SUMA 27
febrero 1998, pp. 97-102

Experimentos en álgebra lineal con Mathematica

Juan José González Henríquez

IDEAS Y RECURSOS

Desde hace años los profesores de física, química o botánica han dispuesto de laboratorios donde los alumnos experimenten los conceptos teóricos, expuestos previamente en clase. En este artículo, se pone de manifiesto la facilidad y potencia de *Mathematica* como laboratorio de matemáticas para experimentar algunos conceptos teóricos y aplicados del álgebra lineal universitaria. Por supuesto, estos experimentos son extensibles a cualquier disciplina de las matemáticas.

El impacto de las nuevas tecnologías está, actualmente, cambiando los hábitos, en todos los aspectos, de cualquier profesional. Por tanto, parece razonable pensar que el conocimiento de estas nuevas tecnologías es, y será, un requisito imprescindible para acceder al mundo laboral. Sin duda, una de estas tecnologías revolucionarias ha sido la creación del ordenador digital; un instrumento de lógica veloz, que guiado por el software adecuado es capaz de adaptarse a las necesidades de cualquier situación práctica actual.

En la docencia, la existencia de paquetes de software matemático, y las nuevas orientaciones en el aprendizaje, cuestionan la forma de enseñanza tradicional de las matemáticas y plantean métodos alternativos que permitan unos objetivos docentes más eficaces para la integración de estas tecnologías en otras asignaturas y su repercusión posterior en el futuro. En este aspecto, *Mathematica* es un potente paquete de software muy extendido y bien documentado que, por sus características, posibilita un aprendizaje vivo y tangible de las matemáticas. Además, la colección de paquetes anexos relacionados con la ingeniería, la economía, la física, etc. y protocolos de comunicación con otros paquetes de software, lo convierten en una herramienta flexible en la enseñanza y en el posterior ejercicio profesional.

En este artículo, presentamos mediante tres problemas de álgebra lineal algunas de las posibilidades de *Mathematica* en la enseñanza de nuestra matemática. En el primer problema, contrastamos dos procedimientos matemáticos para resolver diversos problemas; en el segundo, haremos una demostración matemática de un problema utilizando su capacidad simbólica; y, por último, resolveremos un problema de cálculo numérico.

Características generales de *Mathematica*

Mathematica se divide en dos partes: el *Kernel* (Núcleo) y el *Front End* (Fachada). El *Kernel* es el motor computacional de *Mathematica*: procesa y calcula los resultados y los devuelve al *Front End*. Así, El *Front End* es la interfaz entre el usuario y el *Kernel*. En otras palabras, el usuario dispone de una pizarra (*Front End*) donde escribe sus problemas en un lenguaje determinado y, mediante una combinación de teclas, manda el problema a un «cerebro electrónico» (*Kernel*), el cual resuelve el problema y escribe la respuesta en la siguiente línea de la pizarra. Esta característica hace de *Mathematica* un lenguaje interactivo.

Mathematica tiene incorporado un sinfín de operaciones matemáticas de índole diversa. En caso de necesitar una operación matemática, no disponible en *Mathematica*, se puede definir con cierta facilidad, gracias a sus posibilidades de programación de alto nivel. Las operaciones definidas en *Mathematica* y las características de su programación hacen que programas que requieran numerosa páginas en otros lenguajes de programación (*Pascal, C, Fortran, Basic*, etc.), en *Mathematica* se reduzcan ostensiblemente.

Mathematica puede comunicarse con otros paquetes de software usando un protocolo de comunicación denominado *MathLink*. De hecho, el propio *Kernel* se comunica con el *Front End* a través de este protocolo. En la escritura de este artículo se puede decir que hemos cambiado el *Front End* de *Mathematica* por el entorno del procesador de texto *Word 6.0*, usando el *MathLink* para *Word 6.0*. Es decir, en este caso nuestra pizarra ha sido el entorno del procesador de texto *Word 6.0*.

Una de las características más importantes de *Mathematica* es su posibilidad de manipular cálculo simbólico, es decir, de simular al pensamiento humano cuando operamos con expresiones simbólicas exactas; y por supuesto, puede trabajar como una potente calculadora numérica.

Una de las características más importantes de Mathematica es su posibilidad de manipular cálculo simbólico, es decir, de simular al pensamiento humano cuando operamos con expresiones simbólicas exactas; y por supuesto, puede trabajar como una potente calculadora numérica.

¿Eliminación Gaussiana o regla de Cramer?

En cualquier libro o programa de un curso que trate someramente el álgebra lineal, se encuentra una lección dedicada a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Generalmente, se enseña a resolver primero los sistemas de ecuaciones con el método de Gauss y, posteriormente, se enseña la regla de Cramer. Esta exposición, desde luego, no hace honor al orden cronológico de descubrimiento de estas técnicas, pues, la regla de Cramer fue publicada por el matemático suizo Gabriel Cramer en 1750 y el método de Gauss lo descubrió el matemático alemán Karl Friedrich Gauss, a principios del siglo XIX en un problema para determinar la órbita del satélite Ceres. Sin embargo, las conversaciones con otros profesores del área, en torno al tema, coinciden con las mías: ¿cómo es posible que después de dejar patente en los ejercicios de clase la sencillez del método de Gauss frente a los numerosos cálculos que requiere la regla de Cramer, los alumnos opten por esta última?

También se enseña que las operaciones elementales por filas (intercambio de filas, multiplicar una fila por un escalar distinto de cero, sustituir una fila por la suma de ésta con otra multiplicada previamente por un escalar) dejan invariante el rango de una matriz. Sin embargo, entre obtener el rango de una matriz aplicando operaciones elementales y emplear el método de los menores, prefieren hallarlo a través de menores. Al indagar sobre el tema con profesores de álgebra lineal, tanto en reuniones de carácter estatal (VII JAEM) e internacional (ICME 8), se llega a diferentes conclusiones:

1. Algunos opinan que la culpa es nuestra pues tanto en clases prácticas como en exámenes nos limitamos a matrices cuadradas de tamaño 3 y proponen, como remedio, aumentar a 5, por ejemplo, el orden de las matrices cuadradas.
2. Algunos profesores universitarios opinan que en enseñanzas preuniversitarias todavía hay profesores que sólo enseñan la regla de Cramer junto al teorema de Rouché-Frobenius para resolver sistemas de ecuaciones y no el sencillo método de Gauss.

En cualquier caso, el problema que subyace es: ¿operaciones elementales o determinantes? En mis clases para exponer la simplicidad y potencia de las operaciones elementales, frente a los procedimientos que involucra a determinantes, realizo con mis alumnos una práctica de ordenador con *Mathematica* donde comparamos el tiempo computacional que tarda el ordenador en evaluar un determinante a través de la definición y utilizando operaciones elementales.

Definición de determinante:

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz de tamaño $n \times n$. Definimos el determinante de A, denotado por, *Det(A)* ó $|A|$, como:

$$Det(A) = |A| = \sum (\pm) a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{njn}$$

donde el rango del sumatorio recorre todas las permutaciones del conjunto $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. El signo es positivo si la permutación es par y es negativo en caso contrario. Como el conjunto de las permutaciones de n elementos tiene $n!$ elementos entonces el determinante tendrá $n!$ sumandos. Obsérvese que el número de sumas y multiplicaciones necesarias para calcular el determinante cuando se desarrolla éste por los elementos de una fila o columna hasta llegar a determinantes de matrices de 2×2 es igual que en la definición anterior.

Dado que *Mathematica* es un potente software que permite al usuario programar, definimos una función, que llamaremos `Determinante` de acuerdo con la definición anterior:

```
In[1]:=
    Determinante[A_] :=
        Module[
            {k=Length[A], suma=0, pro=0, p, per, permut},
            p = Range[k];
            permut = Permutations[p];
            For[j=1, j<=k!, ++j, {per = permut[[j]];
                pro = Signature[per]*
                 Product[A[[i]][[per[[i]]]], {i, k}];
                suma = suma + pro}];
        suma]
```

Mathematica incorpora la función `Det[A]`, que da automáticamente el determinante de la matriz A cuadrada de tamaño n. Nuestro objetivo será constrastar el tiempo que tarda el ordenador en calcular el determinante de una matriz dada, utilizando la función `Determinante` (basada en la definición anterior) y la función `Det` de *Mathematica* (obviamente el algoritmo que emplea *Mathematica* será más rápido ¿por qué?).

La respuesta a esta diferencia de tiempo computacional, estriba en que el algoritmo que tiene implementado *Mathematica* se fundamenta en los dos siguientes propiedades de álgebra lineal:

1. Si una matriz B resulta de aplicar en A la operación elemental $F_{ij} \leftrightarrow \alpha F_i + F_j$ (ó $C_j \leftrightarrow \beta C_i + C_j$) entonces *Det(B)=Det(A)*.
2. Si $A = [a_{ij}]$ es una matriz triangular superior (inferior) de tamaño n entonces $Det(A) = a_{11} a_{22} a_{33} \ldots\ldots a_{nn}$

En resumen, la función `Det` aplica operaciones elementales a sus filas y columnas para transformar la matriz en una matriz triangular superior y, porteriormente, multiplica los elementos de la diagonal principal de esta matriz.

Veamos las diferencias computacionales de tiempo empleando operaciones elementales y la definición en la siguiente matriz A, cuyo determinante es –2349. En *Mathematica*, una matriz A se define como un conjunto de conjuntos donde el i-ésimo elemento del conjunto son las entradas de la i-ésima fila de A. Así, almacenamos en la variable A la matriz que queremos utilizar:

```
In[2]:=
    A = {{1, 2, 3, 4, 5, 3, 6}, {2, 4, 5, 6, 7, 5, 2},
    {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}, {2, 4, 5, 6, 6, 5, 4}, {2,
    6, 1, 5, 3, 4, 2}, {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, {5, 7,
    9, 0, 1, -1, 9}}

Out[2]=
    {{1, 2, 3, 4, 5, 3, 6}, {2, 4, 5, 6, 7, 5, 2},
    {1, 1, 1, 1, 1, 1, 1}, {2, 4, 5, 6, 6, 5, 4},
    {2, 6, 1, 5, 3, 4, 2}, {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7},
    {5, 7, 9, 0, 1, -1, 9}}
```

Si queremos visualizar la matriz en su forma matricial, utilizamos la función `MatrixForm` de *Mathematica* obteniendo:

```
In[3]:=
    MatrixForm[A]

Out[3]//MatrixForm=
    1   2   3   4   5   3   6
    2   4   5   6   7   5   2
    1   1   1   1   1   1   1
    2   4   5   6   6   5   4
    2   6   1   5   3   4   2
    1   2   3   4   5   6   7
    5   7   9   0   1  -1   9
```

Mediante la función `Timing` de *Mathematica* calculamos el tiempo que tarda el ordenador en calcular el determinante con la función `Det` y `Determinante` respectivamente.

```
In[4]:=
    Timing[Det[A]]

Out[4]=
    {0.293 Second, -2349}

In[5]:=
    Timing[Determinante[A]]

Out[5]=
    {16.221 Second, -2349}
```

En las salidas 4 y 5 anterior, (Out[4] y Out[5]) se observan las diferencias computacionales de tiempo que lleva realizar el cálculo realizando operaciones elementales y la definición. Mediante la definición ha tardado aproximadamente 50 veces más. Al finalizar la práctica, la mayoría de los alumnos se asombran de la rapidez computacional de las operaciones elementales frente a los determinantes.

El número áureo y una ecuación en diferencias

El problema que pretendemos resolver ahora es el siguiente:

Elegidos dos números al azar, a_1 y a_2, ambos reales y mayores que cero, se construye la sucesión cuyo término siguiente es la suma de los dos anteriores, es decir, $a_{n-2} + a_{n-1} = a_n$ Probar que, independientemente de los valores iniciales de a_1 y a_2, el cociente converge a la razón áurea, es decir:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

En un sistema dinámico discreto (una función f de un espacio métrico M en si mismo) dado un punto $x \in M$, es de interés estudiar la sucesión cuyo término general es $a_n = f^n(x)$. Esta sucesión recibe el nombre de trayectoria de x por f. *Mathematica*, dispone de la función NestList[f, x, n] la cual da los n primeros términos de la trayectoria de f por x.

Inicialmente, y de forma experimental, veamos si efectivamente el cociente del término siguiente entre el término anterior converge a la razón áurea. Para ello, tomamos la función:

$$S: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

definida como

$$S(x, y, z) = (y, x+y, (y+x)/y)$$

y calcularemos los 15 primeros términos de la trayectoria de S por p = (3, 4, 0) y q = (1, 1, 0) respectivamente. Obsérvese que, dados los dos primeros términos de la sucesión (a_0, a_1, 0), la imagen de ellos a través de S es (a_1, a_2, a_2/a_1). De esta forma:

$$(S\circ S\circ S\circ\ldots \overset{\text{n veces}}{\circ} S)(a_0, a_1, 0) = (a_n, a_{n+1}, a_{n+1}/a_n)$$

Definimos ahora con *Mathematica* la función S anterior :

```
In[6]:=
    S[a_]:= {a[[2]],  a[[1]]+a[[2]],
            N[(a[[1]]+a[[2]])/a[[2]]]}

In[7]:=
    NestList[S, {3, 4, 0}, 15]

Out[7]=
    {{3, 4, 0}, {4, 7, 1.75}, {7, 11, 1.57143},
     {11, 18, 1.63636}, {18, 29, 1.61111},
     {29, 47, 1.62069}, {47, 76, 1.61702},
     {76, 123, 1.61842}, {123, 199, 1.61789},
     {199, 322, 1.61809}, {322, 521, 1.61801},
     {521, 843, 1.61804}, {843, 1364, 1.61803},
     {1364, 2207, 1.61804}, {2207, 3571, 1.61803},
     {3571, 5778, 1.61803}}

In[8]:=
    NestList[S, {1, 1, 0}, 15]

Out[8]=
    {{1, 1, 0}, {1, 2, 2.}, {2, 3, 1.5},
     {3, 5, 1.66667}, {5, 8, 1.6}, {8, 13, 1.625},
     {13, 21, 1.61538}, {21, 34, 1.61905},
     {34, 55, 1.61765}, {55, 89, 1.61818},
     {89, 144, 1.61798}, {144, 233, 1.61806},
     {233, 377, 1.61803}, {377, 610, 1.61804},
     {610, 987, 1.61803}, {987, 1597, 1.61803}}
```

El último elemento de las salidas 7 y 8 son los términos (a_{15}, a_{16}, a_{16}/a_{15}) de las sucesiones cuyos términos iniciales son (3, 4, 0) y (1, 1, 0) respectivamente. Obsérvese en la tercera componente de las sucesiones anteriores la convergencia a la razón áurea.

Daremos ahora una demostración general de estos casos particulares. Para ello, hallamos la solución general de la ecuación en diferencias

$$a_{n-2} + a_{n-1} = a_n.$$

Dado que esta ecuación en diferencias, es homogénea de orden dos, su solución general es de la forma:

$$Sg_n = a(r_1)^n + b(r_2)^n$$

donde r_1 y r_2 son soluciones de la ecuación polinómica asociada

$$x^2 - x - 1 = 0$$

con a y b números reales cualesquiera. Obtengamos con *Mathematica* las raíces de la ecuación polinómica anterior mediante la función Solve.

```
In[9]:=
    Solve[x^2 - x - 1 == 0, x]

Out[9]=
           1-Sqrt[5]          1+Sqrt[5]
    {{x -> ---------}, {x -> ---------}}
               2                  2
```

Definimos ahora con *Mathematica* la función *Sg*, (solución general) la cual da las sucesiones que satisfacen la ecuación en diferencias anterior.

```
In[10]:=
    Sg[n_]:=  a(1/2-Sqrt[5]/2)^n  +
    b(1/2+Sqrt[5]/2)^n
```

Comprobamos que, efectivamente, es la solución general de la ecuación anterior.

```
In[11]:=
    Sg[n+2]-Sg[n+1]-Sg[n] // Expand
Out[11]=
    0
```

Por último vamos a demostrar que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

```
In[12]:=
    Limit[Sg[n+1]/Sg[n],n->
    Infinity]
Out[12]=
    1+Sqrt[5]
    --------
       2
```

Matrices en bandas

Una matriz en banda o matriz tridiagonal es una matriz cuadrada de tamaño n donde las entradas

$$a_{ij} = 0 \text{ si } |i-j| > 1$$

Estas matrices suelen aparecer como matrices del sistema, en sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos derivado de problemas continuos discretizados.

En casi todas las ramas de las ciencias, los modelos matemáticos que rigen ciertos fenómenos se expresan de forma exacta y continua, es decir, mediante una ecuación en derivadas parciales, mediante una ecuación de funciones continuas, etc. Sin embargo, cuando deseamos resolver una ecuación en derivadas parciales, y no conocemos métodos matemáticos para ello, recurrimos a discretizar el problema. Es decir, si deseamos hallar una función $u(x)$, en el problema continuo tendríamos infinitud de incógnitas, pero no en el problema discreto pues seleccionaríamos n puntos del dominio de $u(x)$.

Concretando el problema, supongamos que tenemos un fenómeno físico donde deseamos conocer una función $u(x)$ de la cual sabemos:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x) \quad y \quad x \in [0,1]$$

...cuando deseamos resolver una ecuación en derivadas parciales y no conocemos métodos matemáticos para ello, recurrimos a discretizar el problema.

La función que queremos calcular satisface las condiciones siguientes:

$$u(0) = u(1) = 0$$

Con estas últimas condiciones, eliminamos la arbitrariedad de soluciones que las ecuaciones diferenciales suelen generar.

Dado que nuestro objetivo es generar un problema discreto, es decir un problema de álgebra lineal, elegimos en el intervalo anterior una sucesión de puntos equiespaciados; por ejemplo la sucesión: $x_n = nh$ con $n \in \mathbb{N}$ y h una cantidad pequeña. Posteriormente, resolveremos un problema lineal donde calcularemos los valores aproximados de la imagen de estos puntos a la solución verdadera $u(x_n)$. El problema lineal que hay que resolver es un sistema de ecuaciones $Ax= b$ donde A es una matriz tridiagonal.

Dado que

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}$$

tenemos que el problema continuo se transforma en la siguiente ecuaciones en diferencias:

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = h^2f(nh)$$

Para concretar el problema supongamos que

$$f(x) = Sen(x),\ h=1/100 \text{ y } n=99$$

Obsérvese que en este caso no es necesario discretizar el problema dado que el problema continuo es muy sencillo. Es trivial comprobar que

$$u(x) = Sen(x) + Cx + D$$

Si añadimos a esta familia de funciones nuestras condiciones de contorno, tenemos la función:

$$u(x) = Sen(x) - x \cdot Sen(1)$$

Sin embargo lo resolveremos discretamente y veamos la coincidencia de las soluciones.

En primer lugar obtenemos la sucesión finita de puntos $x_n = nh$.

```
In[13]:=
    sucesión = Range[0.01, 0.99, 0.01]
```

En la variable sucesión tenemos una discretización del intervalo [0, 1], esto es, el conjunto {0.01, 0.02, 0.03, ..., 0.99}.

```
In[14] :=
    Imagensucesión = Sin[sucesión];
```

En la variable `Imagensucesión` tenemos el conjunto imagen del conjunto {0.01, 0.02, 0.03, ..., 0.99} por la función $Sen(x)$.

Cargamos el *Package* `LinearAlgebra`Tridiagonal`` para acceder a una función que resuelve los sistemas de ecuaciones $Ax = b$ directamente, donde A es una matriz en banda.

```
In[15]:=
    <<LinearAlgebra`Tridiagonal`
```

Hallamos las bandas respectivas que acompañan a la diagonal principal de la matriz tridiagonal.

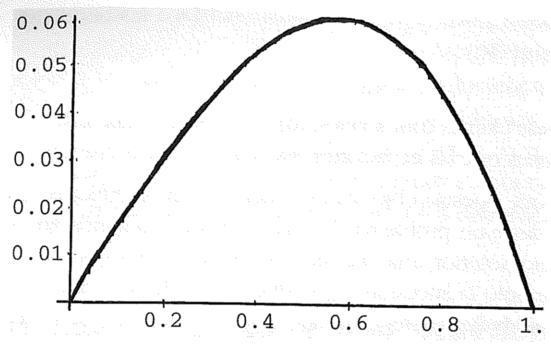

Figura 1

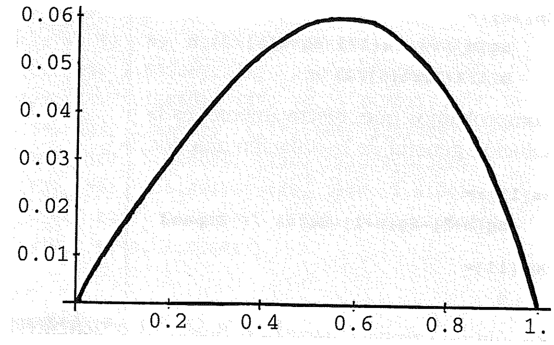

Figura 2

```
In[16]:=
    a = Table[-1, {98}]; b = Table[2, {99}];
```

En la variable `Solu` guardamos las soluciones del sistema tridiagonal. Es conveniente tener en cuenta que cuanto menor es h más exactitud obtenemos en las soluciones que buscamos. En este caso la solución discreta será bastante buena.

```
In[17]:=
    Solu = TridiagonalSolve[a, b, a, (1/10000) ima-
    gensucesión];
```

La figura 1 muestra una gráfica de nuestra solución discreta.

La figura 2 es el gráfico de la solución continua y exacta que obtuvimos anteriormente.

Es evidente, que la solución del problema discreto, al ser h = 1/100, es excelente.

Juan José González
Universidad de Las Palmas
de Gran Canaria
Sociedad Canaria de
Profesores de Matemáticas
«Isaac Newton»

Bibliografía

BOYER, C.B.(1987): *Historia de la matemática*, Alianza Universidad Textos.

DAVIS, J. D. Y R. HERSH (1988): *Experiencia matemática*, Labor, Barcelona.

GUZMÁN, M. (1996): *El rincón de la pizarra*, Pirámide, Madrid.

KOLMAN, B. (1988): *Álgebra lineal*, Addison-Wesley Iberoamericana.

MARTIN, J. C. (1984): «Método de Gauss: su aplicación al álgebra», *Números*, n.° 10, 67-72.

WOLMFRAM, S. (1992): *Mathematica. A System for Doing Mathematics by Computer*, Addison-Wesley.