SUMA 37
junio 2001, pp. 63-66

Una propiedad del triángulo isósceles

Juan-Bosco Romero Márquez

ARTÍCULOS

En este artículo se presenta una interesante propiedad de los triángulos isósceles, usando como apoyo técnicas y propiedades de Geometría básica.

EN ESTE ARTÍCULO de carácter elemental, sobre la geometría métrica plana del triángulo, damos una propiedad de los triángulos isósceles. Así mismo, ofrecemos otras caracterizaciones de los triángulos isósceles, que se pueden encontrar en la biblografía.

Los conceptos y resultados previos que se utilizan se enmarcan dentro de la Geometría y la Trigonometría elemental de la enseñanza actual, es decir: triángulos, semejanza y trigonometría.

Todos estos ingredientes, junto con la imaginación, creación e intuición matemática forman las claves esenciales de esta experiencia.

Resultados

Comenzamos esta sección dando un resultado clásico sobre los triángulos equiláteros, a través del siguiente:

Teorema 1

Dado un triángulo equilátero ABC, de lado a, en el que tomamos un punto arbitrario interior P, desde el cual se trazan las perpendiculares PD, PE y PF a los lados del triángulo BC, CA y AB, respectivamente, se verifica que:

$$k = \frac{PD + PE + PF}{BD + CE + AF}$$

es constante.

Demostración

Véase la figura 1. Trazamos por el punto P tres rectas paralelas a los lados del triángulo. Los tres triángulos que así se forman son también equiláteros y la suma de sus lados es igual al lado a del triángulo ABC.

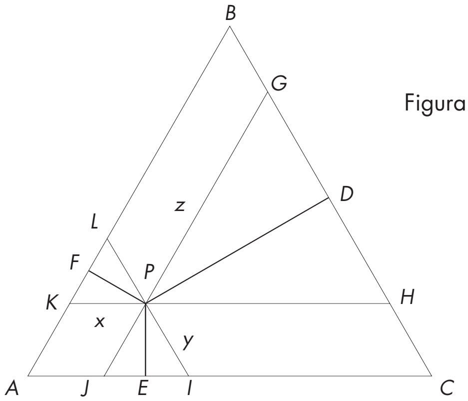


Figura 1

$a = x + y + z$

Por consiguiente, la suma de las tres alturas es igual a la altura h del triángulo ABC, por lo tanto:

$$PD + PE + PF = h = a \cdot \text{sen}60 = a\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por otra parte, la suma $BD + CE + AF$ es igual a la suma de los lados de los tres triángulos trazados más la suma de las mitades de estos lados, o sea de todos los triángulos indicados en la figura 1 deducimos que:

$$x + y + z = a,\ BD = x + z/2,\ CE = z + y/2,$$
$$AF = y + x/2;\ BD + CE + AF = (3/2)\ a.$$

Por tanto, al sustituir todo lo anterior en k, obtenemos que

$$k = 1/\sqrt{3}$$

Conjetura 1. ¿Es cierto el recíproco de este teorema?

De otra parte, en Clemens, O'Daffer y Cooney, encontramos un método de solución de este problema para demostrarlo como una técnica más de resolver problemas en matemáticas: utilizando para ello, la prueba del mismo en los casos particulares según sea la posición del punto P, en el triángulo equilátero dado.

Teorema 2

Sea ABC un triángulo isósceles. Si K es un punto cualquiera interior a la base BC, y si M, N son los puntos proyección perpendicular de K sobre los lados AB y AC, respectivamente y, sean P y Q las proyecciones perpendiculares de M y N sobre el lado BC, entonces se verifican:

i) $KM + KN$ es constante;

ii) $MP + NQ$ es constante.

Demostración

En todo lo que sigue ver la figura 2. Los ángulos del triángulo se denotan de la misma forma que sus vértices. Por tanto si ABC es un triángulo isósceles de base $a = BC$, se tiene que: $A + 2B = 180°$.

Sean $AB = AC = b$, D = ángulo determinado por los segmentos $AK = k$ y $AH = h$, siendo H el pie de la perpendicular trazada desde A, a la base BC.

i) Por todo lo dicho en el enunciado del teorema, los tres triángulos AKM, AKN y AHK son rectángulos en los vértices M, N y K respectivamente, y tenemos que:

$$KM = k \cdot \text{sen}(A/2 - D)$$
$$KN = k \cdot \text{sen}(A/2 + D) \qquad [1]$$

$$h = AH = AK \cdot \cos D = k \cdot \cos D$$
$$\cos B = \text{sen}(A/2) = a/2b. \qquad [2]$$

Sumando miembro a miembro las fórmulas de [1] y teniendo en cuenta [2], y que $A + 2B = 180°$, llegamos a:

$$KM + KN =$$
$$k \cdot \text{sen}(A/2 - D) + k \cdot \text{sen}(A/2 + D) =$$
$$k \cdot \text{sen}(90 - B - D) + k \cdot \text{sen}(90 - B + D) =$$
$$k[\cos(B + D) + \cos(B - D)] =$$
$$= k \cdot 2\cos B \cdot \cos D =$$
$$2 \cdot \cos B.(k \cdot \cos D) =$$
$$= 2 \cdot a/2b \cdot h = ah/b \qquad [3]$$

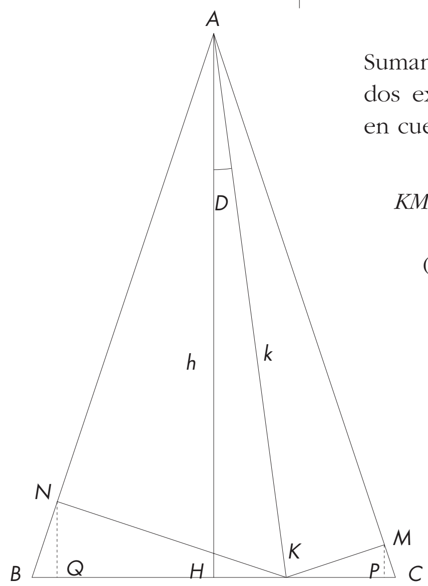
expresión que sólo depende de los lados a y b del triángulo, que es lo que queríamos demostrar.

ii) De la misma forma para los triángulos rectángulos MPK, NQK en los vértices P y Q, respectivamente, tenemos:

$$MP = KM \cdot \text{sen}(A/2)$$
$$NQ = KN\ \text{sen}(A/2). \qquad [4]$$

Sumando miembro a miembro las dos expresiones de [4] y teniendo en cuenta i) obtenemos:

$$MP + NQ =$$
$$KM \cdot \text{sen}(A/2) + KN\ \text{sen}(A/2) =$$
$$(KM + KN) \cdot \text{sen}(A/2) =$$
$$(ah/b) \cdot (a/2b) = ha^2/2b^2 \qquad [5]$$



$a = BC$
$b = AB = AC$
$B = C$

Figura 2

Observaciones y comentarios

1. Es evidente que las dos propiedades i) y ii) son equivalentes ya que los cálculos algebraicos efectuados son reversibles.
2. ¿Qué valor toman las dos relaciones i) y ii) para el caso de los triángulos equiláteros y rectángulos?
3. Se puede probar que las relaciones i) no se verifica para los triángulos rectángulos no isósceles, aunque sí es cierto ii).
4. En Mitrinovic, Pecaric y Volonec (1989), aparecen los dos teoremas anteriores propuestos como problemas.

Vamos a ensayar si, en cierto sentido, el teorema 2 verifica el recíproco.

Sea *ABC* el triángulo arbitrario de lados a, b y c, y denotamos por h y w, a la altura y bisectriz correspondientes al lado a. Sea $2p = a + b + c$ (perímetro), y llamamos R al radio de la circunferencia circunscrita al triángulo. Supongamos que se verifica, para el punto H pie de la altura sobre el lado $BC = a$, la relación dada en i). Esto es:

$$HM + HN = ah/b \qquad [6]$$

donde los puntos M y N son respectivamente, las proyecciones perpendiculares de H sobre los lados $AC = b$ y $AB = c$ (ver figura 3).

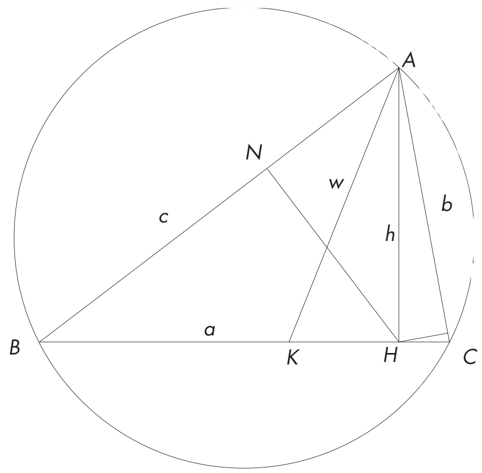


Figura 3

Si tenemos en cuenta la relación

$$h = w\cos\frac{B-C}{2}$$

entre la altura h y la bisectriz w, podemos poner:

$$h(\cos B+\cos C) = 2h\cos\frac{B+C}{2}\cdot\cos\frac{B-C}{2} = h\,\frac{2R\cdot \mathrm{sen}A}{2R\cdot \mathrm{sen}B}$$

$$2\cos\left(\frac{180-A}{2}\right)\cdot\cos\frac{B-C}{2} = \frac{\mathrm{sen}A}{\mathrm{sen}B}$$

$$2\cdot\mathrm{sen}\,\frac{A}{2}\cdot\mathrm{sen}B\cdot\cos\frac{B-C}{2} = 2\cdot\mathrm{sen}\,\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}$$

$$\mathrm{sen}B\cdot\cos\frac{B-C}{2} = \cos\frac{A}{2}$$

$$\mathrm{h}\cdot\mathrm{sen}B = c\cdot\mathrm{sen}^2 B = w\cos\frac{A}{2} = \frac{2bc}{b+c}\cos^2\frac{A}{2} \qquad [7]$$

Teniendo en cuenta las fórmulas del seno de un ángulo y seno del ángulo mitad en función del semiperímetro y de los lados a, b, y c. Después de operar y simplificar obtenemos:

$$a^2(b-c) = (b-c)^2(b+c) \qquad [8].$$

Desde [8] tenemos dos posibilidades:

1. Si $b = c$, entonces el triángulo es isósceles; o
2. Si b es distinto de c tenemos

   $$a^2 = b^2 - c^2,\ b^2 = a^2 + c^2$$

   es decir, el triángulo es rectángulo en el ángulo B.

Conjetura 2. En las condiciones anteriores supongamos que para el punto H, se verifica ii) del teorema 2. ¿De qué tipo del triángulo se trata?

Distintas caracterizaciones de los triángulos isósceles

En todos los resultados que se proponen, ver los que son equivalentes y los que admiten o no un recíproco:

1. Un triángulo isósceles es el que tiene dos lados iguales.
2. Un triángulo isósceles es el que tiene dos ángulos iguales.
3. *Teorema de Lehmus-Steiner.* Cualquier triángulo que tiene dos bisectrices iguales (medidas desde el vértice a lado opuesto) es isósceles (ver Coxeter y Greitzer, 1993).

   Utilizando que el cuadrado de la longitud de la bisectriz correspondiente al vértice A viene dada por:

   $$bc\left(1-\left(\frac{a}{b+c}\right)^2\right)$$

   de aquí obtener también una demostración directa del Teorema de Lehmus-Steiner.

4. Demostrar que si en un triángulo se verifica la relación:

$$\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{\cos B}$$

es isósceles.

5. Sean a, b y c las longitudes de los lados de un triángulo y A, B, C, respectivamente los ángulos opuestos. Probar que si $a + b = \mathrm{tg}(C/2) \cdot (a \cdot \mathrm{tg}A + b \cdot \mathrm{tg}B)$, el triángulo es isósceles (Greitzer, 1994).

6. Demostrar que si en un triángulo la razón de las tangentes de dos ángulos es igual a la razón de los cuadrados de los senos de estos ángulos, el triángulo es isósceles o rectángulo.

Para otras caracterizaciones de todo tipo de triángulos mediante desigualdades que se convierten en identidades entre los diferentes elementos de un triángulo, ver Lalesco (1989).

Conclusiones y comentarios

La principal conclusión de este trabajo es que siempre se pueden encontrar nuevos o antiguos resultados sencillos con los que los alumnos pueden ensayar en clase, como una motivación didáctica-metodológica-pedagógica, dentro del marco de la enseñanza secundaria. Y esto es siempre un hecho positivo, porque puede suponer una motivación creadora e investigadora para el profesor y el alumno; imaginar, crear, resolver, construir y decidir es un arte: el pentágono regular de toda enseñanza Matemática, siendo el lado y la diagonal el alumno y profesor, respectivamente.

Por último, se podría proponer la generalización de estos resultados a triángulos más generales, inspirándose en los teoremas demostrados para la resolución o refutación de las conjeturas propuestas, o de los problemas.

Bibliografía

BEHNKE, H. y otros (eds.): *Fundamentals Mathematics, vol. II, Geometry*, MIT, California.

BERGER B. (1987): *Geometry, I, II*, Springer, New York.

BIX, R. (1994): *Topics in Geometry*, Academic Press, San Diego.

BRANNAN, D. A. (1999): *Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge.

BROWN, S. I. y M. I. WALTER (1990): *The art of problem Posing*, Lawrence Erlabaum Associates Publishres, London.

CLEMENS, C. H. y M. A. CLEMENS (1991): *Exercices and solutions for the classroom*, Springer, New York.

CLEMENS, C. H. y M. A. CLEMENS (1991): *Geometry for the classroom*, Springer, New York.

CLEMENS, S. R., P. G. O'DAFFER y T. G. COONEY (1999): *Geometría con aplicaciones y soluciones de problemas*, Addison-Wesley Iberoamericana, España.

COXETER H. S. M. (1970): *Fundamentos de Geometría*, Limusa-Wiley, México.

COXETER H. S. M. y S. L. GREITZER (1993): *Retorno a la Geometría*, DLS-Euler, Editores.

CURCIO F. R. (1987)*: Teaching and learning: a problem, Solving focus*, Reston.

EVES, H. (1967): *Estudios de las Geometrías, vol. I, II*, Uteha, Mexico.

GREITZER, S. (ed.) (1994): *Olimpiadas Matemáticas*, DLS-Euler, Madrid.

GURSIATNIKOV, P. y S. REZNICHENKO: *Álgebra vectorial con ejemplos y problemas*, Mir Moscú.

HILBER, D. y S. COHN-VOSSEN (1952): *Geometry and the imagination*, Chelsea, New York.

HONSEBERGER R. (1994): *El ingenio en Matemáticas*, DLS-Euler, Madrid.

HONSEBERGER, R. (1995): *Episodes in nineteenth and Twenty Century Euclidean Geometry*, MAA, Washington.

JACOBS, H. R. (1977): *Geometry*, Freeman, New York.

KING, J. R. y D. SCHATTSCNEIDER (eds.) (1994): *Geometry Turned on dynamic software in learning, teaching and research*, MAA, Washington.

LALESCO T. (1989): *La géométrie du triangle*, Gabay, Paris.

LARSON, L. C. (1983): *Problems: solving through problems*, Springer, New York.

LIDSKI, V. y otros (1978): *Problemas de Matemáticas elementales*, Mir, Moscú.

LITVINENKO, V. y A. MORDOKPVIC (1989): *Prácticas para resolver problemas*, Mir, Moscú.

MITRINOVIC, D. S., J. E. PECARIc y V. VOLONEC (1989): *Recents advances in geometric inequalities*, Kluwer, Dordrecht.

POLYA G. (1966): *Matemáticas y razonamiento plausible*, Tecnos, Madrid.

POSAMENTIER, A. S. y Ch. T. SALKIND (1996): *Challemging problems in Geometry*, Dover, New York.

POTTAGE, J. (1983): *Geometrical investigations: illustrating the art of discovery in the Mathematical field*, Addison-Wesley, London.

PUIG ADAM, P. (1976): *Geometría Métrica, vol. I, II*, Madrid.

REES, E. G. (1983): *Notes on Geometry*, Sprigner, New York.

SHARIGUIN, I. (1989): *Problemas de Geometría*, Mir, Moscú.

SORTAIS, I y R. SORTAIS (1988): *Géométrie de l'space et du pla*, Hermann, Paris.

SORTAIS, Y. y. R. SORTAIS (1987): *Géométrie du triangle*, Hermann, Paris.

WALLACE, E. C. y S. F. WEST (1993): *Roads to Geometry*, Prentice Hall, New Jersey.

Juan-Bosco Romero
Fcaultad de Ciencias.
Universidad
de Valladolid.
Sociedad «Puig Adam»
de Profesores de Matemáticas