SUMA 21
febrero 1996, pp. 89-96

El dibujo del embaldosado: un ejemplo de matematización

Carlos Maza Gómez

IDEAS Y RECURSOS

La reforma educativa en Matemáticas alienta la utilización de problemas históricamente no matemáticos en origen y que reciben una progresiva matematización: el caso planteado es el del dibujo del embaldosado cuya técnica comienza en el siglo XIV y conoce importantes resultados matemáticos en el siglo XVI. Entre éstos se destacan por su importancia y su posible utilización en el aula las técnicas de 2/3, la de Alberti y la construcción actual de Della Francesca. El teorema de Vignola-Danti vendrá a culminar este proceso de matematización.

Historia y educación matemáticas

Uno de los fundamentos de la actual reforma de la enseñanza en el área de Matemáticas es el concepto del que se parte respecto de la naturaleza del conocimiento matemático. Como se afirma repetidamente en su texto básico (MEC, 1989) el conocimiento matemático se adquiere mediante un proceso que resulta clarificado por el estudio de la historia. Así, se sostiene que

La perspectiva histórica muestra claramente que las matemáticas son un conjunto de conocimientos en evolución continua y que en dicha evolución desempeña a menudo un papel de primer orden su interrelación con otros conocimientos y la necesidad de resolver determinados problemas prácticos (p. 479).

Otra consideración importante se deriva del uso, en el proceso histórico de construcción de las matemáticas, del razonamiento empírico-inductivo en grado no menor que el razonamiento deductivo (p. 480).

Estas consideraciones se entroncan en la línea característica de la filosofía de la matemática de la última mitad de este siglo, una línea que, inaugurada por Lakatos, considera su objeto de trabajo no tanto la naturaleza en sí del concepto matemático sino su génesis o, en otras palabras, el proceso de construcción del conocimiento matemático.

A partir de lo dicho en el documento básico de la reforma educativa se extraen inmediatamente unas consecuencias didácticas en torno a la forma que tiene que adoptar el aprendizaje del alumno en Matemáticas:

debe tenerse en cuenta, por una parte, que determinados conocimientos matemáticos permiten modelizar y resolver problemas de otros campos y, por otra, que a menudo estos problemas no estrictamente matemáticos en su origen proporcionan la base intuitiva sobre la que se elaboran nuevos conocimientos matemáticos

a lo que se añade poco después que

Los tanteos previos, los ejemplos y contraejemplos, la solución de un caso particular, la posibilidad de modificar las condiciones iniciales y ver qué sucede, etc., son las auténticas pistas para elaborar proposiciones y teorías (p. 480).

lo que consigue completar en mayor medida el panorama sobre la relación entre historia y educación matemáticas: la forma de aprendizaje que el profesor debe fomentar entre sus alumnos de Matemáticas es un proceso constructivo del conocimiento matemático basado en todas las características que el enfoque actual de la historia señala, tal como ser un proceso acumulativo e interrelacionado, falible, originado en el contraste de unas teorías con otras a partir de un enfoque empírico-inductivo con una formalización posterior, con una forma de validación social, etc.

De esta forma la historia de la matemática no es un simple conjunto de problemas históricos que introducir en clase, unas anécdotas biográficas que motiven al alumno. No es un recurso ocasional sino uno de los fundamentos epistemológicos de la actual reforma curricular.

No obstante, para que la historia de la matemática responda a la importancia social hoy concedida (y que se traduce en su presencia constante en los congresos celebrados sobre educación matemática en nuestro país) debe cumplir una serie de condiciones:

1) Que alcance a constituirse como campo de trabajo e investigación, lo que requiere el análisis de los elementos que la constituyen y las relaciones que es posible establecer con el campo educativo (Maza, 1994). Ello debe generar el planteamiento de problemas susceptibles de ser investigados con todo rigor.
2) Que los profesores la puedan ver como un recurso didáctico de importancia y utilidad en su trabajo de aula. Este objetivo exige la transformación del saber encerrado en los libros de historia de la matemática en un saber que se debe enseñar por parte del profesor. Esta transposición del conocimiento debe ser un trabajo conjunto de los especialistas en la materia y de los profesores que van a poner en práctica este saber así generado.
3) Condición fundamental es la divulgación entre el profesorado de los contenidos de la historia de la matemática pero, al tiempo, una condición previa para ello es que los especialistas en este campo del saber orienten su labor, no sólo al estudio gratificante de la historia en sí misma, sino a su repercusión en las aulas. En otras palabras, si la élite de los estudiosos se orienta hacia el conocimiento en sí olvidando sus aspectos prácticos y su repercusión en la educación matemática podremos afirmar casi con seguridad que la historia de la matemática irá desapareciendo de los congresos paulatinamente y, lo qùe es más grave, que su consideración no afectará a la modificación y mejora de los procesos educativos en el aula de Matemáticas.

...la forma de aprendizaje que el profesor debe fomentar entre sus alumnos de Matemáticas es un proceso constructivo del conocimiento matemático basado en todas las características que el enfoque actual de la historia señala...

El dibujo del embaldosado: importancia histórica y didáctica

En la línea de todo lo dicho anteriormente se presenta en este artículo un estudio breve y fundamentalmente práctico sobre «un problema no estrictamente matemático en su origen» que, sin embargo, muestra cómo surge y se construye el proceso de matematización. Al tiempo, sus resultados son una muestra interesante de aplicación de los triángulos semejantes a la resolución de un problema histórico como ha sido la representación pictórica de los volúmenes y, en concreto, del dibujo en profundidad de un suelo embaldosado.

A comienzos del siglo XIV una nueva clase socio-económica emergía en la estructura social de la Edad Media occidental: la burguesía. Su inferioridad de clase frente a la aristocracia y su superioridad en aspectos comerciales impelía a los burgueses a buscar formas de dignificar su posición. Una de ellas sería la realización de encargos pictóricos en forma de retratos, paisajes urbanos, etc. Una de las características que se exigía, sin embargo, a estos encargos es que respetaran las bases científicas ancladas en la realidad en que esta burguesía basaba su crecimiento y posterior triunfo. En otras palabras, no se aceptaba que el punto de vista «interior» del pintor, fundamentalmente desde el punto de vista religioso, modificase la percepción de la realidad que pretendía tener el autor del encargo.

Se asiste así a una irrupción sistemática de intentos de dotar de volumen a un cuadro que, si bien son anteriores al siglo XIV, es en sus comienzos y, en particular, con las obras de Giotto (1267-1337) y Lorenzetti (1290-1348), cuando se registran las primeras aportaciones técnicas de importancia y, en particular, el establecimiento del «punto de fuga» y su aplicación al dibujo del suelo embaldosado de una habitación.

El punto de fuga y la regla de los dos tercios

En su *Anunciación* de 1344 Ambrosio Lorenzetti construye un pavimento de baldosas de forma que todas las rectas que van hacia el fondo convergen en un punto. Con una separación decreciente entre las rectas horizontales a la base del cuadro se consigue un efecto de profundidad respecto a los cuales se situan las figuras en tamaño decreciente. Tal como señala Maltese (1990):

El ajedrezado de la base de la escena constituye un sistema de coordenadas que proporciona una definición todavía aproximativa del tamaño de los objetos y de las distancias que los separan (p. 440).

Sin embargo, el empleo de esta técnica hace surgir diversos problemas, el principal de los cuales es la determinación de las distancias entre las separaciones horizontales. Es obvio que tales separaciones deben ser progresivamente menores pero ¿cuánto menores? Se puede registrar aquí una matematización intuitiva como la que caracteriza a la regla de 2/3. Si la separación inicial es arbitraria (llamémosla *a*), la siguiente será de 2a/3, a continuación 4a/9 (es decir, 2/3 de la separación anterior) y así sucesivamente. De esta manera, las separaciones formarían una progresión geométrica de valor inicial *a* y de razón 2/3 (figura 1).

Ambrogio Lorenzetti. *Anunciación* (1344)

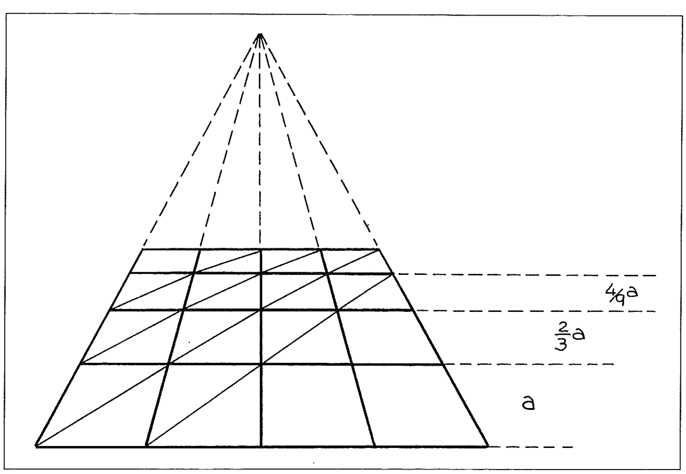


Figura 1

Como se puede observar en la figura 1, existe una limitación importante para esta regla: el hecho de que las diagonales de las baldosas cuadradas escogidas para el suelo no son convergentes sino que forman una figura aproximadamente espiral. Esto hace que el efecto visual, cuando el embaldosado es amplio en profundidad, resulte tosco y discrepe de lo esperado en la representación al utilizar el punto de fuga.

Pues bien, se puede considerar el caso de que la base del suelo esté dividida en cuatro partes iguales por los puntos D, C, O, A y B y se tomen como ejes de coordenadas la horizontal del suelo más cercana al observador y la recta perpendicular a la misma pasando por su centro O y por el punto de fuga F (figura 2). El problema consistirá en lo siguiente:

Si se toma F de coordenadas (0,c) y los puntos del eje X de coordenadas D (-2b,0), C (-b,0), A (b,0) y B (2b,0), probar:

1) En qué condiciones la regla de 2/3 es adecuada para que las diagonales correspondientes a las dos primeras separaciones estén alineadas.
2) De qué forma hay que elegir la razón de la progresión geométrica en función de la relación entre a y c para obtener el mismo resultado.
3) Que estas alineaciones no son válidas cuando se considera la tercera separación de baldosas.

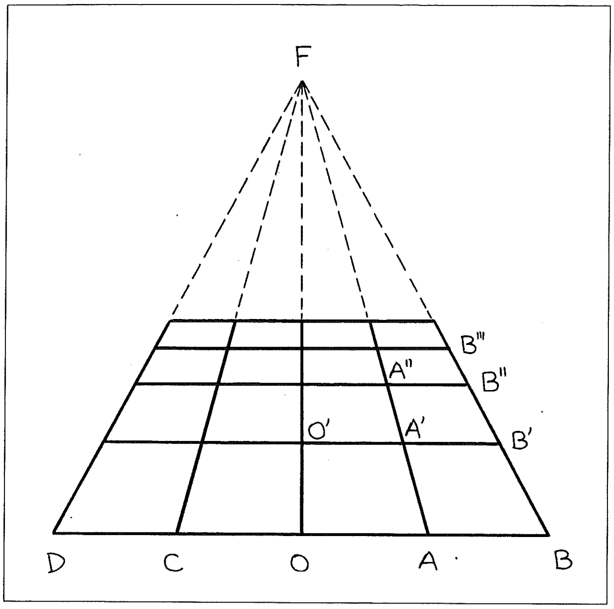


Figura 2

Vamos a responder a las dos primeras cuestiones. A partir de la figura 2 se obtienen las ecuaciones de

La recta FB: $x = (2bc - 2by)/c$

La recta FA: $x = (bc - by)/c$

de donde es posible obtener las coordenadas de los puntos situados sobre las rectas $y = a$, $y = ra$ siendo *ra* el valor obtenido al sumar las dos primeras separaciones (si la razón es de 2/3, $ra = a + 2a/3 = 5a/3$).

$$A' ((bc - ba)/c,\ a)$$

$$B'' ((2bc - 2abr)/c,\ ra)$$

Tras utilizar la intersección de rectas, el concepto más útil es el de pendiente de la recta. Se pueden comparar las pendientes de las rectas OA' y OB'' (también A'B'') que, para que las diagonales estén alineadas, deben ser iguales:

$$ac/(bc - ba) = rac/(2bc - 2abr)$$

de donde:

$$r(c + a) = 2c$$

que nos indica las relaciones entre *r*, *a* y *c* de manera que las diagonales entre los cuadrados de las dos primeras filas de baldosas estén alineadas.

Para $r = 5/3$ se obtiene $a = c/5$ que nos señala que la primera separación debe ser la quinta parte de la distancia del eje horizontal tomado al punto de fuga. Sólo en estas circunstancias las primeras diagonales están alineadas.

Para responder a la segunda cuestión, ¿qué sucederá si la distancia *a* se elige de otro modo? ¿Existe un valor de *r* que permite la alineación de estas primeras diagonales?

En efecto, el valor de *r* viene dado por:

$$r = 2c/(c + a)$$

Así, en caso de que elijamos situar A del eje horizontal a la cuarta parte de la distancia a F, *r* valdrá

$$r = 8/5$$

que nos viene a decir que la razón de la progresión sería de 3/5.

La tercera cuestión puede demostrarse comparando las pendientes de las rectas O'A'' y O'B''', por ejemplo, y comprobando que estas pendientes no son iguales para ningún valor de *a* y *r* que se elija.

La solución de Alberti

Si la regla de los 2/3 es básicamente intuitiva y artesanal dentro de un primitivo proceso de matematización, la situación es similar pero más compleja en el caso de la solución aportada por León Battista Alberti (1404-1472) cuyo método se puede describir (figura 3) según defiende en su obra *De Pictura* (1436) del siguiente modo:

1) Dibujar las líneas desde el punto de fuga hasta todas las subdivisiones de la base del cuadro AB.
2) Trazar por F una línea paralela a AB que corte al eje del cuadro (perpendicular a AB) en N.
3) Extender FN hasta O de manera que la distancia ON sea la que media entre el observador y el cuadro.

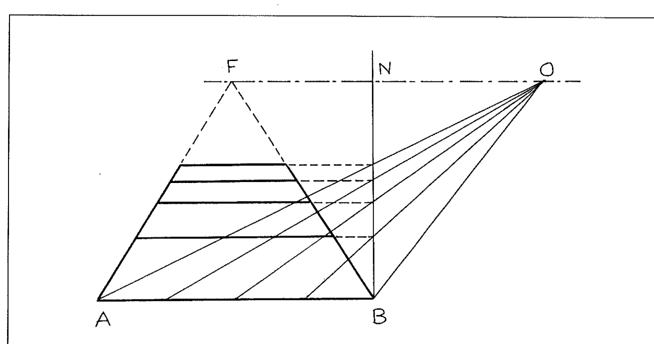


Figura 3

4) Trazar líneas desde O hasta todas las subdivisiones de la base del cuadro AB.

5) Por los puntos en que estas líneas cortan a BN trazar paralelas a la base del cuadro. Éstas serán las separaciones buscadas.

Alberti parece haber llegado a esta solución de manera fundamentalmente artesanal. Es evidente este hecho cuando habla de la superioridad de su método dado que las diagonales están en línea recta. Sin embargo, no percibe que todas las diagonales deben converger en un punto situado en la misma línea de fuga horizontal FN y ello tanto las diagonales inclinadas hacia la derecha como las contrarias (Kemp, 1984).

Métodos bifocales

Una de las construcciones perspectivas importantes en la solución del problema del embaldosado fue la *Navidad* de Paolo Ucello (1397-1475), donde se consideraban dos puntos O y O' a igual distancia del punto de fuga F, una distancia dada por la existente entre el cuadro y el observador. A continuación se trazan segmentos rectilíneos entre O, O' y todas las divisiones del embaldosado en la base del cuadro. El resultado es un procedimiento superabundante (como veremos inmediatamente) donde se obliga a todas las diagonales a alinearse y se admite ya el hecho (ignorado por Alberti) de que estas diagonales converjan en los puntos O y O' (figura 4).

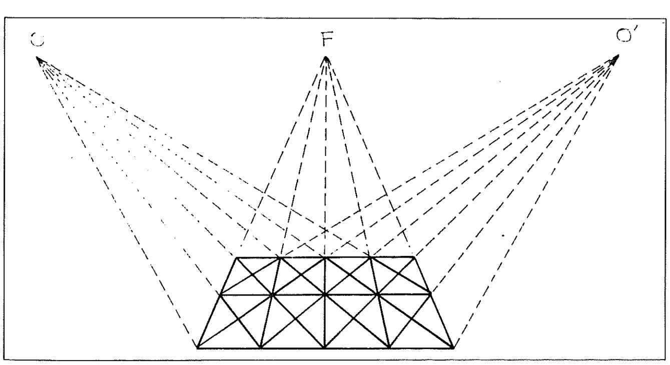
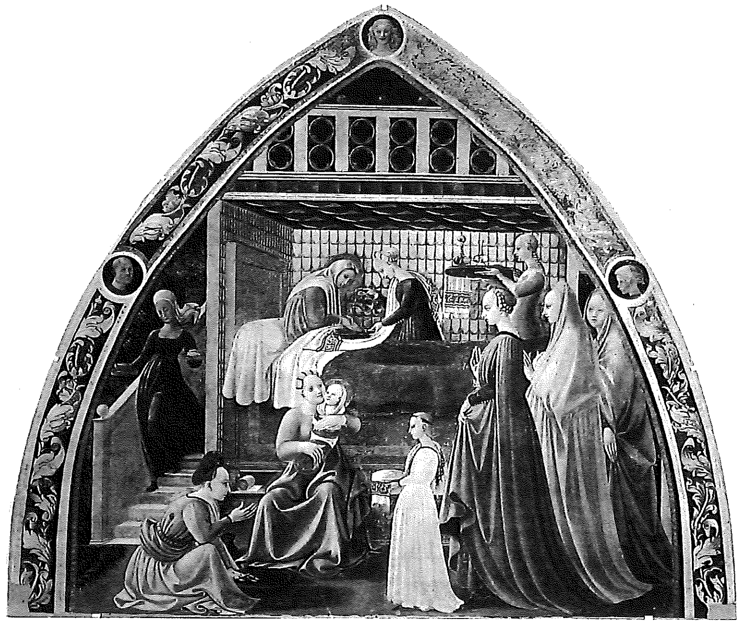


Figura 4



Paolo Ucello. *Natividad de la Virgen* (1435-40)

En aquella época la vida de pintores y arquitectos discurría entre los gremios profesionales que se transmitían de maestro a discípulos unas técnicas determinadas, entre otras las asociadas a la pintura en perspectiva. Los viajeros que visitaban Italia no eran frecuentes pero sí importantes en la exportación de estas técnicas al resto de Europa. Un ilustre viajero fue, por ejemplo, Alberto Durero (1471-1528), que extendió y amplió los estudios de perspectiva en toda Europa central. Otro viajero anterior fue Jean Pelérin (1445?-1522?), llamado Viator (el Viajero), canónigo de la catedral de Toul y secretario de Luis XI. Su libro, *De artificiali perspectiva*, impreso en 1505, consta de muy poco texto y muchas láminas y en él muestra aplicaciones de su método de «tres puntos», muy similar aunque más simple que el de Ucello.

Efigie de Durero. Xilografía de F. Schön (1527)

En efecto, considera el mismo punto de fuga F y dos puntos más equidistantes del anterior y alineados con él, O y O', a partir de los cuales se traza una sola oblicua al extremo opuesto de la base del cuadro (figura 5). En su intersección con las líneas concurrentes en el punto de fuga se forman dos puntos que definen en cada caso la separación paralela a la base del cuadro, pero sin necesidad de considerarla como tal paralela.

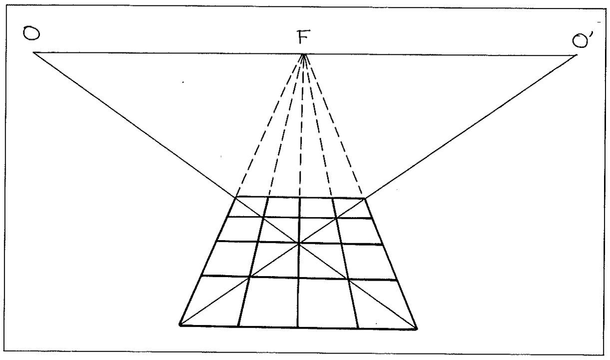
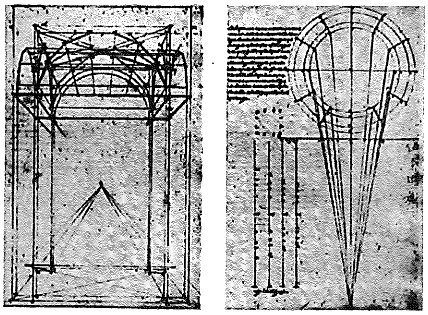


Figura 5

Construcción moderna por punto de distancia

Los procedimientos bifocales, si bien efectivos, utilizan un exceso de recursos para resolver el problema (Field, 1987). Piero della Francesca (1415-1492) escribió un tratado sobre perspectiva llamado *De prospectiva pingendi* donde, entre diversas y prolijas explicaciones geométricas, expone tres casos de dibujo de una figura rectilínea en perspectiva. El último de ellos (figura XXIII del libro I) ha pasado a la historia por constituir el actual método de representación de un rectángulo a través del «punto de distancia». Curiosamente el método, una vez enunciado por el maestro italiano, es aparcado en su obra y no lo vuelve a utilizar.



Diseños de Piero della Francesca que ilustran el *De prospectiva pingendi*

Las etapas de su construcción del embaldosado son las siguientes (figura 6):

1) Se dibujan las líneas que unen el punto de fuga F con las divisiones en la base del cuadro AB.
2) Se traza una línea paralela a la base del cuadro pasando por F.
3) Se toma en esta línea el punto O tal que la distancia FO sea igual a la que media entre cuadro y observador.
4) Se une O con A.
5) Por los puntos definidos por la intersección de OA con las líneas trazadas en 1) se trazan paralelas a AB.

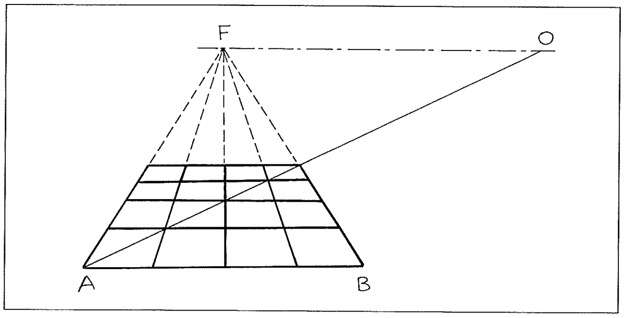


Figura 6

El teorema de Vignola-Danti

El método de Della Francesca es el más económico en los medios utilizados. La cuestión es que el método albertiano seguía gozando de un gran prestigio y los dos no son exactamente iguales pese a que sus resultados parezcan adecuados. El cómo llegó a demostrarse la equivalencia de ambos métodos constituye precisamente una de las cumbres en la geometrización de una técnica inicialmente artesanal como es la de la pintura en perspectiva.

La influencia euclidiana fue extendiéndose constantemente tanto a través de su obra geométrica clásica como de la óptica. Ya el propio Della Francesca definía la pintura como «el plano sobre el que el ojo con sus rayos visuales marca objetos proporcionalmente» (citado en Kemp, 1984, p. 95). En 1575 Federigo Commandino publica su tra-

Federigo Commandino publica su traducción de los *Elementos* de Euclides, mientras que la *Optica* se publicaría dos años antes en la traducción de Ignacio Danti. Otras traducciones (como la de Zamberto) eran del mismo siglo pero incluso anteriores. En general el campo estaba abonado para la matematización de estas técnicas.

En 1583 se publicaba en Roma *Le due regole della prospettiva pratica con i commentari del R.P.M. Egnatio Danti* donde este último comentaba y demostraba geométricamente diversos resultados dados por Jacobo Barozzi (llamado Vignola). Entre ellos se incluía un hermoso teorema en el que se demostraba la equivalencia de los métodos de Alberti y Della Francesca.

Su enunciado es el siguiente (figura 7):

Sean dados dos triángulos iguales y equiángulos [FOE y DRC], dispuestos entre dos líneas paralelas [FC y OR]. Si se trazan otras dos líneas [DA y CA] a partir de los dos extremos [D y C] de la base [DC] y hacia un mismo punto [A] de la línea paralela opuesta [OR], que cortan los dos lados del otro [FO y EO], la línea [GH] que pasa por las dos intersecciones [G y H] será paralela a la base de estos dos triángulos (citado en Bessot y Le Goff, 1993, p. 223).

Es muy común que la historia de la matemática refleje una postura usual en los propios matemáticos frente a su obra: borrar las huellas dejadas por el proceso de construcción y refinamiento de un resultado.

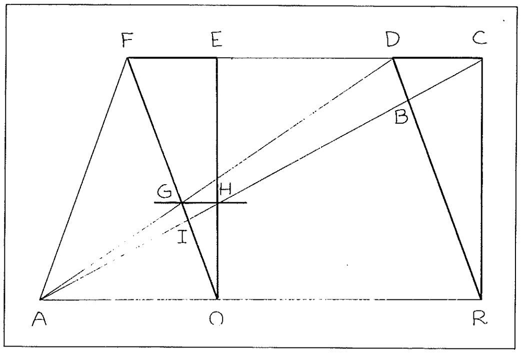


Figura 7

La demostración utiliza sistemáticamente la definición de triángulos semejantes y el hecho de que dos paralelas que cortan a dos rectas concurrentes forman dos triángulos de tal tipo.

Así, los triángulos RCB y OHI son semejantes por lo que

$$RB/OI = CB/HI$$

Como los triángulos RBA y OIA también lo son, resultará

$$RB/OI = BA/IA$$

de donde obtenemos la igualdad:

$$BA/IA = CB/HI$$

A ello le unimos el hecho de que, al ser los triángulos ABD y AIG semejantes,

$$BA/IA = BD/IG$$

De todo lo visto hasta ahora se concluye en que

$$BD/IG = CB/HI$$

Pero como el ángulo GIH es igual al ángulo DBC por cortar la recta AC a dos paralelas, se concluye que los triángulos GIH y DBC son semejantes. De ahí que los ángulos IGH y BDC sean iguales y, por tanto, se concluya con el paralelismo de GH y DC.

Se puede apreciar que este elegante resultado aplica varios resultados euclídeos culminando un proceso de matematización de las técnicas pictóricas artesanales comenzadas en el siglo XIV. Así resulta ser un ejemplo, no sólo de aplicación de la semejanza de triángulos, sino también de la matematización de la técnica o, en palabras de los proponentes de la reforma educativa, de un problema «no estrictamente matemático en su origen» que proporciona «la base intuitiva sobre la que se elaboran nuevos conocimientos matemáticos».

Final: un ejemplo de error histórico

Es muy común que la historia de la matemática refleje una postura usual en los propios matemáticos frente a su obra: borrar las huellas dejadas por el proceso de construcción y refinamiento de un resultado. Además, la propia actitud de los matemáticos de considerar su ciencia como un conjunto de conocimientos absolutos hace más fácil olvidar errores «injustificables» desde la perspectiva del rigor matemático. Sin embargo, la historia nos enseña que los errores existieron, a veces entre grandes matemáticos (recuérdese, si no, la distinción cartesiana entre curvas geométricas y mecánicas).

Uno de estos errores respecto a las reglas de dibujo del embaldosado y representación del rectángulo desde una perspectiva cónica corresponde a Sebastiano Serlio (Bessot y Le Goff, 1993). Este arquitecto del siglo XVI escribió un tratado donde incluía la siguiente regla para pintar las separaciones horizontales de un embaldosado.

Al igual que en el caso de Alberti se considera el triángulo FAO (figura 8), una vertical EO a la base AO y un punto C en la prolongación de FE y tal que la distancia EC sea la que separe al cuadro del espectador. La primera separación SG se obtiene de idéntico modo que en el método de Alberti. La diferencia de la regla de Serlio respecto de la de Alberti reside en el siguiente paso: se traza CS que corta a EO en un punto que marca la nueva separación a realizar. Este es el error.

¿Qué diferencias en cuanto a resultados prácticos se pueden registrar entre ambos métodos? Desde un punto de vista matemático, ¿qué consecuencias erróneas se pueden demostrar?. Estas son preguntas que dejamos al lector para que indague sobre ellas o consulte, en todo caso, sus soluciones a partir de las referencias aportadas.

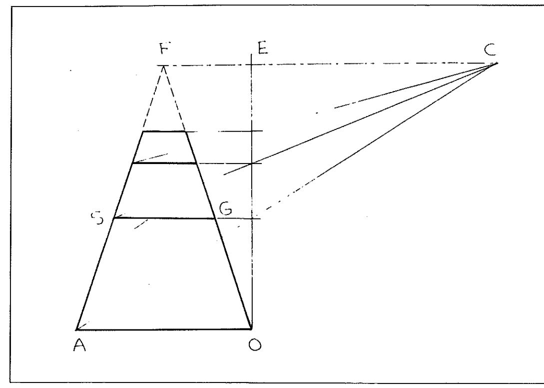


Figura 8

Referencias bibliográficas

BESSOT, D. y J. LE GOFF (1993): «Mais où est donc passée la troisième dimension?», en IREM: *Histoires de problèmes. Histoire des Mathèmatiques*, Marketing, París.

FIELD, J. V. (1987): «Linear perspective and the projective geometry of Girard Desargues», *Nuncius*, 2, 1-40.

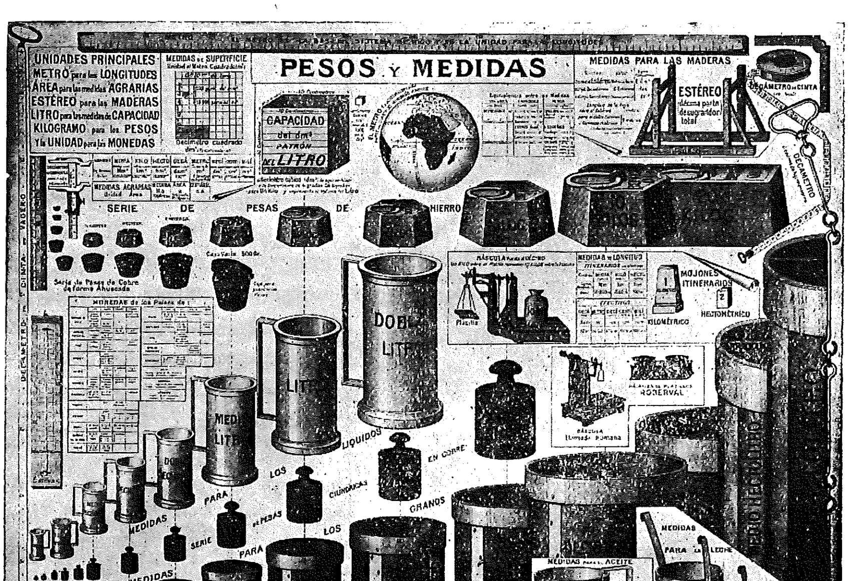
KEMP, M. (1984): «Geometrical perspective from Brunelleschi to Desargues: A pictorial means or an intellectual end?», *Proceedings of the British Academy*, 70, 89-132.

MALTESE, C. (1990): «Las técnicas artísticas», Cátedra. Madrid.

MAZA, C. (1994): «Historia de las Matemáticas y su enseñanza: Un análisis», *Suma*, 17, 17-26.

MEC (1989): *Diseño Curricular Base: Educación Secundaria Obligatoria II*, MEC, Madrid.

Carlos Maza
Facultad de Ciencias de la Educación.
Universidad de Sevilla
Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales



Cuadro de pesas y medidas
Catálogo del Material Escolar
de la casa Dalmáu Carles, Pla. S. A. (Gerona, 1928)