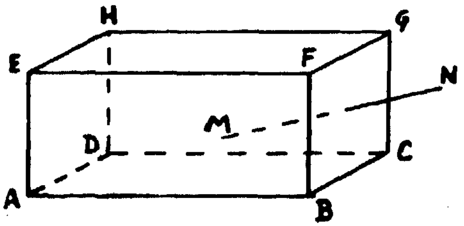
GEOMETRIA DEL ESPACIO

Por PILAR CELA
(Profesora del Colegio "Veritas")

EXPERIENCIAS A PARTIR DEL ORTOEDRO Y DEL PARALELEPIPEDO EN GENERAL

Si tenemos un ortoedro de cartulina, observamos que para pasar de un punto M de dentro a otro N de fuera es necesario atravesar la cartulina. Comprobamos entonces que la cartulina limita una parte del espacio que llamaremos *ortoedro;* ahora bien, la cartulina que limita o separa lo que es ortoedro de lo que no es ortoedro se llama *borde del ortoedro.* Este borde está formado por unos polígonos que llamamos *caras.* Las caras se unen—dos a dos—por un lado que llamamos *aristas* del ortoedro. Estas aristas se unen entre sí—de tres en tres—en puntos que se llaman *vértices* del ortoedro.



Los vértices se nombran con letras mayúsculas. Así, A, B, C, D, etc. Para las aristas: AB, BC, CD, FB, etc., y las caras, ABCD, FBCG, etc., por los vértices que las determinan.

Surge, inmediata la pregunta: ¿Cuántas caras, aristas y vértices tiene un ortoedro? Fácilmente se puede comprobar que tiene:

6 caras, 12 aristas y 8 vértices.

(Es conveniente que el alumno se ejercite en nombrar los distintos elementos: caras, vértices, etc., hasta lograr un completo dominio.)

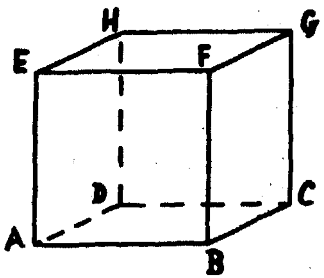
Naturaleza de las caras del ortoedro.—Todas las caras del ortoedro son rectángulos.

CUBO

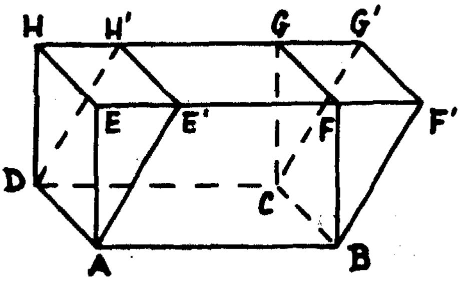
A partir del ortoedro, y como un caso particular, podemos hacer el estudio del cubo. El cubo tiene 6 caras, 12 aristas y 8 vértices.

Las caras del cubo son *cuadrados*. Se nombran del mismo modo que en el ortoedro: los vértices, aristas y caras.

Se puede generalizar más este estudio del ortoedro y del cubo como caso particular, pasando del ortoedro, mediante cortes convincentes, como indican las figuras adjuntas, al paralelepípedo más general.



Dado el ortoedro ABCDEFGH efectuemos un corte en forma de cuña y hemos pasado del ortoedro al paralelepípedo, que tiene *cuatro caras que son rectángulos,* opuestos dos a dos y otras dos caras, también opuestas, ABF'E' y DCG'H', que son paralelogramos.



Partimos del paralelepípedo obtenido en la experiencia anterior, ABCDEFGH, y el corte que se da es paralelo a la arista EF. Al añadir a la cara CDHG la cuña, obtenemos el paralelepípedo que tiene *2 caras opuestas,* ABCD y E'F'H'E', que son *rectángulos,* y las otras cuatro restantes, opuestas dos a dos, son paralelogramos.

El tercer corte que vamos a efectuar es a partir, como en el caso anterior, del últimamente obtenido.

Así llegamos al paralelepípedo más general, el que todas sus *caras son paralelogramos.*

Clasificación de los paralelepípedos:

1) Los que no tienen ninguna cara que sea rectángulo.

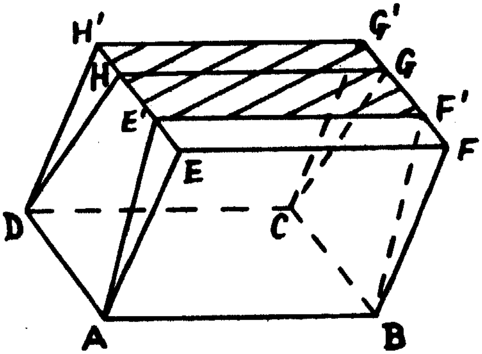
2) Aquellos que tienen *dos caras opuestas,* que son rectángulos.

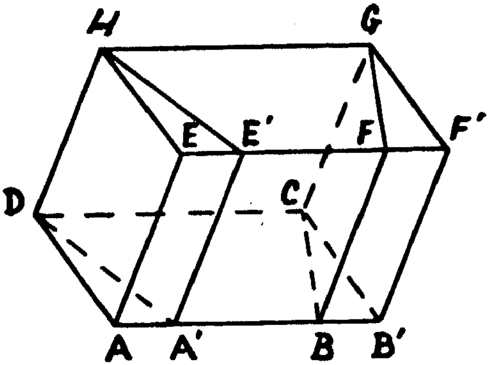
3) Paralelepípedos que tienen *cuatro caras,* opuestas dos a dos, rectángulos.

4) *Todas sus caras* son rectángulos (el ortoedro).

En general, comprendiendo las clases anteriores, podemos decir que las caras de un paralelepípedo son paralelogramos. Una propiedad elemental que define a dichos polígonos es la de que los lados opuestos son paralelos. Por ejemplo: en la cara ABFE, los lados AB y EF son paralelos. Observemos también que, además de ser paralelos, están en un mismo plano, el del paralelogramo.

Estas sencillas observaciones nos dan un método fácil para comprobar cuando *dos rectas son paralelas*. Bastará que con ellas poda-





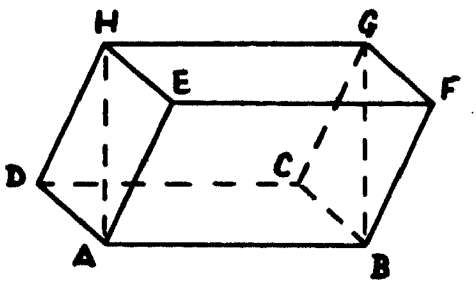
mos construir un paralelogramo de forma que dos lados opuestos del mismo estén sobre las rectas dadas.

Llegamos a otra conclusión: *Si dos rectas son paralelas están en un mismo plano,* o bien, *determinan un plano.*

Los paralelepípedos tienen algunas propiedades que vamos a analizar.

Supuesto un paralelepípedo sobre un plano horizontal—sobre una mesa, por ejemplo—, al fijarnos en la cara de delante, ABFE, comprobamos que es un paralelogramo; por tanto, la arista AB es paralela a EF. Ahora bien, la cara EFGH también es un paralelogramo, luego EF es paralela a HG. Tenemos, por tanto:

AB es paralela a EF
EF es paralela a HG.



Experiencia. — Cortar el paralelepípedo por el plano diagonal HGAB y observar que la sección es un paralelogramo; luego

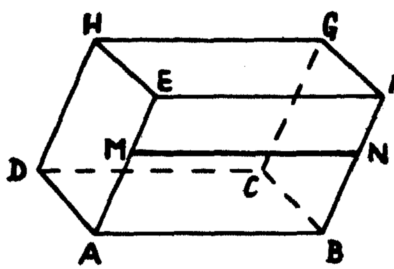
AB es paralela a HG.

Esta observación nos ha llevado a comprobar la *transitividad del paralelismo de rectas.*

PARALELISMO ENTRE RECTA Y PLANO Y ENTRE PLANOS

(Queremos definir una *clase* de planos respecto de un plano dado. Concretamente, la de los *planos paralelos a uno dado.*)

Se utiliza, para las experiencias, un paralelepípedo apoyado sobre un plano horizontal.



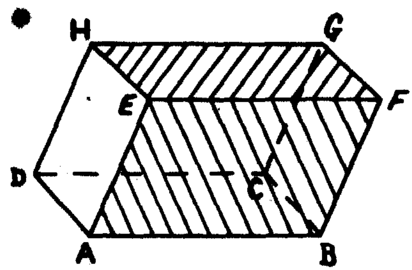
Experiencia 1.ª — Comparemos las caras ABFE y EFGH con la de la base ABCD.

Señalemos un punto M que pertenece a la cara ABFE y observemos que por él podemos trazar una recta MN que es paralela a la recta AB del plano de la base. La recta MN, que es paralela a la AB del plano de la cara ABCD, se dice que es paralela al plano de la base.

DEFINICION

Una recta que es paralela a otra recta de un plano, se llama paralela al plano, o bien, para que una recta sea paralela a un plano, es necesario y suficiente que sea paralela a una recta contenida en el plano dado.

Es conveniente que el alumno se ejercite en comprobar cuántas y cuáles son las rectas paralelas a las distintas caras del paralelepípedo, por ejemplo: EF es paralela a la cara ABCD, etc.



Experiencia 2.ª — Tomemos el punto E de la cara EFGH y veamos que por él podemos trazar dos rectas paralelas al plano ABCD:

1.º La recta EF, que por pertenecer a la cara ABFE, que es un paralelogramo, es paralela a su lado opuesto AB, luego—teniendo en cuenta la condición de paralelismo entre recta y plano—es *paralela al plano* ABCD.

2.º La recta EH, que pertenece a la cara AEHD del paralelepípedo, luego es paralela a su lado opuesto AD, y como AD es una recta del plano ABCD, diremos que EH es paralela al plano ABCD.

Existen, entonces, dos clases de planos respecto de un plano dado, en nuestro caso, el ABCD.

a) Planos que, como el ABFE, tienen la propiedad de que por uno de sus puntos, el E, sólo se puede trazar una recta, EF, paralela al mismo plano dado ABCD.

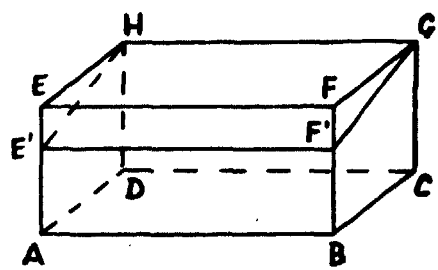
b) Planos, como el EFGH, que presentan la particularidad de que por uno de sus puntos, el E, se pueden trazar dos rectas, EF y EH, paralelas a un plano dado, ABCD.

Esta segunda clase de planos se llaman *paralelos a un plano dado,* ABCD.

(Se indican a continuación, algunas observaciones o experiencias que ayudan a la mejor comprensión de los conceptos anteriores.)

En todo paralelepípedo se verifica que en cada par de caras opuestas existen siempre dos aristas en una de ellas que además de cortarse entre sí, son paralelas a otras dos aristas de la cara opuesta que también se cortan. Por eso decimos que las caras *opuestas en un paralelepípedo son paralelas* o se encuentran en planos paralelos.

Demos ahora al paralelepípedo, por ejemplo, a un ortoedro para mayor sencillez, un corte de modo que el cuerpo obtenido no tenga la cara superior paralela a la base. (Véase la figura que recuerda la forma de algunos pupitres.) Observemos que en la cara superior E'F'GH también existen dos aristas: E'F' y HG que son paralelas a la base ABCD, pero con una diferencia esencial respecto del caso anteriormente estudiado: que las aristas E'F' y HG que cumplen esta condición no se cortan. Además, comprobaremos al intentar buscar rectas que cumplan esta doble condición en la cara E'F'GH, que no existen. Se dice entonces que estas dos caras ABCD y E'F'GH no son paralelas.

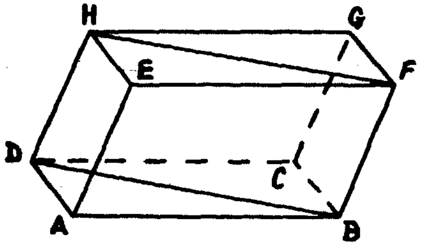


Es necesario comprobar que si dos planos son paralelos, toda recta de uno de ellos es paralela al otro.

Vamos a efectuar esta comprobación en un paralelepípedo.

1.º Con las aristas, por ejemplo, HG, que son los lados de los paralelogramos caras.

Partimos de la hipótesis de que las caras ABCD y EFGH son paralelas, como hemos visto anteriormente. La cara EFGH tiene como lado a la arista EF, que a su vez pertenece a la cara ABFE, luego AB es paralela a EF. EF es paralela a HG por lados opuestos de EFGH, luego HG es paralela a AB, y por tanto,



HG es paralela a ABCD.

Más sencillo sería ver que: HG es paralela a DC, y como DC pertenece a ABCD,

HG es paralela a ABCD.

Análogo razonamiento se podrá seguir para ver que HE es paralela a ABCD y GF es paralela a ABCD. Por tanto, hemos visto que si dos planos son paralelos entre sí, *toda recta de uno es paralela al otro.*

La experiencia anterior muestra que cortando dos planos paralelos por cualquier plano se determinan rectas de intersección, paralelas.

2.° Con rectas como HG (diagonal de la cara superior).

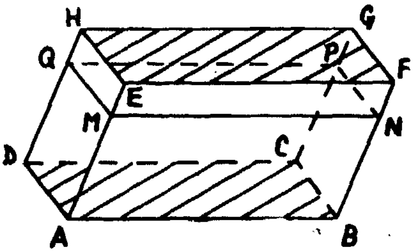
Dando un corte al paralelepípedo por su plano diagonal DBFH, veremos que las secciones, es decir, los planos diagonales, también son paralelogramos, luego se verifica que:

HG es paralela a DB, por lados opuestos de un paralelogramo, y como DB pertenece al plano ABCD, se cumple que *HG es paralela a ABCD.* Del mismo modo con el plano EGCA, para llegar a la conclusión de que: *EG es paralela a ABCD.* Y así, con cualquier otra sección, pues todas, en el paralelepípedo, darán paralelogramos.

Resumiendo: *Si dos planos son paralelos, toda recta de uno de ellos es paralela al otro.*

TRANSITIVIDAD DEL PARALELISMO DE PLANOS

Tracemos, en la cara ABFE, una recta MN paralela a AB. En AEHD, la recta MA, paralela a AD. Así, por las rectas MN y MQ, tenemos determinado un plano: MNPQ, que por construcción es paralelo al ABCD.



Ahora bien: MN es paralela a AB y AB es paralela a EF; luego

MN es paralela a EF.

MQ es paralela a AD por construcción, AD es paralela a HE por lados opuestos, luego

MQ es paralela a HE.

Luego el plano MPNQ es paralelo a EFGH. Resumiendo tenemos:

MNPQ es paralelo a ABCD, por construcción.

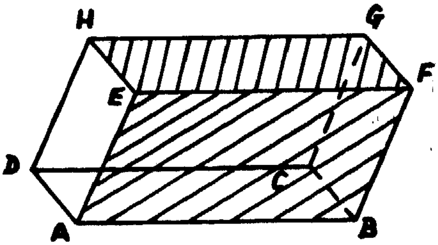
ABCD es paralelo a EFGH, por caras opuestas.

MNPQ es paralelo a EFGH.

* * *

Si dos planos son paralelos a una recta y no son paralelos entre sí, la recta de intersección de ambos es paralela a la recta dada.

En efecto: la recta CD es paralela al plano ABFE y es paralela al plano EFGH.



Para ver que CD es paralela a la cara ABFE, basta observar que CD es paralela a AB y que AB es un lado de dicha cara; luego, por la condición de paralelismo entre recta y plano,

CD es paralela a ABFE.

Del mismo modo vemos que: CD es paralela a HG, por lados opuestos del paralelogramo DCGH y que HG pertenece o forma parte de la cara EFGH por ser un lado, luego *CD es paralela a EFGH*. Tenemos, por tanto, una recta, CD, que es paralela a dos planos, ABFE y EFGH, que no son paralelos entre sí y que se cortan en la recta EF.

Ahora bien, para comprobar que CD y EF son paralelos se pueden seguir varios métodos:

1.º DC, FE determinan en el paralelepípedo un plano diagonal. Esta sección es un paralelogramo y DC y EF son lados opuestos, luego *son paralelos*.

2.º Por la transitividad del paralelismo entre rectas.

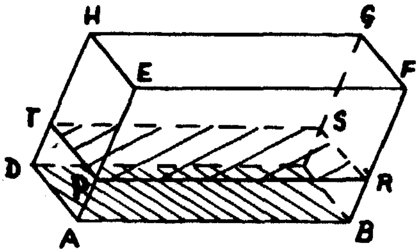
CD es paralela a AB, (por lados opuestos de la cara ABCD).

AB es paralela a EF (por lados opuestos de la cara ABFE), luego *CD y EF son paralelos*, como queríamos probar.

* * *

Por un punto se puede trazar un plano paralelo a uno dado, y sólo uno.

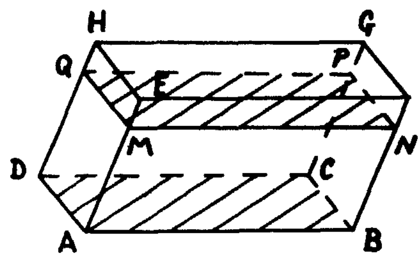
Sea el punto P por el que queremos trazar un plano paralelo al ABCD. Trazaremos por P una recta PR, contenida en la cara ABFE y que sea paralela a AB. Del mismo modo trazamos, también por el punto P, la recta PT en la cara AEHD, y que sea paralela a AD. Estas dos rectas determinan, nos dan, el plano buscado: PRST. Para comprobar que este plano, que pasa por P, es paralelo al ABCD, basta observar que está determinado por dos rectas, PR y PT, que además de cortarse, son paralelos respectivamente a otros dos, AB y AD, que también se cortan y que están en el plano ABCD, es decir, cumplen la condición de paralelismo entre planos. Que es único el plano PRST se demostraría al ver que no se pueden trazar por P, en las condiciones pedidas, más que las rectas PR y PT.



* * *

Por una recta paralela a un plano se puede trazar otro plano, y sólo uno, que sea paralelo al plano dado.

Sea la recta MN, paralela al plano ABCD, por la que se quiere trazar un plano paralelo al dado, ABCD. Para ello, tomemos en HN un punto M y por él tracemos una recta, MQ, que sea paralela a la AD. La recta dada MN y la MQ determinan el plano buscado. En efecto, el plano MNPQ es paralelo al ABCD porque en el primero existen dos rectas, MN y MQ, que se cortan y son paralelas a otras dos, AB y AD, del segundo plano y que también se cortan. Es único el plano porque por M sólo se puede trazar una recta, NQ, paralela a la AD.

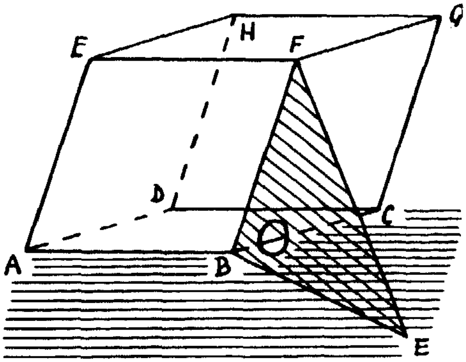


PERPENDICULARIDAD ENTRE RECTA Y PLANO

De modo análogo al seguido en el paralelismo entre rectas y planos, queremos definir una clase de rectas respecto de un plano dado: las *rectas perpendiculares a un plano.*

Experiencia 1.ª—Utilicemos como modelo un paralelepípedo con dos caras rectangulares, tomando como base uno de dichos rectángulos.

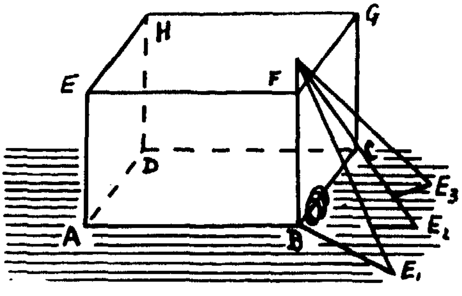
En la figura, ABCD y EFGH son las caras rectangulares, las demás son paralelogramos. Por tanto, las aristas BF y BC no forman ángulo recto.



Si hacemos coincidir, como indica la figura, con la arista BF uno de los lados que forman ángulo recto de una escuadra, se observará que el otro lado de la escuadra BE *sólo admite una única posición,* si queremos que esté apoyado en el plano de la base.

Siempre que ocurra esto se dice que la recta *BF no es perpendicular al plano de la base ABCD,* aunque, como hemos visto, existe una recta de dicho plano, BE, que es perpendicular a BF.

Tenemos el ortoedro ABCDEFGH. Al apoyar la escuadra haciendo coincidir uno de los lados que forman ángulo recto con la arista BF, y de modo que el otro lado BE esté contenido en el plano de la base, se obtienen, no una, sino muchas posiciones: BE_1, BE_2, BE_3, etc.



A las rectas BF, que cumplen esta condición respecto del plano de la base ABCD, se les llama *perpendiculares al plano dado.*

(Que el alumno compruebe esta experiencia en cada una de las aristas laterales del ortoedro.)

De aquí deducimos la condición de perpendicularidad entre recta y plano:

Para que *una recta y un plano sean perpendiculares, es necesario y suficiente que la recta sea perpendicular a dos del plano que se cortan.*

Las rectas que son perpendiculares a un plano son paralelas entre sí.

En el ortoedro ABCDEFGH, de la experiencia anterior, hemos visto que las aristas laterales son perpendiculares al plano de la base, es decir:

FB es perpendicular al plano ABCD.
GC es perpendicular al plano ABCD.
ED es perpendicular al plano ABCD.
EA es perpendicular al plano ABCD.

Vamos a comprobar que son paralelos entre sí. FB y GC son paralelos por lados opuestos del rectángulo BCFG, GC y HD por lados opuestos del rectángulo HDGC, luego FB y HD son paralelos por la transitividad del paralelismo entre rectas.

Análogo razonamiento seguiríamos con las aristas HD, EA y FB.

HD y EA son paralelos por lados opuestos del rectángulo HDEA.

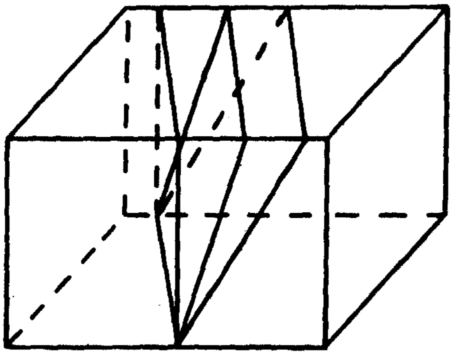
EA y FB son paralelos por lados opuestos del rectángulo EAFB.

Luego HD y FB son paralelos.

De este modo hemos comprobado que las rectas que son perpendiculares a un plano son paralelas entre sí.

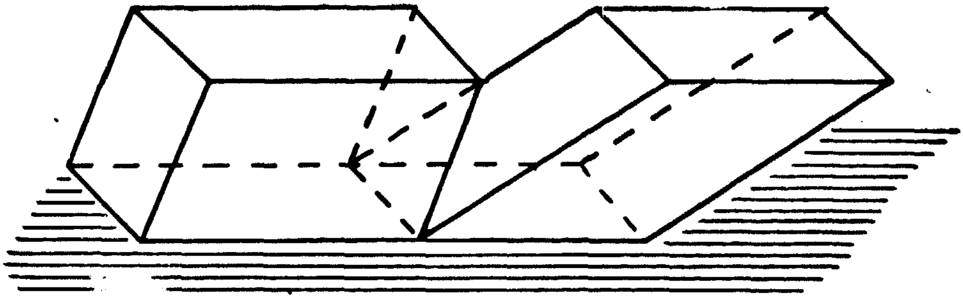
CONCEPTO DE ANGULO DIEDRO

En un modelo de ortoedro en plastilina podemos dar unos cortes —como se indica en la figura adjunta—, cuyos planos sección pueden tener más o menos inclinación respecto del plano de la base.



La parte de ortoedro comprendida entre dos planos sección o un plano sección y la cara básica se llama *diedro.*

Podemos pegar en los planos unas cartulinas con el fin de centrar más la atención en las caras y en la arista, MN, elementos esenciales del diedro.



Otro método, tal vez más fácil de realizar, para llegar al concepto de ángulo diedro es el unir, como se indica en la figura, dos paralelepípedos.

Una vez definido el diedro, es necesario estudiar la *igualdad de diedros.*

Cortando varias cuñas en el ortoedro, cuidando de que sean iguales, y si conviene prolongando las caras del diedro con cartulinas, como indicábamos, se comprueba, mediante una sencilla superposición, que se adoptan una al otro perfectamente. Entonces diremos que esos *diedros son iguales.*

DIEDROS CONSECUTIVOS

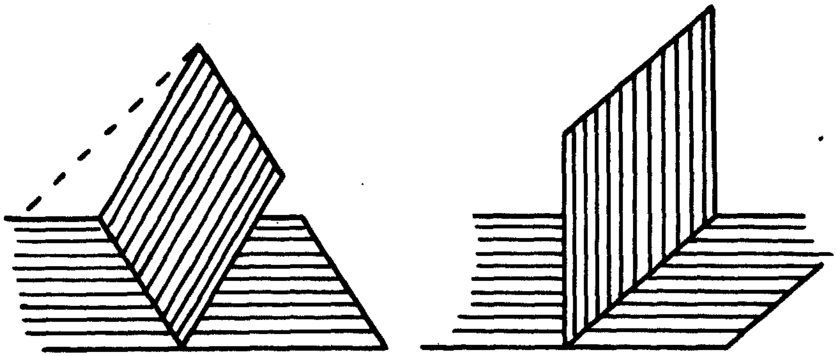
Si partimos del ortoedro donde hemos dado unos cortes para llegar a la definición de ángulo diedro, se ve que dos diedros pueden tener una cara común. A dicho ángulo diedro se le llama *consecutivo.*

DIEDROS ADYACENTES

Cuando dos ángulos diedros, además de tener una cara común, es decir, de ser consecutivos, las otras dos—una de cada uno—, están en un mismo plano, se llaman adyacentes.

Cuando un diedro es igual a un adyacente se le llama *diedro recto.*
Las dos caras que forman el ángulo diedro recto son perpendiculares entre sí.

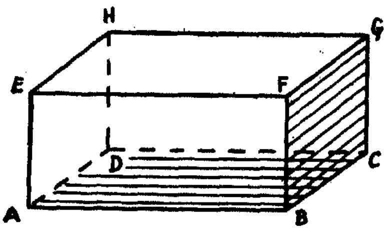
En el ortoedro, los ángulos diedros formados por cada par de caras consecutivas, es decir, que se cortan *en cada arista, son rec-*



tos. Cuando dos planos al cortarse forman diedros iguales, éstos se llaman rectos y los planos perpendiculares.

Como las aristas son perpendiculares a las caras (en un ortoedro), se deduce de éste que:

Si dos planos son perpendiculares entre sí.—El ABCD y el BCFG; *uno de ellos*, por ejemplo el ABCD, pasa por una recta, AB, perpendicular al otro plano, en nuestro caso, el BCFG.



En efecto: AB es perpendicular a BC por lados consecutivos del rectángulo ABCD. El lado AB es perpendicular a FB por pertenecer al rectángulo ABFE y ser lados consecutivos.

Tenemos entonces que:

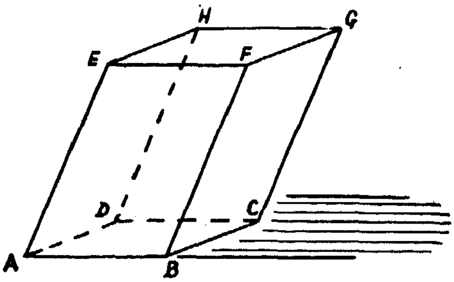
AB es perpendicular a BC
AB es perpendicular a FB,

pero BC y FB son lados de la cara FBCG y se cortan en un punto B, por tanto, queda probado que AB es perpendicular a la cara FBCG.

I. *Dado un plano y una recta no perpendicular a él, siempre se puede trazar un plano perpendicular al dado.*

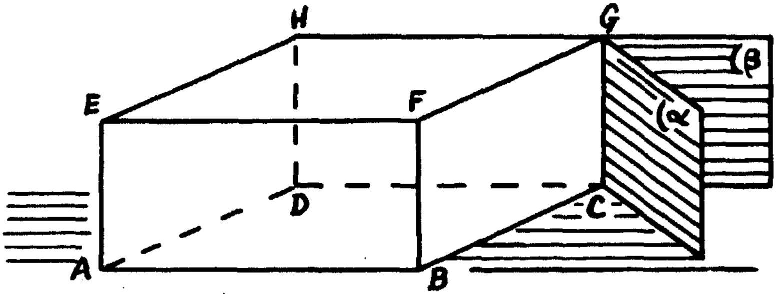
Sea el paralelepípedo, con dos caras rectangulares, ABCDEFGH, una de ellas tomada como base.

La arista BF no es perpendicular al plano de la cara ABCD; sin embargo, por ella se puede trazar un plano, y sólo uno, el ABFE, que sea perpendicular al ABCD.



II. *Si la recta es perpendicular al plano, todos los planos que pasen por ella serán perpendiculares al plano dado.*

Los planos que pasan por GC son perpendiculares al plano de base, como los α) *y* β).



Podemos decir que para que *dos planos sean perpendiculares es necesario que en cada uno exista por lo menos, una recta perpendicular al otro.*

* * *

Los alumnos pueden hacer estas experiencias sencillas:

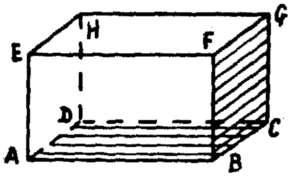
1.ª Hacerles la pregunta: ¿cómo se puede poner, de un modo perfecto, patas a una mesa? Comprobar que son necesarias dos escuadras y que con una sola no se podría.

2.ª Observar que para que una puerta pueda abrirse y cerrarse, es necesario que la arista sea perpendicular al plano del suelo. Sería interesante comprobar prácticamente, mediante un modelo, que si no fuera perpendicular, la puerta tropezaría con el suelo en alguna posición y no se podría abrir y cerrar.

* * *

Dados dos planos, perpendiculares entre sí, si por un punto de uno de ellos trazamos una recta perpendicular a la recta de intersección de los planos, dicha recta es también perpendicular al otro plano.

Sea el ortoedro ABCDEFGH y los planos ABCD y BCFG perpendiculares entre sí. El punto F pertenece al plano de la cara BCFG; la recta FB es perpendicular a la BC (intersección de los dos planos), por ser lados consecutivos de un rectángulo.



Para probar que FB—que cumple la condición de ser perpendicular a la intersección BC—es perpendicular al plano de la cara ABCD, es necesario ver que también es perpendicular a otra recta de dicho plano que se corte con BC. En efecto, la arista AB cumple:

1.° Está en el plano ABCD.

2.° Se corta con BC en el punto C.

3.° Es perpendicular a FB por ser lados consecutivos del rectángulo ABFE.

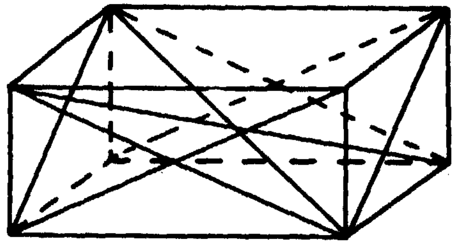
Por tanto, FB es perpendicular al plano ABCD, como queríamos probar.

PLANOS DIAGONALES EN EL ORTOEDRO

Efectuando un corte en el paralelepípedo, de modo que el plano sección contenga dos aristas opuestas, se obtienen los planos diagonales.

La sección obtenida es un paralelogramo en general y un rectángulo cuando es el ortoedro. Tracemos las diagonales, que se cortan en un punto, su punto medio, precisamente. Estas son las *diagonales* del paralelepípedo.

Las cuatro diagonales de un paralelepípedo se cortan en su punto medio, y se llama *centro* del mismo y además es *centro de simetría del paralelepípedo.*



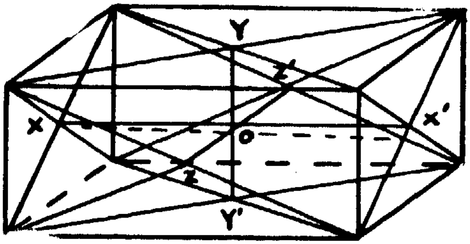
Este punto tiene la propiedad de que cualquier recta que pase por él, queda dividida en dos partes iguales. Los puntos que están en el espacio en línea recta con el centro de simetría, a igual distancia de él y uno a cada lado, se llaman *simétricos* respecto del centro.

SIMETRIAS DEL ORTOEDRO

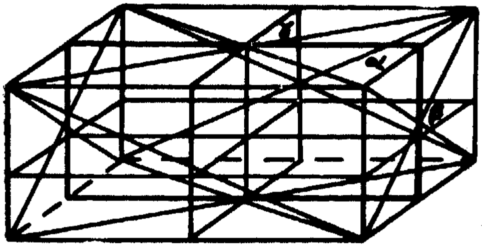
Como el ortoedro es un paralelepípedo, tiene un centro de simetría (donde se cortan sus diagonales).

Trazando las diagonales de las caras opuestas y uniendo los centros obtenemos las rectas

xx'
yy'
zz'



Estos ejes tienen la propiedad de que al efectuar un giro de dos rectos, es decir, media vuelta alrededor de ellos, todo punto del ortoedro coincide con otro, también del ortoedro, por eso se llaman ejes de *simetría del ortoedro* y pasan por el centro de simetría O.



Tracemos a continuación los planos α, β, γ que contienen estos tres ejes de simetría y obtenemos los *tres planos de simetría,* porque a todo punto del ortoedro le corresponde otro, también del ortoedro, a igual distancia del plano sobre la perpendicular común al plano.

Se puede hacer un estudio análogo, siempre experimental, sobre el *cubo* como caso particular del ortoedro.