EL NUMERO RACIONAL[*]

Por GONZALO CALERO ROSILLO
(Catedrático del Instituto «Ramiro Maeztu»)

CONJUNTO $Z \times Z$.—Llamemos Z al conjunto de los números enteros. El conjunto producto $Z \times Z$ está formado por todas las parejas ordenadas de números enteros de la forma (a, b), a y $b \in Z$.

El conjunto $Z \times Z$ se puede representar en un sistema de ejes cartesianos de la manera ya conocida.

Fracciones.—A cada elemento $(a, b) \in Z \times Z$, $(b \neq o)$, se le llamará fracción.

Al conjunto de múltiplos de b lo representaremos por (b) y al conjunto de múltiplos de a por (a).

Definamos entre los conjuntos $Z \times Z$ y Z un producto de la manera siguiente. Sea $nb \in (b) \subset Z$ y la fracción $(a, b) \in Z \times Z$; el producto de $(a, b) \cdot nb$ se realiza así:

$$(a, b) \cdot nb = (a \cdot nb) : b = a \cdot n = an \in (a).$$

Cada fracción (a, b) es, según lo anterior, un operador que hace corresponder a cada múltiplo de b un múltiplo de a.

El operador (a, b) es un isomorfismo entre los conjuntos (b) y (a). En efecto:

a) A cada nb corresponde $n \cdot a$.

b) El $n \cdot a$ es homólogo de un solo múltiplo de b, pues si $x \in (b)$,

$$(a, b)x = n \cdot a \Rightarrow (a \cdot x) : b = n \cdot a \Rightarrow a \cdot x = n \cdot a \cdot b \Rightarrow x = n \cdot b.$$

Luego (a, b) es una correspondencia $(1, 1)$.

c) Además al $(n_1 + n_2)b \in (b)$ corresponde:

$$(a, b)(n_1 + n_2)b = [a \cdot (n_1 + n_2)b] : b = a(n_1 + n_2),$$

con lo cual queda demostrado que (a, b) es un isomorfismo de los múltiplos (b) sobre los múltiplos (a).

Dicha correspondencia se puede representar de las maneras siguientes:

$$(b) \xrightarrow{(a, b)} (a)$$

o así:

$$(a, b) : (b) \longrightarrow (a).$$

(*) Este tema ha sido desarrollado según las ideas y dirección de don Pedro Abellanas.

Consecuencia.—Si aplicamos (a, b) al b obtenemos:

$$(a, b) \cdot b = (a \cdot b) : b = a.$$

Según lo anterior, podemos considerar la presión (a, b) como el cociente de a entre b, $a : b$. La primera componente se llama numerador y la segunda componente, denominador.

Fracciones equivalentes. — Definamos en el conjunto $Z \times Z$ un criterio de igualdad que llamaremos R.

Diremos que dos fracciones (a, b) y (c, d) son equivalentes si aplicadas al conjunto de múltiplos comunes a la segunda componente producen el mismo efecto. Es decir, que para todo x que sea múltiplo de b y múltiplo de d se verifica:

$$(a, b)x = (c, d)x, \qquad x = \dot{b}, \qquad x = \dot{d}.$$

El criterio anterior verifica las tres propiedades de la igualdad:

Propiedad idéntica:

$$(a, b) = (a, b),$$

pues

$$(a, b)x = (a, b)x$$

para todo $x = \dot{b}$.

Propiedad recíproca.—Si

$$(a, b) = (c, d),$$

se verifica que

$$(c, d) = (a, b),$$

pues

$$(a, b)x = (c, d)x$$

para todo $x = \dot{b}$, $x = \dot{c}$.

Propiedad transitiva.—Si

$$(a, b) = (c, d) \qquad \text{y} \qquad (c, d) = (f, g),$$

se verifica que

$$(a, b) = (f, g).$$

En efecto,

$$(a, b)x = (c, d)x \qquad \text{y} \qquad (c, d)x = (f, g)x$$

para todo $x = \dot{b}$, $x = \dot{d}$, $x = \dot{g}$; luego

$$(a, b)x = (f, g)x \Rightarrow (a, b) = (f, g).$$

Consecuencias.—Sean

$$\text{m. c. d. } (b, d) = D, \qquad b' = \frac{b}{D}, \qquad d' = \frac{d}{D};$$

sabemos que el conjunto de los múltiplos comunes a b y d es el conjunto $kb'd'\mathrm{D}$ para todo $k \in \mathrm{Z}$. Se puede representar de estas maneras:

$$(b'd'\mathrm{D}) = (bd') = (b'd) = kb'd'\mathrm{D}. \qquad k \in \mathrm{Z}.$$

1.º Si $(a, b) = (c, d)$, aplicando ambas al conjunto $kb'd'\mathrm{D}$ debemos obtener los mismos resultados:

$$(a, b)bd' = (c, d)b'd \Leftrightarrow ad' = cb' \Leftrightarrow ad = cb.$$

Si se cumple la última de las igualdades anteriores, procediendo a la inversa se cumple la primera; por ello estamos autorizados a poner $\Leftrightarrow$.

2.º $(a, b) = (na, nb)$ para todo $n \in \mathrm{Z}$.
3.º $(ab) = (\mathrm{D}a', \mathrm{D}b') = (a'b')$ por lo anterior. $\mathrm{D} =$ m. c. d. (a, b).

A la fracción (a', b') se le llama irreducible por ser la fracción de términos más sencillos entre todas sus iguales.

4.º Si $(x, y) = (a, b)$, tiene que ser $x = n \cdot a'$, $y = n \cdot b'$.

Baste aplicar el teorema de Euclides a la igualdad

$$xb = ya \Leftrightarrow xb' = ya'.$$

5.º Como consecuencia de lo anterior, los puntos que representan a todas las fracciones iguales a una dada están en una misma recta que pasa por el origen, y recíprocamente, los puntos de coordenadas enteras de cada recta que pasan por el origen representan a fracciones iguales entre sí.

NÚMEROS RACIONALES. — El criterio R dado para la igualdad de fracciones permite clasificar las fracciones en clases. Cada clase estará formada por todas las fracciones iguales entre sí.

Ejemplos de clases:

$$\{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8), (-1, -2), \ldots\ldots\}$$
$$\{(3, 2), (6, 4), (9, 6), (12, 8), (-9, -6), \ldots\ldots\}$$
$$\{(5, 3), (10, 6), (15, 9), (20, 12), (-15, -9), \ldots\ldots\}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Cada clase es un número racional. El conjunto de números racionales (o conjunto de clases) *se llama conjunto cociente* con relación al criterio de igualdad R, y se representa así: $\left| \mathrm{Z} \times \mathrm{Z} - \left\{ \begin{matrix} a \\ 0 \end{matrix} \right\} \right| /\mathbf{R}.$

En donde $\left\{ \frac{a}{o} \right\}$ representa el conjunto de fracciones de denominador o.

Cada número racional se puede representar por una cualquiera de las fracciones de la clase que lo definen escritas así: $\frac{a}{b}$.

$$\frac{a}{b} \text{ representa la clase } \{(a,\ b)\ (c,\ d)\ \ldots\ldots\}$$

Ejercicio.—¿Cuál es el subconjunto de Z sobre el que actúa como operador el número racional $\frac{15}{12}$?

ADICION DE NUMEROS RACIONALES

Suma de fracciones.—Según vimos antes, la fracción (a, b) es una correspondencia que transforma el conjunto (b) en el conjunto (a).

Análogamente, (c, d) transforma los múltiplos (d) en los (c).

Si m. c. m. $(b, d) = \mathrm{M}$, los múltiplos comunes a b y d son de la forma $k\mathrm{M}$, $k \in \mathrm{Z}$.

Llamaremos suma de $(a, b) + (c, d)$ a la correspondencia que actúa sobre los múltiplos comunes a b y d, así:

$$[(a,\ b) + (c,\ d)]k\mathrm{M} = (a,\ b)k\mathrm{M} + (c,\ d)k\mathrm{M}. \qquad [1]$$

Propiedad uniforme.—Si $(a, b) = (a', b')$, $(c, d) = (c', d')$, como

$$(a,\ b)k\mathrm{M} = (a',\ b')k\mathrm{M} \quad \text{y} \quad (c,\ d)k\mathrm{M} = (c',\ d')k\mathrm{M};$$

se verifica que

$$(a,\ b) + (c,\ d) = (a',\ b') + (c',\ d'),$$

pues

$$[(a,\ b) + (c,\ d)]k\mathrm{M} = (a,\ b)k\mathrm{M} + (c,\ d)k\mathrm{M} = (a',\ b')k\mathrm{M} + (c',\ d')k\mathrm{M} = [(a',\ b') + (c',\ d')]k\mathrm{M}.$$

La suma de dos fracciones es una fracción.—Si llamamos

$$(a,\ b)\mathrm{M} = m', \qquad (c,\ d)\mathrm{M} = m'', \qquad m' + m'' = m,$$

la igualdad [1] se escribe así:

$$[(a, b) + (c, d)]k\mathrm{M} = (a, b)k\mathrm{M} + (c, d)k\mathrm{M} = km' + km'' = \\ = k(m' + m'') = km;$$

$(a, b) + (c. d)$ es equivalente a la fracción (m, M), pues

$$(m, \mathrm{M})\mathrm{KM} = \mathrm{K}m = \mathrm{K}(m' + m'') = km' + km'' = (a, b)\mathrm{KM} + \\ + (c, d)k\mathrm{M} = [(a, b) + (c, d)]\mathrm{KM}.$$

SUMA DE NÚMEROS RACIONALES.—Dados los números racionales

$$\frac{a}{b} \quad \text{y} \quad \frac{c}{d}.$$

se llama suma de los dos

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)$$

al número racional definido por la fracción $(a, b) + (c, d)$, en la que

$$(a, b) \in \frac{a}{b} \quad \text{y} \quad (c, d) \in \frac{c}{d}.$$

Como las sumas de fracciones equivalentes son fracciones equivalentes según el punto anterior, resulta que el número racional suma de dos no depende de las fracciones elegidas.

Dados dos números racionales hay un solo número racional suma de ellos (propiedad uniforme de la suma).

Propiedad conmutativa.—El orden de los sumandos no altera el valor de la suma:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)\mathrm{KM} = \frac{a}{b}\mathrm{KM} + \frac{c}{d}\mathrm{KM} = \\ = \frac{c}{d}\mathrm{KM} + \frac{a}{b}\mathrm{KM} = \left(\frac{c}{d} + \frac{a}{b}\right)\mathrm{KM};$$

luego

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}.$$

SUMA DE MÁS DE DOS SUMANDOS.—Se realiza sumando los dos primeros, el resultado con el tercero, el resultado con el cuarto, y así sucesivamente:

$$\left[\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{g}{f}\right]+\frac{h}{k}.$$

Propiedad asociativa.—Si n es un múltiplo común a b, d y g:

$$\left[\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{f}{g}\right]n=\left[\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right]n+\frac{f}{g}n=$$

$$=\frac{a}{b}n+\frac{c}{d}n+\frac{f}{g}n=\frac{a}{b}n+\left[\frac{e}{d}n+\frac{f}{g}n\right]=$$

$$=\frac{a}{b}n+\left(\frac{c}{d}+\frac{f}{g}\right)n=\left[\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{f}{g}\right)\right]n,$$

luego

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{f}{g}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{f}{g}\right)$$

Esta propiedad y la conmutativa nos permiten hacer el producto de varios factores en cualquier orden, pues:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{f}{g}=\frac{f}{g}+\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)=\left(\frac{f}{g}+\frac{a}{b}\right)+$$

$$+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\left(\frac{f}{g}+\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{c}{d}+\frac{f}{g}\right)+\frac{a}{b};$$

por ello se pueden suprimir los paréntesis y poner sólo:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{f}{g}.$$

ELEMENTO NEUTRO EN LA SUMA.—El número racional representado por la clase

$$\{(0,\ a),\ \ (0,\ b),\ \ (0,\ c),\ \ldots\ldots\}$$

para

$$a\neq 0,\quad b\neq 0,\quad c\neq 0,\quad \ldots\ldots$$

se le llamará cero (0), y se verifica que:

$$\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}, \qquad [2]$$

pues

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{0}{b}\right) n = \frac{a}{b} n + \frac{0}{b} n = \frac{a}{b} n + 0 = \frac{a}{b} n.$$

Si un número racional es tal que:

$$\frac{a}{b} + \frac{x}{y} = \frac{a}{b},$$

entonces

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{x}{y}\right) n = \frac{a}{b} n + \frac{x}{y} n = \frac{a}{b} n,$$

luego

$$\frac{x}{y} n = 0$$

para todo $n \neq 0$ múltiplo de b e y,

$$n = n'y, \qquad \frac{x}{y} n'y = xn' = 0;$$

luego

$$x = 0 \quad \text{y} \quad \frac{x}{y} = \frac{0}{y}.$$

Con esto queda demostrado que el cero es el único número racional que cumple con la propiedad [2].

Número opuesto.—Dado el número racional

$$\frac{a}{b} \; \{(a, b)\ (c, d) \ldots\ldots\}$$

al número

$$\{(-a, b)\ (-c, d) \ldots\ldots\}$$

le llamaremos opuesto al $\frac{a}{b}$ y se representará por $-\frac{a}{b}$. Se verifica que:

$$\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = 0.$$

Si un número $\frac{c}{d}$ cumple con la condición

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 0, \qquad [3]$$

resulta que $\frac{c}{d}$ es el opuesto de $\frac{a}{b}$. En efecto, sumando a los dos miembros de la igualdad anterior $-\frac{a}{b}$, resulta:

$$\left(-\frac{a}{b} + \frac{a}{b}\right) + \frac{c}{d} = -\frac{a}{b} + 0 = -\frac{a}{b};$$

luego

$$\frac{c}{d} = -\frac{a}{b},$$

con lo que resulta que $-\frac{a}{b}$ es el único número racional que cumple con la igualdad [3].

El opuesto de $-\frac{a}{b}$ es $\frac{a}{b}$. En efecto:

$$-\frac{a}{b} + \frac{a}{b} = 0,$$

y como el opuesto es único, tiene que ser:

$$-\left(-\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b}.$$

SUSTRACCION DE NUMEROS RACIONALES

Dados dos números racionales cualesquiera, $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, siempre podemos encontrar otro número racional $\frac{x}{y}$, tal que:

$$\frac{a}{b} + \frac{x}{y} = \frac{c}{d}. \qquad [4]$$

En efecto, si sumamos a los dos miembros de esta igualdad el opuesto de $\frac{a}{b}$, obtenemos:

$$\left(-\frac{a}{b}\right) + \frac{a}{b} + \frac{x}{y} = \left(-\frac{a}{b}\right) + \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{c}{d} + \left(-\frac{a}{b}\right)$$

El número $\frac{x}{y}$ es único, pues si otro $\frac{z}{t}$ es tal que:

$$\frac{a}{b} + \frac{z}{t} = \frac{c}{d};$$

sumando a ambos miembros $-\frac{a}{b}$ se obtiene:

$$\frac{z}{t} = \frac{c}{d} + \left(-\frac{a}{b}\right)$$

con lo cual

$$\frac{z}{t} = \frac{x}{y};$$

al número $\frac{x}{y}$ se le llama diferencia entre $\frac{c}{d}$ y $\frac{a}{b}$ y se suele representar así:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} - \frac{c}{d}.$$

De manera análoga, si en la igualdad [4] sumamos a ambos miembros $-\frac{x}{y}$, se obtiene:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} - \frac{x}{y}.$$

Como fácilmente se comprueba, las igualdades

$$\frac{a}{b} + \frac{x}{y} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow \frac{c}{d} - \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

son igualdades equivalentes, pues dada una cualquiera de ellas se pueden obtener las otras dos.

Como se puede observar por lo dicho anteriormente, la diferencia de dos números racionales ha quedado reducida a una suma gracias a la existencia del opuesto.

PROPIEDADES DE LA DIFERENCIA.—Conviene ejercitar al alumno en la demostración de las siguientes igualdades, haciéndole expresar la propiedad que le permite poner cada signo de igualdad en el desarrollo de las mismas:

1.° $\left(\frac{a}{b} + \frac{p}{q}\right) - \left(\frac{c}{d} + \frac{p}{q}\right) = \frac{a}{b} - \frac{c}{d}.$

2.° $\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right) + \frac{c}{d} = \frac{a}{b}.$

3.° $\left(\frac{a}{b} - \frac{p}{q}\right) - \left(\frac{c}{d} - \frac{p}{q}\right) = \frac{a}{b} - \frac{c}{d}.$

4.° $\dfrac{a}{b} + \left(\dfrac{c}{d} - \dfrac{f}{g}\right) = \left(\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}\right) - \dfrac{f}{g}.$

5.° $\dfrac{a}{b} - \left(\dfrac{c}{d} + \dfrac{f}{g}\right) = \left(\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d}\right) - \dfrac{f}{g}.$

6.° $\dfrac{a}{b} - \left(\dfrac{c}{d} - \dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} + \dfrac{f}{g}.$

MULTIPLICACION DE NUMEROS RACIONALES

Producto de transformaciones.—Consideremos un conjunto C entre cuyos elementos hay definidas dos transformaciones, T_1 y T_2. Sea $a \in C$ un elemento cualquiera; al elemento a le corresponde el elemento $T_1(a) \in C$; al elemento $T_1(a)$, por la transformación T_2, le corresponde como homólogo el elemento $T_2[T_1(a)]$. La transformación T, que hace corresponder a cada a el elemento $T_2[T_1(a)]$, se le llama producto de T_1 por T_2, y se representa así:

$$T = T_2 \cdot T_1.$$

El homólogo de a por T es el

$$(T_2T_1)(a) = T_2[T_1(a)].$$

Producto de números racionales.—Dados los números racionales $\dfrac{a}{b}$ y $\dfrac{c}{d}$ (que son dos transformaciones), se llamará producto de ambos a la transformación tal que para todo x múltiplo de b y d (por ejemplo, $k \cdot db$) se verifique que:

$$\left(\frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}\right)(k \cdot d \cdot b) = \left(\frac{c}{d}\right)\left[\left(\frac{a}{b}\right) \cdot (k \cdot d \cdot b)\right] =$$

$$= \frac{c}{d}(a \cdot k \cdot d) = c \cdot a \cdot k.$$

El producto $\dfrac{c}{d} \cdot \dfrac{a}{b}$ es un número racional definido por la fracción (ca, db) y todas sus equivalentes.

En efecto:

$$(ca,\ db)kdb = ca \cdot kdb : db = cak,$$

con lo cual queda probado que la transformación $\dfrac{c}{d}\ \dfrac{a}{b}$ y la fracción $(ca,\ bd)$ producen el mismo efecto sobre los múltiplos comunes a, b y d, con lo cual será:

$$\frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} = \frac{c \cdot a}{d \cdot b}.$$

Propiedad uniforme.—El producto es único. Se deduce fácilmente del párrafo anterior.

Propiedad commutativa.—Se verifica que:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b},$$

pues

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{d \cdot b} = \frac{c \cdot a}{b \cdot d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}.$$

Propiedad asociativa.—Análogamente a la suma se verifica que:

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \frac{f}{g} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{f}{g}\right)$$

en efecto,

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{f}{g} = \frac{(a \cdot c)}{(b \cdot d)} \cdot \frac{f}{g} = \frac{(a \cdot c) \cdot f}{(b \cdot d) \cdot g} = \frac{a \cdot (c \cdot f)}{b \cdot (d \cdot g)} =$$

$$= \frac{a}{b} \cdot \frac{(c \cdot f)}{(d \cdot g)} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{f}{g}\right)$$

ELEMENTO NEUTRO EN EL PRODUCTO.—Es el número racional definido por la clase:

$$\{(a,\ a),\ (b,\ b),\ (c,\ c),\ \ldots\ldots\},$$

le llamaremos 1 (uno).

Se verifica que

$$\frac{a}{b}\cdot 1=\frac{a}{b},$$

pues

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{c}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c}=\frac{a}{b}.$$

El número 1 es el único que verifica la propiedad anterior, pues si

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{x}{y}=\frac{a}{b},$$

será:

$$\frac{ax}{by}=\frac{a}{b}\Rightarrow (ax,\ by)=(a,\ b),$$

y aplicando a ambas by será:

$$(ax,\ by)by=(a,\ b)by\Rightarrow ax=(a\cdot by):b=ay\Rightarrow x=y,$$

con lo que

$$\frac{x}{y}=\frac{x}{x}=1.$$

Propiedad distributiva.—Consideremos los números racionales

$$\frac{a}{b},\ \frac{c}{d},\ \frac{f}{g}$$

y sea x un múltiplo de los denominadores b, d y g:

$$\left[\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\frac{f}{g}\right]x=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)(fx:g)=$$

$$=\frac{a}{b}(fx:g)+\frac{c}{d}(fx:g)=\frac{a}{b}\left(\frac{f}{g}x\right)+\frac{c}{d}\left(\frac{f}{g}x\right)=$$

$$=\frac{a}{b}\,\frac{f}{g}x+\frac{c}{d}\,\frac{f}{g}x=\left(\frac{a}{b}\,\frac{f}{g}+\frac{c}{d}\,\frac{f}{g}\right)x,$$

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\frac{f}{g}=\frac{a}{b}\,\frac{f}{g}+\frac{c}{d}\,\frac{f}{g}.$$

La propiedad expresada por la igualdad anterior es una propiedad de las operaciones de adición y multiplicación conjuntamente.

DIVISION DE NUMEROS RACIONALES

INVERSO.—Dado el número

$$\frac{a}{b}\ \{(a,\ b),\ (c,\ d),\ (f,\ g),\ \ldots\ldots\}$$

distinto de cero, se llama inverso del $\frac{a}{b}$ al número racional definido por la clase

$$\{(b,\ a),\ (d,\ c),\ (g,\ f),\ \ldots\ldots\}$$

y se representa por $\frac{b}{a}$.

En general se verifica:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{a\cdot b}{b\cdot a}=1, \qquad [5]$$

siendo 1 el número racional definido por la clase

$$\{(a,\ a),\ (b,\ b),\ (c,\ c),\ \ldots\ldots\}$$

Si un número $\frac{x}{y}$ cumple con la igualdad

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{x}{y}=1,$$

será:

$$\frac{ax}{by}=1\Rightarrow ax=by\Rightarrow(a,\ b)=(y,\ x)\Rightarrow(b,\ a)=(x,\ y)\Rightarrow(x,\ y)\in\frac{b}{a}.$$

El número racional $\frac{x}{y}$ *que cumple la ecuación*

$$\frac{a}{b} \frac{x}{y} = 1$$

es único e igual al opuesto de $\frac{a}{b}$.

COCIENTE DE DOS NÚMEROS RACIONALES.—Dados dos números,

$$\frac{a}{b} \quad \text{y} \quad \frac{c}{d},$$

siendo $\frac{a}{b} \neq 0$, vamos a hallar otro, $\frac{x}{y}$, tal que

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} = \frac{c}{d}. \qquad [6]$$

Multiplicando los dos miembros de la igualdad anterior por el inverso $\frac{b}{a}$ de $\frac{a}{b}$ resulta:

$$\left(\frac{b}{a} \frac{a}{b}\right) \frac{x}{y} = \frac{b}{a} \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{c}{d} \frac{b}{a} \qquad [7]$$

Al número $\frac{x}{y}$ se le llama cociente de $\frac{c}{d}$ entre $\frac{a}{b}$ y se representa por $\frac{c}{d} : \frac{a}{b}$.

El cociente de dos números racionales dados siempre existe y es único.—Si hubiese otro número racional, $\frac{z}{v}$, tal que verificase [7],

$$\frac{a}{b} \frac{z}{v} = \frac{c}{d},$$

multiplicando por $\frac{b}{a}$,

$$\left(\frac{b}{a}\,\frac{a}{b}\right)\frac{z}{v}=\frac{c}{d}\,\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{z}{v}=\frac{c}{d}\,\frac{b}{a}=\frac{x}{y}.$$

Como en la igualdad [6], $\frac{a}{b}$ y $\frac{x}{y}$ se pueden permutar; multiplicando por $\frac{y}{x}$ obtenemos:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\,\frac{y}{x}\Leftrightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}:\frac{x}{y}. \qquad [8]$$

suponiendo que $\frac{x}{y}\neq 0$.

De las igualdades [7] y [8] se obtiene análogamente la [6]; luego las igualdades:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{x}{y}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{x}{y}=\frac{c}{d}:\frac{a}{b}\Leftrightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}:\frac{x}{y}$$

son equivalentes. En lugar del signo : se puede usar la raya de quebrado.

Ejercicios.—Para ejercitar al alumno en la equivalencia de las igualdades anteriores se deben proponer ejercicios análogos a los siguientes:

1.° Dada $\frac{3}{2}\cdot\frac{a}{b}=\frac{5}{4}$, calcular $\frac{a}{b}$.

2.° Dada $\frac{4}{5}:\frac{m}{n}=\frac{6}{7}$, calcular $\frac{m}{n}$.

3.° Demostrar que $\left(\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{p}{q}\right) : \left(\dfrac{c}{d} \cdot \dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d}$.

4.° Demostrar que $\dfrac{a}{b} : \left(\dfrac{c}{d} \cdot \dfrac{f}{g}\right) = \left(\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d}\right) : \dfrac{f}{g}$.

5.° $\dfrac{a}{b} : \left(\dfrac{c}{d} : \dfrac{f}{g}\right) = \left(\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d}\right) \cdot \dfrac{f}{g}$ y análogos.

RESUMEN

Al conjunto de los números racionales lo denominaremos con la letra Q.

Para dos números racionales hemos definido la suma y el producto con las siguientes propiedades:

Suma	*Producto*
Uniforme (suma y producto únicos):	
1) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{m}{n}$	1′) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{p}{q}$.
Conmutativa:	
2) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{c}{d} + \dfrac{a}{b}$	2′) $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{c}{d} \cdot \dfrac{a}{b}$.
Asociativa:	
3) $\left(\dfrac{b}{a} + \dfrac{d}{c}\right) + \dfrac{f}{g} = \dfrac{a}{b} +$	
$= \left(\dfrac{c}{d} + \dfrac{f}{g}\right)$	3′) $\left(\dfrac{c}{d} \cdot \dfrac{f}{g}\right) \cdot \dfrac{f}{g} = \dfrac{a}{b}$.

Elemento neutro:

4) $\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$ .... 4′) $\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$.

Elemento opuesto:

5) $\frac{a}{b} + -\frac{a}{b} = 0$ .... 5′) $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$,

para $\frac{a}{b} \neq 0$.

Distributiva:

6) $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)\frac{f}{g} = \frac{a}{b} \cdot \frac{f}{g} + \frac{c}{d} \cdot \frac{f}{g}$.

Como consecuencia de 5) y 5′) resulta que siempre tienen solución las ecuaciones:

$$\frac{a}{b} + \frac{x}{y} = \frac{c}{d} \quad \text{y} \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{z}{h} = \frac{c}{d} \quad \text{con} \quad \left(\frac{a}{b} \neq 0\right)$$

y, por tanto, siempre son posibles los dos grupos de igualdades equivalentes:

$$\frac{a}{b} + \frac{x}{y} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} - \frac{x}{y}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{z}{h} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} : \frac{z}{h} \Leftrightarrow \frac{z}{h} = \frac{c}{d} : \frac{a}{b}.$$

Las dos últimas con:

$$\frac{z}{h} \neq 0 \quad \text{y} \quad \frac{a}{b} \neq 0.$$

Por las propiedades 5) y 5′) la diferencia y el cociente de dos números racionales quedan reducidos a suma y producto, respectivamente.

En el conjunto Q las operaciones de adición y multiplicación tienen, según se ha visto, propiedades análogas, con dos excepciones solamente: 1.ª La propiedad distributiva de la adición respecto a la multiplicación no tiene una propiedad distributiva análoga de la multiplicación respecto de la adición.

2.ª Todo número racional tiene siempre un opuesto sin excepción, por lo cual siempre es posible la diferencia de dos números racionales. Sin embargo, el número cero no tiene inverso, pues hemos prescindido, según se dijo en el primer párrafo, de las fracciones del tipo $(a, 0)$, $a \neq 0$. Como consecuencia, en el conjunto Q no es posible la división por cero.

El conjunto Q con las operaciones descritas diremos que tiene estructura de cuerpo y le llamaremos *cuerpo de los números racionales*.

Todo el estudio realizado con el conjunto Q se puede hacer gráficamente empleando la representación cartesiana y las operaciones con segmentos.