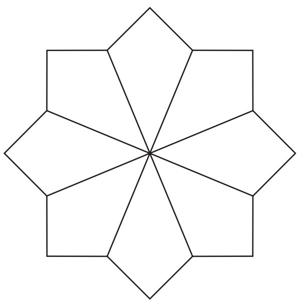


Figura 9a. Forma estrellada de ocho cuadriláteros

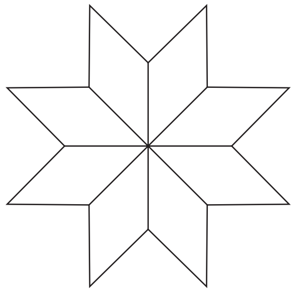


Figura 9b. Forma estrellada de ocho cuadriláteros

En el caso $n = 6$, la forma estrellada generada en este proceso está diseccionada en seis rombos de ángulos 60º y 120º, figura 10a. Estos rombos son llamados diamantes. A veces también se incluye en la denominación de diamante a los rombos de ángulos 45º y 135º, como los de la figura 9b.

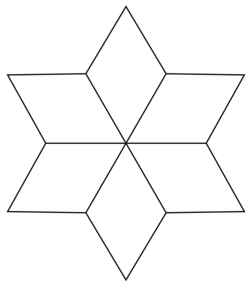


Figura 10a. Forma estrellada de seis rombos

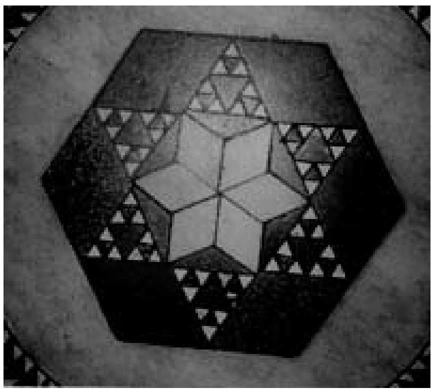


Figura 10b. Un ejemplo en pavimento

Yuxtaposición de triángulos

Pueden construirse *formas estrelladas* tomando como base cualquier polígono regular y yuxtaponiendo triángulos iguales en cada uno de sus lados. El procedimiento de la sección *Por simetrías* es un caso particular de este método.

Consideremos el caso en el que los triángulos yuxtapuestos son isósceles y rectángulos con longitud de los catetos igual a la del lado del polígono inicial, figura 11.

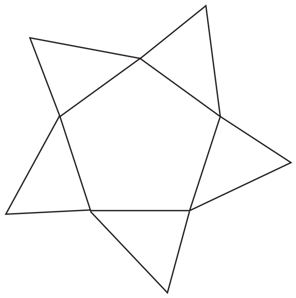


Figura 11a. Forma estrellada por yuxtaposición de triángulos

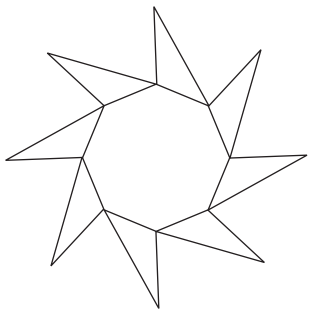


Figura 11b. Forma estrellada por yuxtaposición de triángulos

Los trazados geométricos de algunas bóvedas de crucería son formas estrelladas obtenidas por yuxtaposición de triángulos isósceles cuyo lado desigual es el lado de un octógono regular. Así por ejemplo, presentan estas formas el Cimborrio del Conventual de San Francisco en Medina de Rioseco (Valladolid) y varias bóvedas en la Catedral de Burgos, como las de las capillas del Condestable, la de la Consolación y el Cimborrio.

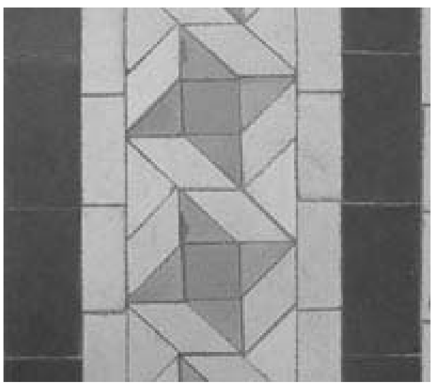


Figura 12. Forma estrellada en una franja de Gaudí

Actividades de investigación para el aula

Los contenidos desarrollados en el artículo proporcionan elementos para diseñar actividades de investigación individual o en grupo que pueden adaptarse a los niveles de Enseñanza Secundaria y Bachillerato. Los contenidos del currículo de Matemáticas I de primero de Bachillerato están intrínsecamente relacionados con las propuestas que se incluyen.

Con estas actividades se puede:

- Profundizar en los contenidos geométricos a partir de elementos tangibles.
- Buscar aplicaciones de los procedimientos matemáticos aprendidos en el aula para utilizarlas en situaciones extraescolares.
- Promover un proceso de enseñanza-aprendizaje satisfactorio para alumnos y profesores.
- Incorporar herramientas de distintos campos de las matemáticas a la resolución de problemas relacionados con el tema en estudio.
- Encontrar elementos del entorno cotidiano susceptibles de ser analizados desde la teoría de polígonos y estrellas.
- Investigar nuevos procedimientos para construir *formas estrelladas*.

Las actividades que se proponen, a modo de pequeñas investigaciones, abarcan aspectos diversos que constituyen la base del aprendizaje significativo: repaso y refuerzo, adquisición de conocimientos nuevos, relación, elaboración, análisis y síntesis, etc.

> *Las actividades que se proponen abarcan aspectos diversos que constituyen la base del aprendizaje significativo.*

Los enunciados se pueden adaptar a la diversidad de las capacidades y conocimientos de los alumnos, utilizando una metodología abierta y flexible donde el alumno pueda investigar según sus posibilidades y nivel.

La propuesta metodológica se concretará en las siguientes fases:

1. Fase de sensibilización y diagnóstico de preconcepciones.

2. Fase de familiarización de los contenidos.

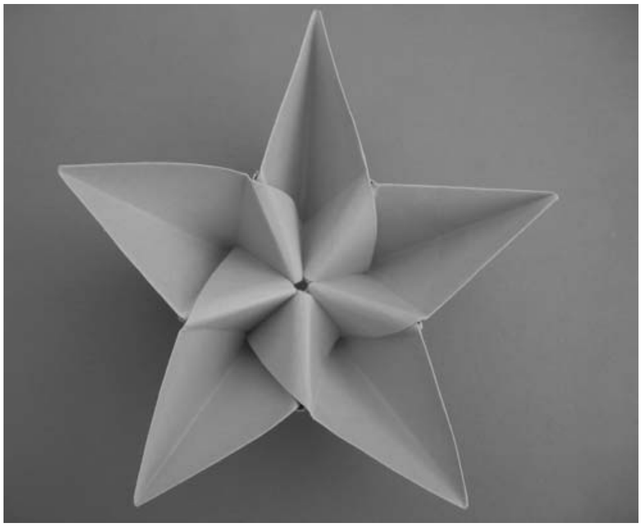
3. Fase de resolución.

4. Fase de comunicación y validación de los resultados obtenidos.

Pueden construirse formas estrelladas tomando como base cualquier polígono regular y yuxtaponiendo triángulos iguales en cada uno de sus lados.

Propuesta de actividades
Para desarrollar las propuestas de actividades que se detallan a continuación, los alumnos deberán conocer los siguientes contenidos:

- Polígonos: Propiedades de un rombo. Ángulos interior y central de un polígono regular.
- Trigonometría: Teorema de Pitágoras. Fórmulas de las razones trigonométricas del ángulo mitad. Teoremas del seno y del coseno.
- Movimientos en el plano: Giro de centro en un punto y ángulo dado. Simetría respecto a un eje.



Enunciados de actividades
Actividad 1

Figura 13. Motivo decorativo

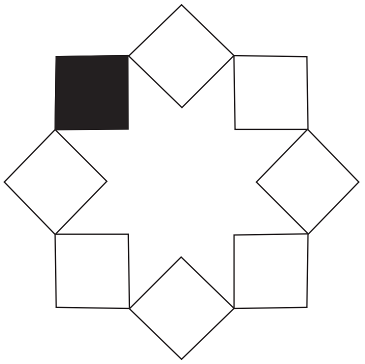


Figura 14. Esquema

Investigar la geometría de la figura 13:

1. Describir los polígonos convexos, estrellas, polígonos estrellados y formas estrelladas que aparecen.

2. Observando el octógono central interior del motivo de la figura 13, verificar que las prolongaciones de sus lados originan las estrellas 8/2 y 8/3.

3. Suponiendo que la medida del lado del octógono interior es una unidad, calcular las áreas de los diferentes tipos de triángulos que aparecen.

4. Comprobar, por ejemplo utilizando el programa Cabri Géomètre, que un cuadrado girado 135º alrededor de uno de sus vértices, genera las dos estrellas |8/2| y |8/3| derivadas del octógono regular como en la figura 14.

5. Calcular la longitud del lado del cuadrado generador y la del lado del octógono exterior, suponiendo, también, que el lado del octógono interior mide una unidad.

6. Hallar las áreas de los octógonos interior y exterior de la figura 13 y la razón entre ellas.

Actividad 2

Figura 15. Logotipo Tele Madrid

1. Describir los polígonos convexos y estrellas que aparecen en la figura 15.

2. Calcular los ángulos del rombo sombreado en la figura 16a.

3. ¿Qué ángulo debe girar el rombo y con qué centro, para generar el pentágono regular exterior y la estrella interior |5/2| de la figura 16a?

4. Con un proceso análogo se ha obtenido la figura 16b. Responder a las mismas preguntas que en el caso anterior.

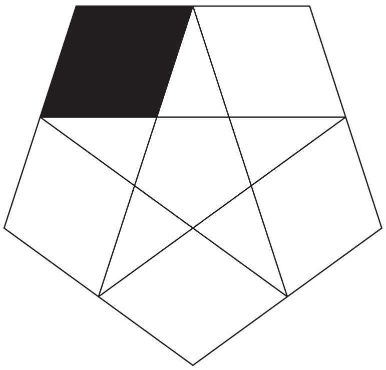


Figura 16a

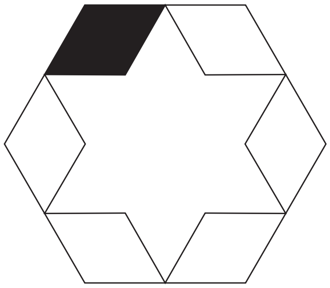


Figura 16b

5. Generalizar los casos anteriores, analizando y contestando a la siguiente pregunta:

6. ¿Girando n veces un rombo de ángulos ρ y $\mu = \pi - \rho$, se obtiene la estrella $|n/2|$, siendo ρ el ángulo interior de un n-polígono?

Actividad 3

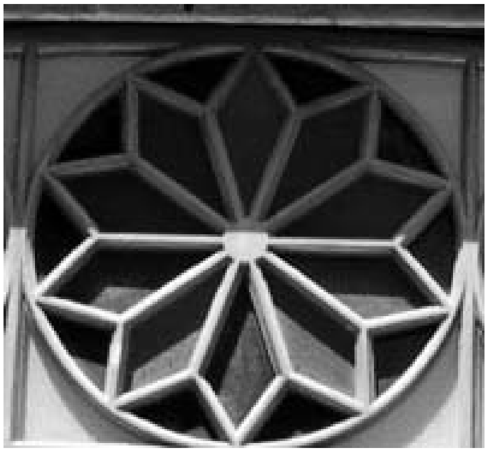


Figura 17. Motivo decorativo

La forma estrellada de la figura 17 está formada por diez cuadriláteros construidos a partir de la estrella |10/2| según el procedimiento descrito.

1. Comprobar que el ángulo α en la punta de las estrellas n/q y $|n/q|$, mide:

$$\alpha = \frac{n-2q}{n}\pi$$

2. A partir del resultado anterior, deducir la medida de los ángulos del cuadrilátero generador de la figura 17.

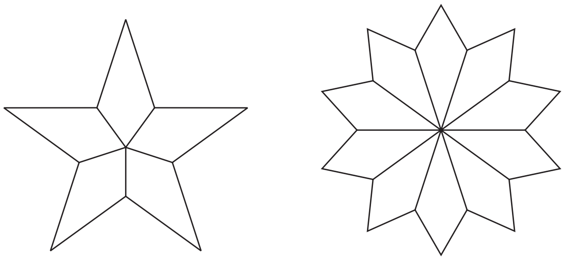


Figura 18. Formas estrelladas compuestas por cuadriláteros

En la parte izquierda de la figura 18 se observa una forma estrellada compuesta por cinco cuadriláteros obtenida según el método mencionado anteriormente aplicado a la estrella |5/2|.

3. Comprobar que los cuadriláteros de ambas formas estrelladas son semejantes. Averiguar en qué condiciones son iguales.
4. Construir las estrellas 10/4 y 5/2. Relacionar la representación geométrica de ambas con la equivalencia de las fracciones que las denotan. Proponer ejemplos de casos similares al dado.

Actividad 4

En la figura 5 están representadas las estrellas derivadas del eneágono regular denotadas por $|9/q|$, con q = 2, 3 ó 4. Suponiendo que el lado del eneágono inicial mide una unidad:

1. Calcular las longitudes de los lados de los polígonos cóncavos $|9/q|$ representados en la figura 5.
2. Calcular las longitudes de los lados de los polígonos estrellados 9/2 y 9/4, así como la longitud del lado de uno de los triángulos que forman la estrella 9/3. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

COXETER, H.S.M. (1969): *Introduction to Geometry*, John Wiley Sons, Inc.

FERNÁNDEZ, I., REYES, E.(2003): *Geometría con el hexágono y el octógono*, Proyecto Sur de Ediciones.

GRÜNBAUM, B., SHEPHARD, G.C.(1987): *Tilings and Patterns*, Freeman and Company.

GÓMEZ MARTÍNEZ, J.(1998): *El gótico español de la edad moderna: Bóvedas de crucería*, Secretariado de Publicaciones e Intercambio Científico, Universidad de Valladolid.

GUILLÉN SOLER, G. (1997): *Poliedros*, Síntesis.

KAPPRAF, J. (2002): *Beyond Measure*, World Scientific.

KAPPRAF, J., ADAMSON W. (2003): "A unified Theory of Proportion", *Conference Proccedings ISAMA-BRIDGES*, ISAMA Bridges.

SAVIO, D., SURYANARAYAN, Y., CHEVICHEV E.R. (1993): "Polinomials and Regular Polygons", *Amer. Math. Monthly*, n.º 100, 657-661.