Lecciones en la Universidad Internacional de Canarias

ELEMENTOS GEOMETRICOS

MATEMATICAS

Por JUAN CASULLERAS REGAS
Catedrático del Instituto «Milá y Fontanals» de Barcelona.

LA noción de ángulo se presta a muchas discusiones y es de las que presenta más dificultades a la enseñanza elemental.

El Cuestionario de 1967 prevé la consideración del ángulo bajo dos aspectos que dan sucesivas aproximaciones de este concepto.

La definición quintaesenciada que nos proponemos como meta lejana que sólo muy pocos de nuestros alumnos alcanzarán en sus estudios universitarios podría ser la siguiente:

Sea I^+ el conjunto de las isometrías directas del plano.
Sea T el conjunto de las traslaciones del plano.
T es un subgrupo invariante de I^+
El grupo de los ángulos es el grupo cociente I^+/T.

Conviene que toda la enseñanza, por elemental e incompleta que sea, esté de acuerdo con este horizonte. En los estudios sucesivos iremos completando puntos de vista, pero conviene que no haya que deshacer nada de lo que ya se ha hecho.

Nuestro intento es dar un resumen de cómo concebimos los dos primeros pasos de este camino, correspondientes a los dos temas del cuestionario:

EL ANGULO COMO REGION ANGULAR (primer curso)
EL ANGULO COMO GIRO (segundo curso)

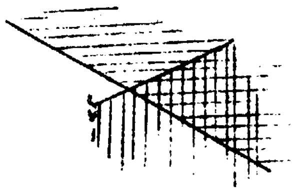
EL ANGULO COMO REGION ANGULAR

Consideremos el **plano** como idea primitiva que no definimos. Una imagen material de un trozo de plano puede ser una hoja de papel.

Doblando la hoja aparece un surco que nos sugiere la idea de que ésta divide el plano en dos **semiplanos.**

Sucesivamente definiremos el **punto,** la **semirrecta** y el **segmento.**

Llamaremos **región angular** a la intersección de dos semiplanos. Dos rectas definen cuatro regiones angulares **adyacentes.**



IGUALDAD DE REGIONES ANGULARES

El problema de la igualdad de figuras es fundamental en la concepción de la Geometría, y la definición que adoptemos para la igualdad fijará el carácter de nuestro desarrollo de la misma.

En el estadio que nos ocupa (10-12 años), la igualdad debe ir unida a la idea de cuerpo rígido.

Mediante un papel de calco, una plantilla o un **transportador** podemos dibujar regiones angulares iguales a una dada.

Dos regiones angulares son adyacentes si tienen el vértice y un lado común.

Dadas dos regiones angulares construyamos otras dos regiones **respectivamente iguales** y adyacentes. La reunión de estas dos regiones puede ser una región angular o no (como se ve en el ejemplo).

DEFINICION

Se llama **ángulo** a una región angular o a una reunión de regiones angulares adyacentes.

Con este concepto de ángulo tenemos material para el trabajo primer año, que dedicaremos a las construcciones gráficas. La igualdad de ángulos nos llevará a la idea de ángulo llano, ángulo recto, ángulos suplementarios y complementarios.

MOVIMIENTOS DEL PLANO

Imaginemos una figura de un plano y saquemos un calco de la misma. Moviendo el calco obtenemos otra figura que se dice **transformada** o **imagen** de la primera por un movimiento.

Propiedad característica:

$$\text{Si } A \rightarrow B' \quad \text{y} \quad B \rightarrow B'$$
$$\text{distancia } (AB) = \text{distancia } (A'B')$$

Se distinguen dos grandes tipos de movimientos: unos se pueden materializar con el papel de calco presentando siempre la misma cara. Son los movimientos directos. Otros se obtienen invirtiendo el papel de calco y se llaman movimientos inversos.

Casos especiales:

Simetría axial: Movimiento inverso que se obtiene haciendo girar el plano alrededor de una recta del mismo.

Traslación: Movimiento directo que se obtiene deslizando una plantilla sobre una recta.

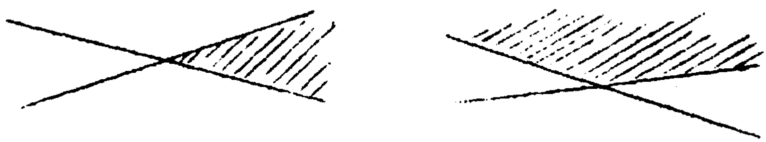
Giro: Movimiento directo que se obtiene fijando un punto de la plantilla.

Producto de dos movimientos A y B es el movimiento resultante de aplicar sucesivamente A y B.

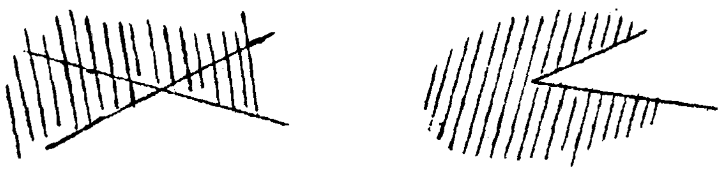
Los movimientos forman GRUPO

Las traslaciones forman GRUPO

Los giros de centro fijo forman GRUPO



Angulos que son regiones angulares



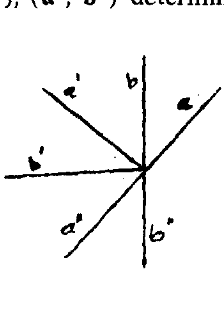
Angulos que no son regiones angulares

EL ANGULO COMO GIRO

Ahora nos fijaremos especialmente en las dos semirrectas que limitan el ángulo, que se llaman sus **lados** y en el origen de estas semirrectas, que es el **vértice.**

Dibujad dos semirrectas **a** y **b**, ambas del mismo origen 0 llamaremos ángulo al giro de centro 0 que transforma **a** en **b.** Claro está que este giro transforma también **a** en **a'**, **a" en b"**, etc. Por esto diremos que (**a**, **b**), (**a'**, **b'**), (**a"**, **b"**) determinan el mismo ángulo y escribiremos

$$\widehat{\mathbf{a}\,\mathbf{b}} = \widehat{\mathbf{a'}\,\mathbf{b'}} = \widehat{\mathbf{a''}\,\mathbf{b''}} \quad \textbf{etc.}$$



Observaciones:

El giro que transforma una semirrecta **a** en otra **b** es distinto del que transforma **b** en **a.** Por consiguiente

$$\widehat{\mathbf{ab}} \neq \widehat{\mathbf{ba}}$$

El giro que transforma una semirrecta en sí misma es la identidad (transformación en que cada punto coincide con su imagen).

SI UN GIRO ES TRANSFORMADO DE OTRO POR UNA TRASLACION, ESTOS GIROS, DESDE EL PUNTO DE VISTA DEL ESTUDIO DE LOS ANGULOS, SE CONSIDERAN EQUIVALENTES.

Sea G el giro que transforma la semirrecta **a** en la semirrecta **b**, es decir $G = \widehat{\mathbf{ab}}$ y $G' = \widehat{\mathbf{cd}}$ el giro que transforma **c** en **d.**

Se llama ángulo suma $\widehat{\mathbf{ab}} + \widehat{\mathbf{cd}}$ al giro $G \times G'$ resultante de aplicar sucesivamente G y G'.

ANGULO CERO

El ángulo $\widehat{\mathbf{aa}}$ que determina la identidad se llama ángulo nulo o ángulo cero por la analogía de sus propiedades con el número cero.

En efecto

$$\widehat{\mathbf{aa}} + \widehat{\mathbf{ab}} = \widehat{\mathbf{ab}}$$

puesto que si I es la identidad y G un giro cualquiera es

$$I \times G = G \times I = G$$

Escribimos $\widehat{\mathbf{aa}} = 0$

ANGULO OPUESTO

La suma de los ángulos $\widehat{\mathbf{ab}}$ y $\widehat{\mathbf{ba}}$ es el ángulo cero, puesto que

$$\widehat{\mathbf{ab}} + \widehat{\mathbf{ba}} = \widehat{\mathbf{aa}} = 0$$

PROPIEDAD CONMUTATIVA

$$\widehat{\mathbf{ab}} + \widehat{\mathbf{bd}} = \widehat{\mathbf{cd}} + \widehat{\mathbf{ab}}$$

El ángulo determinado por dos semirrectas perpendiculares es el ángulo RECTO. Medida de un ángulo en RECTOS es el número de veces que hay que aplicar un giro de un ángulo recto para obtener el ángulo considerado.

Dentro del mismo ciclo el Prof. Ramírez Estévez pronunció las siguientes lecciones sobre "El número entero" y "El número racional".