SUMA 47
Noviembre 2004, pp.59-62

Las funciones racionales a través de su descomposición

En las matemáticas del Bachillerato, la representación gráfica de funciones racionales suele abordarse como un caso más de la representación general de funciones, aunque con una atención especial en el cálculo de las asíntotas. Para el cálculo de primitivas de funciones racionales se usa la descomposición de las mismas en fracciones simples. Se trata aquí de aplicar esta descomposición en la representación gráfica haciendo mención de las ventajas sobre el método que generalmente se suele usar.

In Maths at the Spanish non-compulsory Secondary Education, graphic representation of rational functions is usually tackled as one of the so many cases of the general representation of functions, with special attention to Asymptote calculus, though. Deconstruction into simpler fractions is used for the calculation of rational primitives functions. This article deals with applying this deconstruction to the graphic representation emphasizing its advantages over the method ordinarily used.

La representación gráfica de las funciones racionales en las matemáticas del Bachillerato suele tener un estudio poco diferenciado respecto al resto de funciones, al menos es así en la mayoría de libros de textos, por no decir en casi todos.

Por otra parte, en el cálculo de primitivas de funciones racionales se detalla el procedimiento de descomposición de una fracción impropia (grado del polinomio del numerador superior o igual al grado del polinomio del denominador) en suma del polinomio cociente más la fracción propia cuyo numerador es el resto de la división. Esto es:

$$f(x)=\frac{p(x)}{d(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{d(x)}$$

siendo, por el teorema fundamental de la división

$$p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$$

y el grado de *r(x)* menor que el grado de *d(x).*

Uno de los procedimientos más usuales en Matemáticas es la descomposición de cualquier ente matemático en otros más simples. En nuestro caso descomponemos una fracción impropia como suma de un polinomio y una fracción propia.

Siguiendo con la descomposición de *r(x)/d(x)*, se van obteniendo términos de la forma

$$\frac{a_1}{x-x_1},\frac{a_1'}{\left(x-x_1\right)^2},\ldots,\frac{a_2}{x-x_2},\frac{a_2'}{\left(x-x_2\right)^2},\ldots,\frac{\alpha_1x+\beta_1}{x^2+b_1x+c_1},\ldots$$

cuyos denominadores surgen de la descomposición de *d(x)*.

A continuación veremos algunos aspectos de la representación gráfica de funciones racionales en los que la descomposición anteriormente descrita presenta importantes ventajas sobre el método general de representación gráfica de funciones. Con fines didácticos tomaremos como ejemplos las representaciones gráficas de las funciones

$$f(x)=\frac{x^2-x-2}{x-3} \quad \text{y} \quad g(x)=\frac{x^2+6x+1}{x^3+x^2+3x-5}$$

Obtención de asíntotas no verticales

Una de las características más interesantes de las funciones racionales es el comportamiento asintótico de muchas de ellas.

Agustín Colell Martínez
IES Ramón Berenguer IV. Amposta. Tarragona.

Las asíntotas no verticales se obtienen, directamente, de la primera descomposición de la función racional como suma del polinomio cociente más la fracción residual

$$f(x)=\frac{p(x)}{d(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{d(x)}$$

Para valores de x tendentes a más o menos infinito el último término de la expresión tiende a 0 por ser el grado del denominador mayor que el grado del numerador, con lo cual la función racional tenderá al polinomio *q(x)*.

Si este polinomio es de primer grado, la función tiene a la recta *y=q(x)* como asíntota oblicua, si es de grado 0, entonces es asíntota horizontal. Si el grado de *q(x)* es superior a 1, no tiene asíntotas oblicuas; en este caso tiene ramas parabólicas en la dirección del eje *OY*.

Veámoslo con los ejemplos.

Ejemplo1: En la función

$$f(x)=\frac{x^2-x-2}{x-3}$$

dividiendo obtenemos

$$f(x)=x+2+\frac{4}{x-3}$$

Para valores tendentes a más o menos infinito, el término $4/(x-3)$ tiende a 0, luego *f(x)* se aproxima a $y = x + 2$, y por lo tanto, esta recta es asíntota de la función.

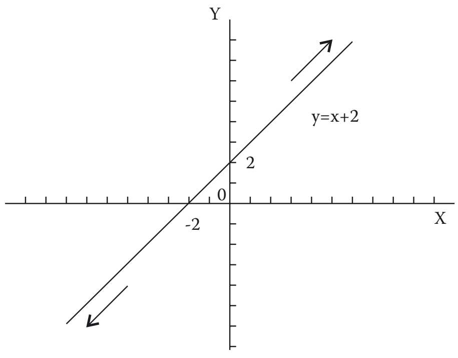

Figura 1

Ejemplo 2: Función

$$g(x)=\frac{x^2+6x+1}{x^3+x^2+3x-5}$$

En este caso la fracción ya está reducida. La asíntota es la recta $y = 0$, es decir, el eje *0X*.

El método más extendido para obtener la asíntota $y = mx + n$, si existe, requiere la obtención de m y n mediante sendos límites muy simples, pero, por lo general no se demuestra o no se justifica el porqué de estos límites.

Obtención de asíntotas verticales

Descomponiendo la fracción residual en fracciones simples obtenemos diferentes términos

$$\frac{a_1}{x-x_1},\frac{a_1'}{(x-x_1)^2},\ldots,\frac{a_2}{x-x_2},\frac{a_2'}{(x-x_2)^2},\ldots,\frac{\alpha_1x+\beta_1}{x^2+b_1x+c_1},\ldots$$

Los términos del tipo

$$\frac{\alpha_1x+\beta_1}{x^2+b_1x+c_1}$$

están acotados puesto que el denominador nunca se anula, además, para x tendente a más o menos infinito, la fracción tiende a 0 por ser el denominador de grado superior al del numerador.

En un entorno de x_1, los términos con denominador $(x - x_1)$ tienden a infinito y los restantes toman valores acotados, por lo que se pueden despreciar.

La función *f(x)* tenderá a más o menos infinito dependiendo del límite lateral y la paridad del exponente de la potencia.Lo podemos ver en el ejemplo 1.

En un entorno de $x = 3$ el término $4/(x-3)$ domina sobre el término $x + 2$ con lo cual el límite lateral en $x = 3$ de la función coincide con el del término $4/(x-3)$. Sólo es necesario estudiar el signo de la fracción para saber si el límite lateral es más o menos infinito.

Para el límite lateral por la izquierda, el denominador $x - 3$ es negativo luego el signo de la fracción es negativo. En el cálculo del límite lateral por la derecha, el signo del denominador es positivo, luego la fracción también es positiva.

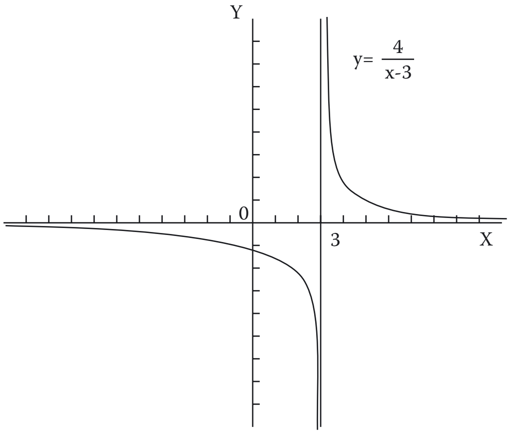

Figura 2

Para el ejemplo 2 obtenemos

$$g(x)=\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x^2+2x+5}$$

El primer término tiene una asíntota vertical en $x = 1$, con límite lateral por la izquierda menos infinito y límite lateral por la derecha más infinito.

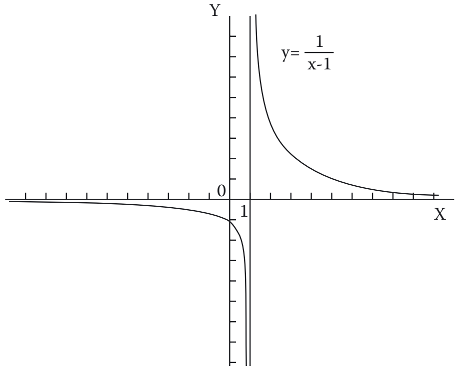

Figura 3

El segundo término siempre es positivo ya que el denominador es la parábola $y = x^2 + 2x + 5$ cuyo mínimo se encuentra en (-1, 4).

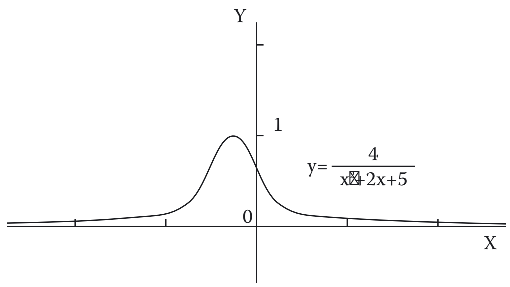

Figura 4

Representación a grandes trazos

En los casos sencillos las asíntotas determinan la representación gráfica.

Para la función *f(x)*, del comportamiento de la función en las proximidades de la asíntota $x = 3$ se puede deducir, además, si la función se aproxima a la asíntota $y = x + 2$ por encima o por debajo. Superponiendo y ajustando las figuras 1 y 2 resulta:

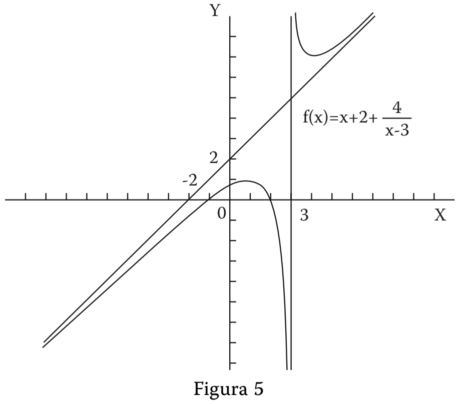

Figura 5

Para la función *g(x)* tendremos en cuenta la figura 3 y la representación gráfica del segundo término, figura 4. Hay que hacer aquí dos consideraciones importantes. La primera es que para x tendente a menos infinito el término $1/(x\text{-}1)$ predomina, en valor absoluto, sobre $4/(x^2+2x+5)$ por ser el denominador de éste de grado 2, por lo tanto la función tenderá por la izquierda a la asíntota *OX* con valores negativos. También puede observarse este hecho analizando el signo de la fracción *g(x)* para x tendente a menos infinito: el numerador es positivo por ser de grado par, en tanto que el denominador es negativo por ser un polinomio de grado impar.

La segunda consideración es que en el punto máximo del segundo término, $x = -1$, la función toma el valor $g(-1) = ½$, en cuyo entorno la gráfica está por encima del eje *OX*.

Dicho esto, la suma de las gráficas de las figuras 3 y 4 resulta ser la función *g(x),* representada en la figura 6.

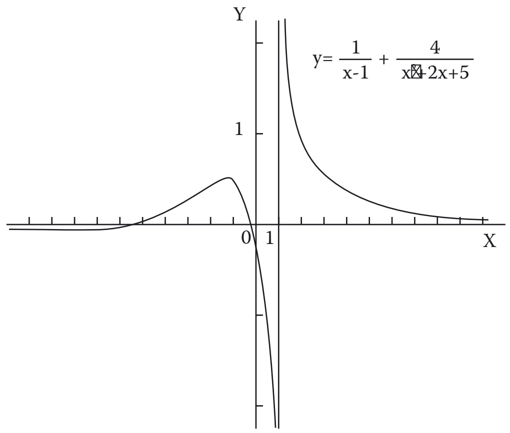

Figura 6

No se detalla el cálculo de los dos puntos de corte con el eje *OX* y de los dos puntos de inflexión. Sólo se pretende obtener la representación grosso modo de la función.

Llegados a este punto cabe significar que hemos basado la representación gráfica de las dos funciones en el estudio de sus asíntotas y en la suma gráfica de las funciones más simples en las que hemos descompuesto *f(x)* y *g(x).*

Veamos ahora que también para el estudio local de las funciones la descomposición de la fracción impropia como suma del polinomio cociente más fracciones propias puede resultar interesante.

Derivadas

El estudio local de la función requiere la búsqueda de máximos, mínimos relativos y puntos de inflexión, para lo cual será necesario calcular la derivada. También en la obtención de la derivada encontramos ventajas.

En el ejemplo 1 es mucho más fácil derivar

$$f(x) = x + 2 + \frac{4}{x-3} \quad \text{que} \quad f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x-3}$$

Así, las derivadas de ambas expresiones quedan:

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-3)^2} \quad \text{y} \quad f'(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{(x-3)^2}$$

Igualando *f(x)* a 0 en la primera expresión obtenemos

$$\frac{4}{(x-3)^2} = 1$$

de donde $(x - 3)^2 = 4$.

Extrayendo la raíz cuadrada y pasando el 3 al segundo término obtenemos finalmente x = 3 ± 2.

En el caso de la función del ejemplo 2,

$$g'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - 4\frac{2x+2}{\left(x^2+2x+5\right)^2}$$

La obtención de la derivada también resulta ser más fácil, aunque la búsqueda de las raíces de esta expresión sigue siendo inabordable.

Otras propiedades y consideraciones

A posteriori, en la gráfica de *f(x)* (figura 5) puede observarse que el punto de corte de las asíntotas es centro de simetría. Las rectas $y = x + 2$ y $x = 3$ se cortan en el punto $C(3,5)$.

Podemos comprobar la simetría viendo que

$$\frac{f(3-t) + f(3+t)}{2} = 5$$

para todo t diferente de 3.

También aquí presenta ventajas la descomposición en fracciones simples.

$$f(3-t) = 3 - t + 2 + \frac{4}{3-t-3} = 5 - t - \frac{4}{t}$$

$$f(3+t) = 3 + t + 2 + \frac{4}{3+t-3} = 5 + t + \frac{4}{t}$$

y la semisuma es 5.

Si en la descomposición aparecen términos de grado mayor que uno $a_1'/(x-x_1)^2$... solamente tenemos que modificar el signo del límite lateral según sea la multiplicidad y el signo del coeficiente a_1'.

Análogamente a como hemos visto para

$$\frac{4}{x^2+2x+5}$$

puede demostrarse que los términos $(\alpha_1 x+\beta_1)/(x^2+b_1x+c_1)$ no afectan a la existencia de las asíntotas verticales, aunque sí afectan a la existencia y localización de los puntos máximos, mínimos e inflexión.

Conclusiones

Es de destacar, de todo lo desarrollado en este artículo, que el estudio de las fracciones que resultan de la descomposición de una función racional es siempre mucho más simple que la función original.

En ocasiones, para funciones racionales de cierto grado de dificultad, la única manera de obtener una gráfica de forma aproximada es recurrir a la suma de las gráficas de los términos que obtenemos en la descomposición, como se ha hecho con la función *g(x)*.

Didácticamente los casos más frecuentes e interesantes son aquellos en los que el grado del numerador es superior en una unidad al grado del denominador.

Si el grado del numerador es 2 y el grado del denominador es 1 (como la función *f(x)* que hemos tomado como ejemplo 1) nos encontramos ante la suma de una recta y una hipérbola.

Si el grado del numerador es tres y el denominador es el producto de dos binomios de grado uno estaremos ante la suma de una recta y dos hipérbolas.

En las ocasiones en que he tenido oportunidad de aplicar la descomposición descrita en los párrafos anteriores he podido comprobar que tal descomposición ayuda sobremanera a la comprensión, por parte del alumnado, del comportamiento de las funciones racionales en el infinito. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

REY PASTOR, J. y otros (1952): *Análisis matemático*, Kapeluz.

PISKUNOV: *Cálculo diferencial e integral*, Montaner y Simón S.A.