SUMA 36
febrero 2001, pp. 23-31

Concepciones de los alumnos de secundaria sobre modelos probabilísiticos en las secuencias de resultados aleatorios

Luis Serrano, Carmen Batanero,
J. J. Ortiz, M.ª Jesús Cañizares

ARTÍCULOS

Presentamos aquí una investigación sobre concepciones aleatorias en estudiantes de secundaria. Las respuestas de 277 estudiantes de dos grupos, con edades de 14 y 17 años, sirven para identificar las propiedades asociadas a secuencias aleatorias y deterministas. En ellas encontramos la capacidad de los alumnos para reconocer modelos matemáticos subyacentes en las secuencias de los resultados aleatorios y su utilización en los juicios sobre aleatoriedad. Por ellos sugerimos al final algunas implicaciones para la enseñanza de la probabilidad en estos niveles iniciales.

EN LA ACTUALIDAD, se están desarrollando nuevos currículos de enseñanza primaria y secundaria, tanto en España como en otros países desarrollados, que reflejan un cambio en las creencias sobre cómo se debe enseñar la probabilidad. Mientras que, hasta hace unos años, la probabilidad se ha incluido de forma limitada a partir de los 14-15 años, enfatizando los métodos de cálculo combinatorio, los currículos actuales proponen adelantar la materia al comienzo de la Educación Secundaria Obligatoria e incluso en algunos casos a la Enseñanza Primaria. Sugieren, asimismo, utilizar actividades de enseñanza donde el estudiante primero haga predicciones sobre las posibilidades de obtener diferentes resultados en experimentos aleatorios sencillos con recursos tales como ruletas, dados o monedas, luego obtenga datos empíricos de estos experimentos y finalmente compare las probabilidades experimentales generadas con sus predicciones originales (MEC, 1992; NCTM, 1989).

Sin embargo, en sus investigaciones sobre razonamiento probabilístico, Konold (1995) sugiere que la simple realización de predicciones y su comparación con los datos obtenidos experimentalmente, no son suficientes para que los estudiantes cambien sus concepciones, ya que los datos raramente revelan con suficiente claridad todos los resultados y propiedades matemáticas que queremos mostrar a los alumnos, la atención de los estudiantes es limitada y la variabilidad de los datos normalmente se ignora. Puesto que los estudiantes tienen con frecuencia ideas incorrectas sobre la probabilidad y la aleatoriedad, Garfield (1995) indica que la enseñanza efectiva de la probabilidad debe apoyarse en el conocimiento previo sobre estas concepciones de los estudiantes, ya que, cuando se enseña algo nuevo, los estudiantes construyen este nuevo conocimiento conectando la nueva información con la que ellos habían asumido previamente como correcta. El conocimiento de las concepciones y formas de razonamiento de los alumnos es, en consecuencia, un punto clave para asegurar el éxito de las nuevas propuestas curriculares.

En este artículo presentamos los resultados de un estudio de las concepciones de dos grupos de estudiantes (14 y 17 años) sobre los modelos probabilísticos que aparecen en las secuencias de resultados que se obtienen en un experimento aleatorio. El concepto de aleatoriedad ha recibido poca atención en el área de didáctica de la matemática, aunque las investigaciones psicológicas, tanto con niños como con sujetos adultos muestran concepciones incorrectas sobre este concepto y sesgos asociados en la toma de decisiones en situaciones aleatorias. Asimismo, la aleatoriedad presenta diversas interpretaciones, desde el punto de vista filosófico (Batanero y Serrano, 1995), lo que sin duda contribuye a la existencia de sesgos subjetivos en la percepción de la aleatoriedad.

Por ser el punto de partida de la teoría de probabilidades, muchos profesores pueden pensar que la aleatoriedad es un concepto simple. Sin embargo, cuando se analiza con detalle, se puede mostrar la complejidad del concepto y la multitud de modelos matemáticos asociados al mismo. Un punto importante en este análisis es que en el concepto de aleatoriedad podemos separar dos componentes: el proceso de generación de los resultados aleatorios (experimento aleatorio) y la secuencia de resultados obtenida (secuencia de resultados aleatorios). Puesto que con los ordenadores y calculadoras podemos obtener tablas de números «aleatorios» mediante algoritmos deterministas, la aleatoriedad de una secuencia de resultados, debe analizarse independientemente del proceso que la genera.

Desde el punto de vista del proceso, el experimento aleatorio más simple posible es aquél que sólo presenta dos resultados posibles, es repetible en las mismas condiciones y los resultados de pruebas sucesivas son independientes. Este experimento tan simple, que sin embargo se puede aplicar a un sinnúmero de situaciones prácticas (lanzamiento de monedas, sexo de un recién nacido, éxito en una prueba, etc.), da origen a una multitud de modelos probabilísticos, entre otros la distribución binomial, geométrica y el teorema de Bernoulli que afirma la convergencia de las frecuencias relativas de los resultados posibles a la probabilidad teórica de los mismos (Serrano y otros, 1991). Una dificultad práctica es decidir con seguridad si se cumplen las condiciones teóricas, es decir, que las pruebas sucesivas son realmente independientes y que se realizan en las mismas condiciones.

Se han usado dos formas de definir y estudiar la aleatoriedad de una secuencia de resultados (Fine, 1973). La primera es debida a Von Mises y parte de la idea de que en una secuencia aleatoria es imposible encontrar sus reglas o patrones; por tanto, no podemos predecir sus resultados para, por ejemplo, apostar sobre ellos y ganar en un juego de azar. Ello implica que la frecuencia relativa de cada uno de los resultados se conserva invariante en cualquiera de sus subsucesiones. Esta idea se usa en los test de aleatoriedad que tratan de estudiar la concordancia entre las frecuencias observadas y esperadas de distintos resultados en las tablas de números aleatorios. Sin embargo, puesto que en un contraste estadístico siempre hay posibilidades de error, es imposible estar completamente seguros de la aleatoriedad de una sucesión particular. Simplemente aceptamos la aleatoriedad de una secuencia porque ha pasado con éxito las pruebas disponibles.

El concepto de aleatoriedad ha recibido poca atención en el área de didáctica de la matemática, aunque las investigaciones psicológicas, tanto con niños como con sujetos adultos muestran concepciones incorrectas sobre este concepto y sesgos asociados en la toma de decisiones en situaciones aleatorias.

Otro enfoque para definir la aleatoriedad de una sucesión, debido a Kolmogorov, se basa en su complejidad computacional, que es la dificultad de describirla o almacenarla en un ordenador, mediante un código que permita recuperarla posteriormente. En este enfoque, una secuencia sería aleatoria si no podemos codificarla en forma resumida, es decir, la única forma de codificarla es listando todos sus elementos. El mínimo número de símbolos necesarios para codificar una secuencia nos daría una medida de su aleatoriedad, por lo que la definición establece una jerarquía en el grado de aleatoriedad de diferentes secuencias y la aleatoriedad perfecta sería un concepto teórico, aplicable sólo a secuencias de infinitos resultados.

Percepción subjetiva de la aleatoriedad

Estas dos definiciones muestran la contradicción fundamental subyacente en las secuencias aleatorias que explica los problemas psicológicos asociados. Por un lado, la aleatoriedad implica que cualquier secuencia de resultados es posible cada vez que realizamos el experimento, pero por otro sólo las secuencias de resultados sin patrón aparente se consideran verdaderamente aleatorias (Hawkins y otros, 1991). Muchos sesgos en la percepción de la aleatoriedad provienen de la aceptación de una de estas dos propiedades y el olvido de la complementaria.

La percepción subjetiva de la aleatoriedad de los adultos ha sido investigada extensamente por los psicólogos (por ejemplo, Wagenaar, 1972; Falk, 1981; Bar-Hillel, 1991) usando una variedad de tareas que son clasificadas en un estado reciente de la cuestión por Falk y Konold (1997) en dos tipos principales. El primer tipo (generación de resultados aleatorios) consiste en pedir a los sujetos que escriban la secuencia de resultados que esperarían obtener al repetir un número dado de veces un experimento aleatorio, tal como lanzar una moneda. El segundo tipo (tarea de reconocimiento) consiste en ofrecer a los sujetos una serie de secuencias de resultados y pedirle su opinión sobre cuáles de ellas fueron generadas aleatoriamente.

Como resultado de estas investigaciones se han encontrado sesgos sistemáticos, como la falacia del jugador, por la que se espera que cambie el tipo de suceso de una racha larga en la que no ha aparecido dicho suceso. Las secuencias generadas por los sujetos tienen demasiadas alternancias y rachas muy cortas, respecto a lo esperado teóricamente. En las tareas de reconocimiento, se rechazan las secuencias con rachas largas de un mismo resultado. Además de varios mecanismos psicológicos, como la representatividad local (Kahneman y otros, 1982) que podrían explicar estos sesgos, Falk (1981), Falk y Konold (1997) creen que la consistencia de los sujetos en las diversas tareas sugiere la existencia de concepciones erróneas subyacentes sobre la aleatoriedad, aunque no las han investigado explícitamente.

Investigaciones sobre la percepción de la aleatoriedad por los niños

Una cuestión de interés para el profesor de matemáticas es si estos segos son espontáneos o se adquieren como consecuencia de un enfoque inadecuado en la enseñanza de la probabilidad. La investigación de la percepción de la aleatoriedad por los niños comenzó con Piaget e Inhelder (1974), quienes creen que la noción de aleatoriedad precisa del razonamiento proporcional y combinatorio y la idea de causalidad, que se adquieren durante la adolescencia. Piaget e Inhelder creen que, una vez alcanzada esta etapa, los sujetos perciben la ley de los grandes números, que explica a la vez la regularidad global y la variabilidad particular de cada experimento aleatorio. Sin embargo, esta teoría es discutida por Green (1983, 1989, 1991), cuyas investigaciones con niños entre 11 y 16 años probaron que los niños eran muy exactos al reflejar la equiprobabilidad de los distintos resultados en tareas de generación de resultados aleatorios. Sin embargo, la independencia de ensayos no era captada por los niños, que produjeron series con rachas demasiado cortas de un mismo resultado, respecto a lo que esperaríamos en un proceso aleatorio. La percepción de la aleatoriedad no mejoraba con la edad y, aunque los niños basaban su decisión en consideraciones sobre el patrón de la secuencia, impredecibilidad de los resultados, número de rachas y frecuencias de resultados, estas propiedades no siempre se asociaron correctamente con la aleatoriedad o el determinismo.

La investigación de la percepción de la aleatoriedad por los niños comenzó con Piaget e Inhelder (1974), quienes creen que la noción de aleatoriedad precisa del razonamiento proporcional y combinatorio y la idea de causalidad, que se adquieren durante la adolescencia.

Descripción de la investigación

Los resultados que presentamos forman parte de un estudio amplio sobre las concepciones de 277 alumnos de secundaria sobre la aleatoriedad y la probabilidad. Aproximadamente la mitad de los alumnos cursaban 1.° de Bachillerato (n = 147), con una edad de entre 14 y 15 años y no habían comenzado el estudio de la probabilidad. El resto, cursaba el Curso de Orientación Universitaria (n = 130) y habían estudiado probabilidad, con un enfoque clásico, en 1.° y 3.° curso de bachillerato, aproximadamente 2 semanas en cada uno de los cursos, siendo su edad de 17-18 años. Participaron cinco centros de la ciudad de Melilla. Los datos se recogieron durante una de las horas de clase de matemáticas, por medio de un cuestionario.

El fin de nuestra investigación fue completar los trabajos de Green y de Toohey (1995) y extenderlo a los alumnos de 17-18 años, ya que Shaughnessy (1996) sugiere el interés de evaluar cómo varían las concepciones de los alumnos sobre un mismo contenido con la edad y no hay muchos datos disponibles sobre el intervalo de edad 14-18. Las preguntas que nos planteamos son las siguientes:

¿Cuáles son las características de las secuencias y distribuciones aleatorias generadas por los alumnos? ¿Cuáles de ellas coinciden con las propiedades matemáticas? ¿Varían estas características en los dos grupos de alumnos? ¿Cuáles son los argumentos que los alumnos usan para considerar una secuencia como aleatoria o no aleatoria? ¿Cambian con las variables de tarea de los ítems?

Los resultados que presentamos en este trabajo se refieren a cinco ítems. En los cuatro primeros se evalúa la capacidad de los alumnos para discriminar modelos matemáticos en las secuencias de resultados aleatorios. En el último ítem los alumnos deben escribir una secuencia de acuerdo a cómo piensen que sería si se hubiese obtenido mediante un procedimiento aleatorio. Nos hemos limitado al caso más simple: un experimento aleatorio (lanzar una moneda) con sólo dos resultados posibles, que, además son equiprobables. En Serrano, Batanero y Cañizares (1999) analizamos también la discriminación de modelos aleatorios en el plano por parte de estos mismos estudiantes y en Batanero y Serrano (1999) resumimos el resultado obtenido en las tareas de reconocimiento tanto de sucesiones, como de distribuciones aleatorias. En consecuencia, este trabajo completa los resultados expuestos en los dos anteriores.

Discriminación de propiedades en la secuencias aleatorias

En los cuatro primeros ítems de nuestro cuestionario se pide al alumno su opinión sobre si una serie de secuencias son o no producidas por un mecanismo aleatorio, así como las razones en las que basa su respuesta. A continuación reproducimos estas tareas, en las que hemos considerado dos variables de tarea, que se refieren a la secuencia presentada: a) La proporción de caras: en los ítems 1 a 3 esta proporción es muy cercana a la probabilidad teórica ($P(H) = 0,53$ en el ítem 1, $P(\mathrm{H}) = 0,48$ en los ítems 2 y 3, mientras que en el ítem 4 la proporción de caras sólo es igual a 0,30); b) La longitud de las rachas de un mismo resultado, y, en consecuencia, la proporción de alternancias (cambio en el tipo de resultado, de cara a cruz o de cruz a cara). Esta proporción es el cociente entre el número de alternancias y la longitud de la secuencia y es muy cercano al valor teórico 0,5 en los ítems 1 ($P(A) = 0,54$), 2 y 3 ($P(A) = 0,51$). Por el contrario, $P(A) = 0,74$ en el ítem 2, que tiene demasiadas alternancias (rachas muy cortas) para que la secuencia pueda ser considerada aleatoria.

En los cuatro primeros ítems de nuestro cuestionario se pide al alumno su opinión sobre si una serie de secuencias son o no producidas por un mecanismo aleatorio, así como las razones en las que basa su respuesta.

Por tanto, desde el punto de vista normativo, consideraríamos que la respuesta correcta a los ítems 1 y 3 es que el niño jugaba correctamente, mientras que la respuestas correcta en los ítems 2 y 4 es que el niño hacía trampas. Sin embargo, y puesto que en un contraste de aleatoriedad siempre hay una probabilidad pequeña de que la secuencia no sea aleatoria, incluso cuando haya superado las pruebas de aleatoriedad, nuestro interés no sólo se centra en si las respuestas de los alumnos coinciden o no con la respuesta normativa, sino en cuáles son las propiedades de las secuencias que asocian a la idea de aleatoriedad.

Enunciado: Se pidió a algunos niños que lanzaran una moneda 40 veces y anotaran los resultados obtenidos. Algunos lo hicieron correctamente y otros hicieron trampas. Indicaron *C* para la cara y + para la cruz. Estos son sus resultados.

María:

+ + + *C* + *C C* + + + *C* + *C C C C C* + *C* +
C + + *C* + *C C* + + + + *C C C* + *C C* + *C C*

Daniel:

C + *C* + + *C C* + *C* + *C C* + + *C* + + *C C* +
+ *C* + *C C* + + *C* + *C* + *C* + *C* + *C* + + *C* +

Martín:

C + + + *C* + + *C C C* + *C* + + + + + + *C* + *C*
+ *C C* + *C* + + *C C C C* + + + *C* + + *C C C*

Diana:

C + + + *C* + + *C* + *C* + + + *C* + + + + *C C*
+ + + *C* + + *C* + + *C* + + + + + *C* + + + *C* +

Item 1: ¿Hizo María trampas? ¿Por qué?
Ítem 2: ¿Hizo Daniel trampas? ¿Por qué?
Ítem 3: ¿Hizo Martín trampas? ¿Por qué?
Ítem 4: ¿Hizo Diana trampas? ¿Por qué?

En la tabla 1 presentamos las respuestas de los alumnos. Podemos ver que la mayoría considera las sucesiones aleatorias, excepto en la 4, que tiene una frecuencia de 12 caras, bastante diferente de la frecuencia teórica esperada. En total 54 alumnos de 14 años y 30 de 17 consideran aleatoria la secuencia del ítem 2, a pesar del sesgo que hemos introducido en la longitud de las rachas. Este resultado confirma la opinión de Green (1991), de que para los alumnos

Sucesión		*Respuesta*	*Edad = 14*	*Edad = 17*
1. María:	$P(H) = 0,53$	Aleatoria	60	58
	$P(A) = 0,54$	No aleatoria	34	27
		No sabe	6	15
2.Daniel:	$P(H) = 0,48$	Aleatoria	58	63
	$P(A) = 0,74$	No aleatoria	37	23
		No sabe	5	14
3. Martín:	$P(H) = 0,48$	Aleatoria	53	56
	$P(A) = 0,51$	No aleatoria	42	29
		No sabe	5	15
4. Diana:	$P(H) = 0,30$	Aleatoria	36	37
	$P(A) = 0,51$	No aleatoria	56	48
		No sabe	8	15

Tabla 1. Porcentajes de respuestas a los ítems 1- 4

es más difícil reconocer las propiedades de las rachas que las propiedades de las frecuencias. La semejanza de los porcentajes de alumnos que consideran aleatorios los ítems 1, 2 y 3 indica que para ellos lo más importante para decidir si una secuencia es aleatoria es la similaridad entre las frecuencias de los dos resultados posibles.

En todos los ítems, al realizar un contraste Chi-cuadrado de independencia entre la respuesta y el grupo de estudiantes, obtuvimos diferencias significativas entre los grupos (el valor p fue igual a 0,0011, 0,0045, 0,0028 y 0,0192 en los ítems 1 a 4), puesto que una proporción mayor de estudiantes de 17 años consideró la secuencia aleatoria o no dio respuesta, lo que también coincide con los resultados de Green. Este autor sugiere que los estudiantes mayores son más cautos en su respuesta porque aprecian mejor la variabilidad de los resultados aleatorios.

Pedimos a los estudiantes justificar sus respuestas. Los argumentos se clasificaron según el siguiente esquema, tomado de Green, quien estudió los porcentajes globales de los diferentes argumentos, pero no la variación en los diferentes ítems debida a la edad.

a) *La secuencia sigue un patrón regular*. Este argumento hace referencia al orden de aparición de las caras y cruces en la secuencia y a la regularidad del mismo:

> No hizo trampas, porque hay una secuencia bastante regular de caras y cruces, que es lo más probable que ocurra.
>
> Podría haber hecho trampas, porque el resultado es muy uniforme; las caras y las cruces casi se alternan.

b) *Hay un patrón irregular en la secuencia*. En este caso se percibe la irregularidad del patrón de la sucesión. Una parte de los alumnos que dan el argumento a) o b) muestran una concepción de la aleatoriedad correcta, percibiendo la aleatoriedad como complejidad, o ausencia de patrón. Un ejemplo es el siguiente:

> No hizo trampas, porque la secuencia no sigue ningún orden.

c) *Las frecuencias de los diferentes resultados son bastante parecidas*. Aquí los estudiantes se refieren a las frecuencias, como en los casos siguientes:

> Porque el número de caras y cruces está muy balanceado.
>
> La proporción de caras y cruces es muy similar.
>
> Los resultados se acercan al 50 %.

d) *Las frecuencias de los distintos resultados son bastantes diferentes*. Es el contrario al argumento previo. Tanto c) como d) los estudiantes basan su decisión en la comparación de las frecuencias observadas y la distribución de probabilidad teórica, lo que indica que los alumnos tienen una modelo matemático correcto de dicha distribución y han sido capaces de aplicar intuitivamente un razonamiento similar al que se sigue al realizar un contraste de hipótesis. En los casos citados se observa una concepción de la probabilidad frecuencial subyacente, mientras que en otros, el alumno usa una concepción clásica de la probabilidad:

> La probabilidad de cara debería ser igual que la de cruz.

e) *Hay rachas largas*. Aquí los estudiantes muestran concepciones erróneas respecto a la idea de independencia entre ensayos sucesivos:

> Porque hay muchas cruces seguidas.

Se aprecia también aquí el uso de la heurística de la representatividad (Kahneman, Slovic y Tversly, 1982).

f) *No hay rachas*. Es el opuesto al argumento anterior, y por tanto sugiere una concepción correcta por parte del alumno. Por ejemplo:

> Hay muy pocas secuencias de caras.

g) *Es impredecible; es aleatorio*. Estos alumnos argumentaron la impredecibilidad del resultado, debido a la naturaleza aleatoria del experimento:

> ¡Así es la suerte! Aunque lances correctamente la moneda, puedes obtener estos resultados, porque es un juego.
>
> Cuando lanzas una moneda no hay resultado seguro; la aleatoriedad juega un papel muy importante.

En estos resultados se vislumbra, a veces, bien el «enfoque en el resultado aislado» descrito por Konold o creencias en mecanismos causales. Sin embargo, con nuestros datos, este punto es difícil de asegurar y sería necesaria una investigación más profunda usando entrevista u otro tipo de tareas.

Como mostramos en la tabla 2, la mayor frecuencia aparece en los argumentos basados en la impredecibilidad o suerte, que no fueron obtenidos con mucha frecuencia por

En estos resultados se vislumbra, a veces, bien el «enfoque en el resultado aislado» descrito por Konold o creencias en mecanismos causales. Sin embargo, con nuestros datos, este punto es difícil de asegurar y sería necesaria una investigación más profunda usando entrevista u otro tipo de tareas.

Argumento	María 14	María 17	Daniel 14	Daniel 17	Martín 14	Martín 17	Diana 14	Diana 17
Patrón regular	6	3	44	18	7	4	10	2
Patrón irregular	13	5	9	1	18	10	8	5
Frecuencias/probabilidades iguales	4	12	5	23	0	10	3	2
Frecuencias diferentes	9	8	0	4	9	7	13	27
Rachas	21	13	4	5	24	18	22	16
No se puede predecir	35	33	31	29	32	28	31	28
No da argumento	12	26	7	20	10	23	13	20

Tabla 2. Porcentajes de argumentos en los items 1-4 según edad

Green (1991). También observamos variaciones en los distintos ítems: patrón regular en Daniel, patrón irregular en María y Martín; frecuencias iguales en María, Martín y Daniel, diferencia de frecuencias en Diana, rachas largas en María, Martín y Diana. Esto muestra la capacidad de los estudiantes para discriminar las características que hemos hecho variar en las sucesiones.

En cada ítem realizamos un contraste Chi cuadrado de independencia entre argumento y grupo de estudiante obteniendo los siguientes valores significativos (p igual a 0,001; 0,002; 0,0001 y 0,02 en los ítems 1 a 4). Los alumnos más jóvenes se refieren mayormente al patrón de la secuencia y las rachas, mientras que los de 17 años usaron más a menudo argumentos frecuenciales.

Los argumentos también se diferencian según la consideración aleatoria o no de la sucesión (tabla 3). Los valores p en el contraste Chi cuadrado de independencia entre argumento y respuesta fueron todos menores a 0,001. El principal argumento para apoyar la aleatoriedad fue la impredecibilidad. El patrón irregular, rachas largas y no coincidencia de las frecuencias de caras y cruces se asociaron con la no aleatoriedad.

El patrón irregular, rachas largas y no coincidencia de las frecuencias de caras y cruce se asociaron con la no aleatoriedad.

Argumento	María Real	María Falso	Daniel Real	Daniel Falso	Martín Real	Martín Falso	Diana Real	Diana Falso
Patrón regular	5	6	12	81	1	13	13	3
Patrón irregular	14	2	8	1	23	5	7	7
Frecuencias/probabilidades iguales	10	6	19	6	7	2	5	1
Frecuencias diferentes	5	18	3	1	4	18	5	35
Rachas	2	53	4	6	4	54	4	33
No se puede predecir	52	12	43	5	48	5	51	18
No da argumento	12	3	11	0	13	3	15	3

Tabla 3. Clasificación de los argumentos según se considere la secuencia aleatoria o no aleatoria

Generación de secuencias de resultados aleatorios

Nuestro cuestionario fue completado con la siguiente tarea de generación de una secuencia aleatoria de caras y cruces. Nuestro interés sobre el ítem es analizar las características que los alumnos asignan a las secuencias aleatorias y estudiar su variación en los dos grupos de alumnos, así como comparar los resultados en las tareas de generación con los obtenidos en las tareas de reconocimiento. Se proporcionó al alumno una plantilla con 50 cuadros para completar, dándole las siguientes instrucciones:

> *Ítem 5:* Supón que estás lanzando una moneda 50 veces, sin hacer trampas. Escribe una secuencia de 50 lanzamientos (sin lanzar realmente la moneda). Pon *C* o *X* en cada cuadro (*C* quiere decir que obtienes una cara y *X* que obtienes una cruz).

Una vez recogidos los datos, hicimos un estudio estadístico de las características de las sucesiones generadas por los escolares de esta muestra, que se describen a continuación, comparándolas con los modelos matemáticos esperados en una secuencia aleatoria. Si una de estas propiedades aparece en las sucesiones generadas por los estudiantes, pensamos que dicha propiedad ha sido identificada por el alumno a lo largo de su experiencia con los juegos de azar y la observación de secuencias de resultados aleatorios. Las propiedades analizadas son las siguientes:

Número total de caras que presentan las secuencias escritas por los alumnos

Una propiedad importante desde el punto de vista matemático en las sucesiones de Bernoulli es la convergencia empírica de las frecuencias a la probabilidad teórica, explicada mediante el Teorema de Bernoulli. En la figura 1 presentamos el número de caras en las secuencias producidas por los dos grupos de alumnos (Grupo 1: 18 años; Grupo 2= 14 años).

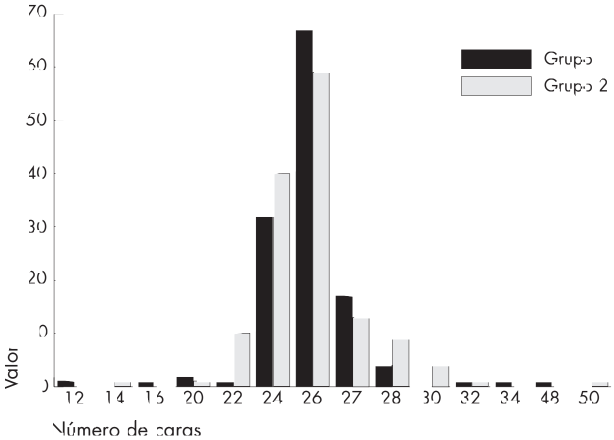

Figura 1. Frecuencias del número de caras en las secuencias producidas por los alumnos

En general, los alumnos han reflejado la frecuencia relativa teórica de caras y cruces, ya que el número de caras se agrupa alrededor de 23 a 27 para la mayor parte de alumnos y el valor teórico esperado sería 25 caras. El valor medio del número de caras en las secuencias producidas por los alumnos (25,285 en el primer grupo y 25,259 en el segundo) se aproxima mucho al valor esperado. Sin embargo, los alumnos no reflejan suficientemente la variabilidad aleatoria, ya que la dispersión de la distribución de las secuencias producidas por los alumnos es menor que la teórica. Puesto que se trata de secuencias de 50 resultados, se sigue una distribución binomial $\mathcal{B}(50, 0{,}5)$, cuya media es 25, varianza 12,5 y desviación típica 3,54. La desviación típica de la distribución de las secuencias producidas por los alumnos de 14 años es 2,99, menor que la esperada teóricamente, aunque no tan pequeña como en la muestra piloto o en las investigaciones de Green. Del mismo modo, la desviación típica de la distribución de las secuencias producidas por los alumnos de 18 años es 3,023. No se observan diferencias con la edad en la apreciación de esta variabilidad.

… los alumnos han reflejado la frecuencia relativa teórica de caras y cruces […] sin embargo, no reflejan suficientemente la variabilidad aleatoria, ya que la dispersión de la distribución de las secuencias producidas por los alumnos es menor que la teórica.

Consistencia entre las dos mitades

También estudiamos el número de caras en cada una de las dos partes de la secuencia producida por los alumnos, para estudiar la consistencia entre las dos mitades de la misma. Hemos analizado la distribución del número de caras en cada una de las mitades de las secuencias, observando que estas distribuciones son altamente consistentes, ya que los valores medios y desviaciones típicas fueron muy similares en las dos partes de la secuencia producida. Se diría que el alumno intenta reproducir localmente el comportamiento global de la secuencia. Sin embargo, el coeficiente de correlación entre el número de caras en la primera y segunda mitad de la secuencia ha sido $r = -0{,}1147$, lo que indica que no hemos encontrado una asociación entre estas dos variables. El alumno intenta mantener una frecuencia dada en el total de la secuencia, pero no hay una relación directa ni inversa entre el número caras de un mismo alumno en los dos trozos de la secuencia.

La longitud de la racha más larga

En las investigaciones de Green se vio que, en general, los alumnos subestiman la longitud de las rachas de un mismo resultado. Presentamos en la figura 2 la longitud de la racha más larga en las sucesiones producidas en nuestro caso por los dos grupos de alumnos, a fin de compararlas con los resultados obtenidos por Green.

Al estudiar la figura 2, vemos que los alumnos producen rachas cortas. Aunque, con frecuencia máxima, los alumnos producen rachas de 4 ó 5 elementos, un porcentaje importante de alumnos no pasa de rachas de 2-3 sucesos, mientras que, en la distribución teórica, la máxima probabilidad es para la longitud de la racha más larga es de 5 ó 6 elementos. Aparecen también los sujetos que Green denomina «alternantes» (11 casos) que alternan entre cara y cruz en toda la secuencia, la mayor parte alumnos de 18 años. Aparecen también los «replicantes» que producen

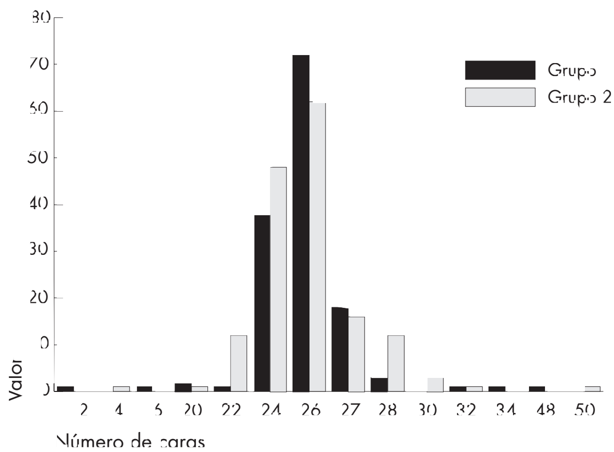

Figura 2. Frecuencias de la longitud de la racha más larga

una sola racha o una racha muy larga de 24, 25 e incluso 50 resultados seguidos iguales. Todos estos datos parecen apuntar a dificultades en la percepción de la independencia de los experimentos repetidos.

Para autores como Bar-Hillel y Wagenaar (1993) o Shaughnessy (1992), la heurística de la representatividad podría explicar la alta tasa de alternancias en las tareas de simulación de secuencias aleatorias. La característica de equiprobabilidad de los dos resultados, junto con alguna irregularidad en el orden de aparición, se espera que aparezcan no sólo a largo plazo, sino en segmentos cortos; la insistencia por la «aleatoriedad» en pequeñas sucesiones acarrea la «no aleatoriedad» en sucesiones largas.

Número de rachas

Una variable relacionada con la anterior es el número total de rachas producidas en las secuencias de los alumnos. que en nuestro caso fue, en general, alto. El valor esperado teórico del número de rachas es 25,5, mientras que en nuestros alumnos obtenemos un valor medio superior de 30,015 y un porcentaje alto de alumnos que producen 35 o más rachas. Hay también alumnos que producen una única racha, o unas pocas, aunque, al igual que en la investigación de Green han sido muy escasos.

Todos estos resultados coinciden con los de Green, incluso en el caso de nuestros alumnos de dieciocho años. Por ello confirman la hipótesis de este autor de que las propiedades que los alumnos atribuyen a las secuencias aleatorias no cambian con la edad.

Implicaciones para la enseñanza de la Estadística

En nuestro estudio hemos mostrado cómo los alumnos son capaces de reconocer modelos matemáticos en las secuencias de resultados aleatorios y los utilizan para realizar un juicio sobre la aleatoriedad de las mismas y en las tareas de generación de secuencias aleatorias, aunque, en ocasiones las concepciones sobre la aleatoriedad no correspondan a las que tratamos de enseñarles. Esto es comprensible debido a las enormes dificultades psicológicas y filosóficas ligadas a la idea de aleatoriedad y a la complejidad de este concepto.

Sin embargo, es importante que, gradualmente los alumnos vayan adquiriendo una idea lo más completa y correcta posible de las características de la aleatoriedad, ya que este concepto tiene muchas aplicaciones en la vida real, particularmente en las situaciones de muestreo y en el diseño de experimento en áreas diversas. Asimismo, las técnicas de simulación, fáciles de implementar con los ordenadores y que se aplican a la solución de muchos problemas en diferentes profesiones y ciencias, se basan en la idea de aleatoriedad.

En nuestro estudio hemos mostrado cómo los alumnos son capaces de reconocer modelos matemáticos en las secuencias de resultados aleatorios y los utilizan para realizar un juicio sobre la aleatoriedad de las mismas y en las tareas de generación de secuencias aleatorias, aunque, en ocasiones las concepciones sobre la aleatoriedad no correspondan a las que tratamos de enseñarles.

Por otro lado, los diseños curriculares sugieren que la enseñanza de la probabilidad se base precisamente en la experimentación con dispositivos como dados, ruletas, monedas, etc., donde los alumnos tendrán abundantes ocasiones de recoger datos sobre secuencias de resultados aleatorios. Estas actividades deben, sin duda, reforzarse y aprovecharlas para analizar las características de las mismas y ayudar al alumno a construir progresivamente unas intuiciones correctas sobre la aleatoriedad. Estamos de acuerdo con Hawkins y otros (1991), cuando indican que se dedica, en general, poco tiempo al análisis de los experimentos aleatorios y al estudio de sus características y que ello puede ser el origen de muchas concepciones erróneas en el campo de la probabilidad.

La experimentación, registro y análisis de las secuencias producidas con dispositivos diversos como monedas, dados, ruletas, chinchetas, etc., puede servir para integrar el estudio de la probabilidad con el de la estadística. La introducción gradual de los conceptos y notación probabilística servirá para explicar matemáticamente las regularidades observadas en los datos recogidos. Esperamos que, a partir de estas experiencias, los alumnos adquieran las características esenciales de los fenómenos aleatorios y descubran progresivamente los diferentes modelos probabilísticos implícitos en las secuencias de resultados aleatorios.

Referencias

BATANERO, C. y L. SERRANO (1995): *Aleatoriedad, sus significados e implicaciones educativas*, UNO, 15-28.

BATANERO, C. y L. SERRANO (1999): «The meaning of randomness for secondary school students», *Journal for Research in Mathematics Education*, n.° 30(5), 558-567.

BAR-HILLEL, M. y W. A. WAGERAAR (1991): «The perception of randomness», *Advances in Applied Mathematics*, n.° 12, 428-454.

FALK, R. (1981): «The perception of randomness», *Proceedings of the V PME Conference*, Grenoble, 222-229.

FALK, R. y C. KONOLD (1997): «Making sense of randomness: Implicit encoding as a basis for judgment», *Psychological Review*, n.° 104, 310-318.

FINE, T. L. (1973): *Theories of Probability: An examination of foundations*, Academic Press, New York.

GARFIELD, J. B. (1995): «How students learn statistics», *International Statistical Review*, n.° 63(1), 23-54.

GREEN, D. R. (1983): «A Survey of probabilistic concepts in 3000 students aged 11-16 years», en D. R. GREY y otros (eds.), *Proceedings of the I International Conference on Teaching Statistics, vol. 2*, University of Sheffield, 766-783.

GREEN, D. R. (1989): «Schools students' understanding of randomness», en R. MORRIS (ed.): *Studies in Mathematics education, vol 7: The Teaching of Statistics,* Unesco, París, 27-39.

GREEN, D. R. (1991): *A longitudinal study of pupil's probability concepts. Technical report ME90/91,* University of Technology, Loughborough.

HAWKINS, A., F. JOLLIFFE y L. GLICKMAN (1991): *Teaching Statistical Concepts*. Longman, London.

KAHNEMAN, D., P. SLOVIC y A. TVERSKY (1982): *Judgement under uncertainty: heuristics and biases*, University Press, Cambridge.

KONOLD, C. (1995): «Confessions of a coin flipper and would-be instructor», *The American Statistician*, n.° 49 (2), 203-209.

M.E.C. (1992): *Matemática. Secundaria Obligatoria*, Ministerio de Educación y Ciencia, Madrid.

N.C.T.M. (1989): «Curriculum and evaluation standars for school Mathematics», *Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics*.

PIAGET, J. y B. INHELDER (1974): *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant*, Presses Universitaires de France, París.

SHAUGHNESSY, J. M. (1996): «Emerging research issues in the teaching and learning of probability and statistics», *ICME 8*, Sevilla.

SERRANO, L., C. BATANERO y M. J. CAÑIZARES (1999): «Concepciones sobre distribuciones aleatorias planas en alumnos de secundaria», *Epsilon*, n.° 43-44, 149-162.

SERRANO, L., C. BATANERO y J. D. GODINO, (1991): «Sucesiones de ensayos de Bernoulli y procesos estocásticos asociados», *Actas de las V Jornadas Andaluzas de Educación Matemática*, Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, Universidad de Granada, 233-245.

TOOHEY, P. G. (1996): *Adolescent perceptions of the concept of randomness*, Master Thesis, University of Adelaide.

Luis Serrano
J. J. Ortiz
Departamento de Didáctica
de las Matemáticas.
Facultad de Educación
y Humanidades (Melilla)
Carmen Batanero
M.ª Jesús Cañizares
Facultad de Educación.
Campus Cartuja (Granada)

Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
«Thales»