METODOLOGIA

Cálculo de una pequeña tabla de logaritmos por alumnos de Bachillerato con sólo conocimientos elementales (1)

Por F. J. AGUIRRE, S. I.
(Licenciado en Matemáticas)

En mi docencia, al explicar logaritmos, siempre surgió la pregunta de quién y cómo se han calculado las tablas.

Mi respuesta era nombrarles la Universidad, el cálculo infinitesimal, las serie de Taylor, MacLaurin, etc.

Hoy me permito sugerir este método, por el cual en unas pocas horas pueden calcular una pequeña tabla de logaritmos de hasta cuatro cifras decimales exactas.

El método está basado en la interpolación lineal o regla de tres (primeras diferencias) y aplicar las leyes que rigen los logaritmos decimales. (No nos hará falta ni mencionar los logaritmos de Neper.) Veamos cómo. Siempre "log x" significa logaritmos decimales.

Partimos de la feliz coincidencia de que $\boxed{2^{10} = 1024}$

Entonces

$$10 \cdot \log 2 = \log 1024.$$

Como 1024 tiene cuatro cifras, su característica será 3. O bien:

$$1000 < 1024 < 10000,$$

y sus logaritmos también:

$$\log 1000 < \log 1024 < \log 10000;$$

es decir,

$$3 < \log 1024 < 4;$$

dividiendo por 10 resulta:

$$0{,}3 < \log 2 < 0{,}4.$$

Hallamos que logaritmo 2 tiene exactamente 3 por primera decimal. Sólo con este resultado podemos escribir una pequeña tabla ini-

(1) Resumen de un seminario presentado en la Universidad de Madrid por el autor y adecuado a la pedagogía de bachiller.—F. AGUIRRE, S. I.

cial. Podemos escribir con un decimal exacto los logaritmos de 1, 2, 4, 5, 8, 10 (y 16, 32, 64, 128, etc., nos limitamos):

$$10^0 = 1; \quad \log 2 > 0{,}3; \quad 4 = 2^2; \quad 8 = 2^3; \quad 5 = 10/2; \quad 10^1 = 10.$$

Entonces resulta:

$\log 1 = 0{,}00$	exactamente	
$\log 2 > 0{,}3$	una cifra exacta	$[\log 1024]/10$
$\log 4 > 0{,}6$	ídem (se ve $4 < 5$)	$2 \log 2$
$\log 5 < 0{,}7$	una cifra exacta	$\log 10 - \log 2$
$\log 8 > 0{,}9$	una cifra exacta	$3 \log 2$
$\log 10 = 1{,}00$	exactamente	

Podemos asegurar además que $\log 2 < 0{,}3334$, pues si fuera mayor resultaría $\log 8 > 1{,}0002$, que es absurdo, puesto que sería mayor que el $\log 10 = 1{,}0000$.

De esto se ve que log 5 deberá comenzar por 0,6 (9). y log 4 debe ser menor, o sea, log 4 deberá comenzar por 0,6 (0).

Continuemos el método (2), que es más rápido de lo que pudiera esperarse. Nos basamos en la interpolación. Aquí usaremos sólo la lineal o "regla de tres". Su fórmula es:

$$\log (A \pm a) = \log A \pm \Delta_A \cdot a.$$

Esta fórmula nos obligaría a hallar todas las diferencias tabulares para cada número Δ_A Sin embargo, en las proximidades del 1 esta fórmula se nos convierte en

$$\left.\begin{array}{l} \log (1 + a) = \log 1 + \Delta a = + \Delta \cdot a \\ \log (1 - a) = \log 1 - \Delta a = - \Delta \cdot a \end{array}\right\}$$

Vamos a calcular la diferencia Δ a partir de la tabla hallada. En efecto: restando los

$$\log 8 - \log 10 = \log (8/10) = \log (1 - 2/10),$$

como conocemos que

$$\begin{array}{r} \log 8 > 0{,}9 \\ \log 10 = 1{,}0 \\ \hline \log (8/10) > -0{,}1; \end{array} \qquad \begin{array}{l} (\log 8 > 0{,}9) \\ (\log 10 = 1{,}0) \end{array}$$

(2) Nuestro método completo consiste en hallar las diferencias primeras, segundas, etc., en las proximidades del 1 por aproximaciones sucesivas e interpolar después. Por la regla de tres deducimos: Si el número crece de A a A + 1, su logaritmo sube de log A a log (A + 1, o sea Δ_A llamando Δ_A a la *diferencia*

$$\log (A + 1) - \log A = \Delta_A.$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Si el número (A) sube 1, el logaritmo crece } \Delta_A \\ \text{Si el número (A) sube } a\text{, el logaritmo crecerá } x \end{array}\right\} \qquad \boxed{x = \Delta_A \cdot a}$$

cial. Podemos escribir con un decimal exacto los logaritmos de 1, 2, 4, 5, 8, 10 (y 16, 32, 64, 128, etc., nos limitamos):

$$10^0 = 1; \quad \log 2 > 0{,}3; \quad 4 = 2^2; \quad 8 = 2^3; \quad 5 = 10/2; \quad 10^1 = 10.$$

Entonces resulta:

$\log\ 1 = 0{,}00$	exactamente	
$\log\ 2 > 0{,}3$	una cifra exacta	[log 1024]/10
$\log\ 4 > 0{,}6$	ídem (se ve $4 < 5$)	2 log 2
$\log\ 5 < 0{,}7$	una cifra exacta	log 10 — log 2
$\log\ 8 > 0{,}9$	una cifra exacta	3 log 2
$\log\ 10 = 1{,}00$	exactamente	

Podemos asegurar además que $\log 2 < 0{,}3334$, pues si fuera mayor resultaría $\log 8 > 1{,}0002$, que es absurdo, puesto que sería mayor que el $\log 10 = 1{,}0000$.

De esto se ve que log 5 deberá comenzar por 0,6 (9). y log 4 debe ser menor, o sea, log 4 deberá comenzar por 0,6 (0).

Continuemos el método (2), que es más rápido de lo que pudiera esperarse. Nos basamos en la interpolación. Aquí usaremos sólo la lineal o "regla de tres". Su fórmula es:

$$\log (A \pm a) = \log A \pm \Delta_A \cdot a.$$

Esta fórmula nos obligaría a hallar todas las diferencias tabulares para cada número Δ_A Sin embargo, en las proximidades del 1 esta fórmula se nos convierte en

$$\left.\begin{array}{l} \log (1 + a) = \log 1 + \Delta a = + \Delta \cdot a \\ \log (1 - a) = \log 1 - \Delta a = - \Delta \cdot a \end{array}\right\}$$

Vamos a calcular la diferencia Δ a partir de la tabla hallada. En efecto: restando los

$$\log 8 - \log 10 = \log (8/10) = \log (1 - 2/10),$$

como conocemos que

$$\begin{array}{lr} \log\ 8 > 0{,}9 & (\log\ 8 > 0{,}9) \\ \log\ 10 = 1{,}0 & (\log\ 10 = 1{,}0) \\ \hline \log\ (8/10) > -0{,}1; & \end{array}$$

(2) Nuestro método completo consiste en hallar las diferencias primeras, segundas, etc., en las proximidades del 1 por aproximaciones sucesivas e interpolar después. Por la regla de tres deducimos: Si el número crece de A a A + 1, su logaritmo sube de log A a log (A + 1, o sea Δ_A llamando Δ_A a la *diferencia*

$$\log (A + 1) - \log A = \Delta_A.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si el número (A) sube 1, el logaritmo crece } \Delta_A \\ \text{Si el número (A) sube } a\text{, el logaritmo crecerá } x \end{array}\right\} \quad \boxed{x = \Delta_A \cdot a}$$

es decir, resulta mayor porque ambos son negativos. O sea, en valor absoluto "*menor que*":

$$\log (8/10) = \log (1 - 2/10) = -\Delta \cdot 2/10 > -0{,}1.$$

Al multiplicar por -1 se cambia el sentido de la desigualdad y resulta entonces:

$$\Delta \cdot 2/10 < 0{,}1.$$

O sea

$$\boxed{\Delta < 0{,}5}$$

Con este resultado vamos a reconstruir la tabla. Volvamos a hallar:

$$\log 2 = \frac{1}{10} \cdot \log 1024,$$

$$\log 1024 = \log 1000 \cdot (1 + 24/1000) = \log 1000 + \log (1 + 24/1000)$$

$$\log (1 + 24/1000) = \Delta \cdot 24/1000 < 0{,}012.$$

De donde $\log 1024 < 3{,}012$, y por tanto

$$\boxed{\log 2 < 0{,}3012}$$

Pero antes teníamos que $\log 2 > \underline{0{,}3000}$, luego dos cifras exactas (es asombrosa la exactitud); 1024 está muy próximo a 1000. El error de log de 2 es menor que 0,0012, casi 1/1000 (3). (Este método puede parecer que envuelve un círculo vicioso, pero no es así, pues nótese que al hallar el log de 8 el error inicial viene multiplicado por 3 y, sin embargo, al pasar de 1024 a 2 dividimos por 10, con lo cual se va ganando exactitud.)

Ahora tenemos:

$\log 1 = 0{,}0000$	exacto
$\log 2 < 0{,}3012$	dos cifras exactas (casi tres)
$\log 4 < 0{,}6024$	ídem
$\log 5 > 0{,}6988$	dos decimales exactos
$\log 8 < 0{,}9036$	dos decimales exactos
$\log 10 = 1{,}0000$	exacto

(3) Hemos de notar que las diferencias tabulares son menores al crecer el número (lo cual nos dice que las diferencias segundas son negativas. El error cometido será menor que si fueran positivas y acotado. Sin embargo, nótese que hasta ahora sólo decimos que el error es menor que 0,0012.

Deducimos que

$$\boxed{\Delta < 0{,}482}$$

Ya desde la primera tabla se comprueba que las diferencias tabulares van siendo menores al crecer el número. Véase que la diferencia de los logaritmos de 2 y 1 son mayores que entre 5 y 4. Esto nos induce a procurar interpolar por los números más altos que podamos. Pero esta no es la razón por la que se ha tomado para el cálculo de la diferencia tàbular log 8 — log 10.

Véase lo que sucede tomando al revés, log 10 — log 8:

$$\log 10 - \log 8 = \log 10/8 = \log (1 + 2/8) = + \Delta \cdot 2/8 > + 0{,}1;$$

nos resultaría $\Delta > 0{,}4$; pero es que hemos obtenido la diferencia tabular para más arriba del 1, que es menor que en el 1 mismo, por lo cual deberíamos escribir: $\overline{\Delta >< 0{,}4}$; luego nada sabríamos.

Ahora podemos ver que la tabla coincide, para las dos primeras cifras con la anterior, las diferencias tabulares tendrán sus dos primeras cifras muy aproximadas, y de la media de ambas hallamos un valor más aproximado; en efecto:

$$\frac{0{,}50 + 0{,}40}{2} = \boxed{0{,}45 \simeq \Delta} \ (4) \qquad \text{y} \qquad \boxed{\Delta < 0{,}482}$$

Pasemos a calcular los log 7 y log 9 (y log 3) por interpolación. Vemos que:

$$9^2 = 81 = 80 \cdot (1 + 1/80)$$

$$\log 81 = 2 \log 9 = 4 \log 3 = \log 80 + \log (1 + 1/80)$$
$$\log 80 = \log 8 + \log 10 = 0{,}9036 + 1{,}0000$$
$$\log (1 + 1/80) \simeq \Delta\, 1/80 \simeq 0{,}0060$$

log 8	= 0,9036
log 10	= 1,0000
log (1 + 1/80)	= 0,0060
log 81	= 1,9096

$$\text{resulta} \left\{ \begin{array}{l} \log 81 = 1{,}9096 \\ \boxed{\log 9 \simeq 0{,}9548} \;;\; \boxed{\log 3 \simeq 0{,}4774} \end{array} \right.$$

(4) La diferencia tabular exacta es 0,43429..., que se ve inmediatamente que es el $\boxed{\log e = 0{,}43429 \ldots} \simeq 0{,}4343$.

Tomamos $\Delta \simeq 0{,}482$ sabiendo que $\Delta < 0{,}482$ porque así hallamos un límite superior del logaritmo. Pero se puede comprobar que tomando $\Delta \simeq 0{,}45$ se llega más rápidamente al resultado final.

Para log 7 nos basta ver que

$$7^2 = 49 = 50 - 1 = 50 \cdot (1 - 1/50)$$

$$2 \cdot \log 7 = \log 49 = \log 50 + \log (1 - 1/50)$$

$$\log 10 = 1{,}0000$$

$$\log 5 + = 0{,}6988; \quad \log (1 - 1/50) = -\Delta \cdot 1/50 = -0{,}0096$$

$\boxed{\log (1 - 1/50) = 0{,}0096\ (-)}$ es negativo; hay que restar o

$\operatorname{colog} (1 - 1/50) = 1{,}9904\ (+)$ sumar su cologaritmo.

$$\log 49 = 1{,}6892 = 2 \cdot \log 7$$

$$\boxed{\log 7 = 0{,}8446}$$

Nuestra tabla queda ahora:

log 1	= 0,0000
log 2	= 0,3012
log 3	= 0,4774
log 4	= 0,6024
log 5	= 0,6988
log 6	= 0,7786
log 7	= 0,8446
log 8	= 0,9036
log 9	= 0,9548
log 10	= 1,0000

Obtenemos el log 6 = log 2 + log 3; la diferencia $\Delta = 0{,}452$

para log de 9/10 → $\boxed{\Delta^- = 0{,}452}$
o sea, por debajo del 1

para log 10/9 → $\boxed{\Delta^+ = 0{,}4068}$
o sea, por debajo del 1

la media nos da $\boxed{\Delta = 0{,}4298}$

podemos tomar → $\boxed{\Delta \simeq 0{,}4300}$

Algo más exactitud tendríamos si hallamos *log 11:*

$11^2 = 121$; $\quad \log 121 = 2 \cdot \log 11 = \log [120 (1 + 1/120)]$

$$= \log 10 + \log 3 + \log 4$$

$$+ \log 120 = 2{,}0798$$

$$+ \log \left(1 + \frac{1}{120}\right) = 0{,}0040$$

$$\log 121 = 2{,}0838$$

$$\boxed{\log 11 = 1{,}0419}$$

para log 11/10 → $\Delta (+) = 0{,}419$
para log 9/10 → $\Delta (-) = 0{,}452$

media $\boxed{\Delta = 0{,}435}$ (5)

(5) Ahora, con una diferencia tabular de 0,435, podemos obtener más exactitud, y se observa que la exactitud llega hasta la cuarta cifra decimal. Como siempre obtenemos 0,43, sabemos que las dos cifras decimales de Δ son exactas.

Observemos lo que hemos hecho y veremos que obtenemos mayor exactitud. Resultaría casi lo mismo si hallamos *log de 99:*

$$\log 99 = \log 9 + \log 11 = \log 100 \cdot (1 - 1/100)$$
$$\log 99 - \log 100 = 1{,}9967 - 2{,}0000 = - 0{,}0043;$$

de donde resulta que $\Delta = 0{,}43$, como se había anunciado.

Hemos hallado para la diferencia los límites

$$0{,}452 > \Delta > 0{,}419,$$

y por valor medio:

$$\Delta = 0{,}43.$$

Con $\Delta < 0{,}45$ hallamos $\log 2 < 0{,}301080$

dif. $= 5 \cdot 10^{-5}$

Con $\Delta \simeq 0{,}43$ hallamos $\log 2 \simeq 0{,}301032$

dif. $\simeq 3 \cdot 10^{-5}$

Con $\Delta > 0{,}42$ hallamos $\log 2 > 0{,}301008$

Observamos que hemos ya llegado a las cuatro cifras exactas y el error resulta menor que 1/2 unidad de la cuarta cifra (6).

La tabla reconstruída de los 10 primeros números resulta:

$\log 1 = 0{,}000000$	error $= 0$
$\log 2 = 0{,}301032$	$+ e'' = e$: $0{,}5 \times 10^{-4}$
$\log 3 = 0{,}477117$	$+ e'' = 0{,}75e$: $0{,}4 \times 10^{-4}$
$\log 4 = 0{,}602064$	$+ e'' = 2{,}00e$: $1{,}0 \times 10^{-4}$
$\log 5 = 0{,}698968$	$- e'' = - e$: $0{,}5 \times 10^{-4}$
$\log 6 = 0{,}778149$	$+ e'' = 1{,}75e$: $0{,}88 \times 10^{-4}$
$\log 7 = 0{,}845184$	$+ e'' = 0{,}5\,e$: $0{,}3 \times 10^{-4}$
$\log 8 = 0{,}903096$	$+ e'' = 3\,e$: $1{,}5 \times 10^{-4}$
$\log 9 = 0{,}954234$	$+ e'' = 1{,}5\,e$: $0{,}75 \times 10^{-4}$
$\log 10 = 1{,}000000$	error $= 0$

Para llegar al logaritmo de 9, 7 y 3 hemos visto que la diferencia 0,43 tenía las dos cifras exactas; las correcciones necesarias han sido respectivamente:

(6) Aunque el error real cometido en log 2 no llega, como se ve, más que a 2 unidades de sexto orden; nosotros sólo sabemos que el error es menor que 5 unidades de quinto orden en más o en menos, error menor que $\pm 5 \times 10^{-5}$. Los errores que arrastra la tabla por este motivo están expresados al lado.

Para el 9: $+0{,}43/160 = 0{,}002686$; error menor, $0{,}4x$.
Para el 7: $-0{,}43/100 = 0{,}004300$; error menor, $0{,}5x$.
Para el 3: $+0{,}43/320 = 0{,}001343$; error menor, $0{,}2x$.

Cuyos errores son todos del orden de $0{,}5 \times 10^{-4}$.

Vemos que en ningún caso el error llega a valer dos unidades de cuarto orden, o sea, la cifra de 10^{-4} se aproxima.

Puede ser conveniente que el alumno mismo calcule la acumulación de errores, así, por ejemplo, puede comprobar que el error mayor cometido es el del log 8. Pues resulta de $1e'' + 0e'$ (llamando e'' al error proveniente del log 2 y e' al error proveniente de la corrección de la diferencia $\Delta = 0{,}43$). Como

$$3 \cdot \log 2 = \log 8; \qquad e'' = 3e < 1{,}5x.$$

El error del 7 provendrá de las dos partes, tendrá e' y e''; como

$$\log 7 = \frac{\log 100 - \log 2}{2} - \Delta/100;$$

el e' valdrá $= 0{,}5x$; el e'' valdrá $= 0{,}25x$; en total, $0{,}75 \times 10^{-4}$.

No hace falta cansarse en conseguir la tabla completa de cuatro decimales, máxime que, como supongo en la segunda parte, se puede acotar el error más exactamente, entonces se observa que la tabla de cuatro cifras decimales se puede mecánicamente construir por el alumno en unas horas.

Se puede en cualquier momento proseguir a la ampliación de la tabla para los 100 primeros números a partir de los 10 primeros ya obtenidos (o aun dados a priori por el profesor sacados de una tabla cualquiera de logaritmos) (7).

La construcción de la tabla le será muy útil haciéndola de doble entrada y podrá notar que conoce los logaritmos por simple suma de las potencias sucesivas de un número; así, el logaritmo de 75 lo halla en seguida con el de 3 y 5, y no es número pitagórico y, por el contrario, números que no son primos, como el $39 = 3 \cdot 13$, no podrá hallarlo por desconocer el de 13. Podrá observar que calculando el logaritmo de $39 = 40 - 1$ le saldrá más exacto. En resumen, se conocen más de la mitad de los logaritmos y en breve tiempo se pueden ir llenando los huecos por interpolación.

(7) En efecto. Se observa que los números de la tabla pitagórica de multiplicar son inmediatos por simple suma. Aunque el error llegue a tocar la última cifra, siempre será probable y bastante segura la obtenida. De nuevo conviene seguir la pista a los errores cometidos, ejercicio que al alumno no será muy grato, pero sí muy útil, para que se vaya formando un criterio de lo que afirma y niega y hasta dónde llega la fuerza afirmativa de su aseveración.

Supongamos que quiere obtener un logaritmo conocidos sus dos contiguos. ¿Qué error comete si toma solamente su media sin usar ninguna corrección? Sería decir que:

$$2 \log x : \log (x+1) + \log (x-1),$$

o sea que:

$$\log x^2 : \log (x+1) \cdot (x-1) = \log (x^2-1).$$

Se puede escribir

$$\log (x^2-1) = \log x^2 \cdot (1-1/x^2) = \log x^2 + \log (1-1/x^2) =$$
$$= 2 \cdot \log x - \Delta/x^2.$$

Bastará, pues, añadir la corrección $\boxed{+\Delta/2x^2}$

Resulta, pues, la fórmula sencilla de "*semisuma más corrección*".

$$\boxed{\log x = \frac{\log (x+1) + \log (x-1)}{2} + \Delta/x^2}$$

Como sabemos que $\Delta = 0{,}43$, para que la corrección no sea necesaria bastará que

$$\Delta/2x^2 < 10^{-n};$$

para $n = 2, 3, 4$, resulta:

$$x^2 > \frac{\Delta}{2} \cdot 10^n > \overbrace{215000\ldots}^{n};$$

es decir, para 2 cifras; 3 cifras y 4 cifras
$x > 5$; $x > 16$ y $x > 46$; respectivamente,

interpolando por encima del número 46 basta la simple semisuma para hallar el logaritmo intermedio con cuatro cifras exactas (si lo eran las anteriores contiguas).

Aliquemos al cálculo de log 31:

$$\begin{array}{rl} \log 30 = & 1{,}477117 + \\ \log 32 = & 1{,}505160 + \\ \hline & 2{,}982277 \\ \text{media} & 1{,}491138 + \\ \Delta/2.31^2 = & 0{,}000223 + \\ \hline \log 31 = & 1{,}491361 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 0{,}43/961.2 \\ \hline +\ 0{,}000223 \end{array}$$

que coincide muy perfectamente con el verdadero.

Todavía se podía ingeniar para dar una exactitud creciente al observar que las diferencias tabulares van disminuyendo y que en el intervalo

$$9 - 10 \text{ vale } \Delta^{-} = 0{,}458,$$

y en el intervalo

$$10 - 11 \text{ vale } \Delta^{+} = 0{,}414.$$

Resulta para

$$\begin{array}{lll} \log(1 - 1/10) \ldots\ldots\ldots & \Delta^{-} = 0{,}458 & \\ & (-)\ 0{,}022 & \text{diferencia } 2.^{a} \\ \text{medio } \log 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \Delta^{0} = 0{,}436 & \\ & (-)\ 0{,}022 & \text{diferencia } 2.^{a} \\ \log(1 + 1/10) \ldots\ldots\ldots & \Delta^{+} = 0{,}414 & \end{array}$$

Como vamos a interpolar para el log $(1 + 24/1000)$ (8), y éste no está en el medio de $1 - 1/10$ y $1 + 1/10$; la diferencia tabular correspondiente será distinta, habrá que hacer en la diferencia $\Delta = 0{,}436$ una corrección igual a $(-)\ 0{,}022 \times 0{,}024 \times 10 = (-)\ 0{,}00528$;

$$\left.\begin{array}{lll} \text{pues para } + 1/10 & \ldots\ldots\ldots & (-)\ 0{,}022 \\ \text{para } + 24/1000 & \ldots\ldots\ldots & (-)\ M \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Regla de tres} \\ M = 0{,}00528 \ (\text{negativo}) \end{array}$$

Resulta el

$$\Delta = 0{,}436 - 0{,}0053 = 0{,}4307 = \Delta.$$

De donde

$$\log(1{,}024) = 0{,}4307 \times 0{,}024 = 0{,}010337.$$

Entonces

$$\log 1024 = 3{,}010337 \qquad \text{y} \qquad \log 2 = 0{,}3010337,$$

donde la quinta cifra es exacta también.

ESQUEMA Y RESUMEN DE LA PRIMERA PARTE

El camino y método seguido es cíclico. Cuyo ciclo es:

I-1. Hallar el logaritmo aproximado de 1024 $> 3,..$
I-2. Pasar del de 1024 al de 2 y luego al de 8 $> 0{,}9.$
I-3. Hallar la diferencia tabular Δ $< 0{,}5$

(8) Es evidente que se asemeja a la diferencia Δ_2, pero notemos que había que haber tomado $\Delta = 0{,}4343$.

II-1. Hallar el log 1024 por interpolación $< 3{,}012..$
II-2. Pasar del de 1024 al de 2 y luego al de 8 $< 0{,}9032.$
II-3. Hallar la diferencia tabular Δ, etc.

Resultados:

I. $\log 1024 > 3, \longrightarrow \log 2 > 0{,}3. \longrightarrow \log 8 > 0{,}9. \longrightarrow \quad \Delta < 0{,}5$
II. $\log 1024 < 3{,}012 \longrightarrow \log 2 < 0{,}3012 \longrightarrow \log 8 < 0{,}9032 \longrightarrow \Delta \simeq 0{,}43$
III. $\log 1024 = 3{,}01032 \longrightarrow \log 2 = 0{,}301032 \longrightarrow \log 8 \longrightarrow \quad \Delta = 0{,}43$

El segundo elemento es la ampliación de la tabla:

A) Se amplía la tabla para los 10 primeros números mediante suma e interpolación utilizando la fórmula:

$$\log (x + 1) = \log x + \Delta/x.$$

Observando que:

$$81 = 9^2 = 80 + 1 \qquad 121 = 11^2 = 120 + 1$$
$$49 = 7^2 = 50 - 1 \qquad 99 = 9.11 = 100 - 1$$

B) Se amplía la tabla para los 100 primeros números mediante suma e interpolación utilizando la fórmula:

$$\log x = \frac{\log (x + 1) + \log (x - 1)}{2} + \Delta/2 \cdot x^2,$$

en cuya fórmula se conocen o bien 2 log contiguos o bien 2 log seguidos, como verbigracia: log 14, log 15, log 16, y se hallan log 13 y log 17, etc.

C) Se amplía la tabla para los 1000 primeros, etc.

SEGUNDA PARTE

Como el método usado por mí en el seminario es simplemente el de interpolación de Newton y considero que es fácil explicar a los alumnos, ya que ellos conocen la fórmula del binomio (potencias de un binomio, coeficientes), tomemos sólo tres cifras de la tabla hallada y busquemos las diferencias segundas, terceras, etc., por sucesivas restas.

log 5 = 0,690						u_0				
	88						Δu_0			
log 6 = 0,778		21				u_1		$\Delta_2 u_0$		
	67		10				Δu_1		$\Delta_3 u_0$	
log 7 = 0,845		11		6		u_2		$\Delta_2 u_1$		$\Delta_4 u_0$
	58		4		4		Δu_2		$\Delta_3 u_1$	
log 8 = 0,903		7		2		u_3		$\Delta_2 u_2$		$\Delta_4 u_1$
	51		2				Δu_3		$\Delta_3 u_2$	
log 9 = 0,954		5				u_4		$\Delta_2 u_3$		
	46						Δu_4			
log 10 = 1,000						u_5				
	(−) Δ_1	(−) Δ_2	(−) Δ_3	(−) Δ_4	(+) Δ_5	u	Δ	Δ_2	Δ_3	Δ_4

Se comprueba con facilidad la validez de

$\Delta_1 = u_1 - u_0$	Diferencia	primera
$\Delta_2 = u_2 - 2u_1 + u_0$	"	segunda
$\Delta_3 = u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0$	"	tercera
....		
	"	enésima

$$\Delta_n = u_n - n u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} u_{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} u_{n-3} \ldots\ldots$$

Es decir, la fórmula de Newton.

Usando esta fórmula suponiéndola verdadera para valores fraccionarios (un medio de suponerlo es el sustituir la diferencia tabular primera por otra con interpolación lineal, como hemos supuesto al fin de la primera parte).

El problema se nos presenta ahora el de hallar las diferencias de orden superior para el valor 0 en las proximidades del 1. Veamos que ello es fácil.

En efecto (comprobaremos además que basta la diferencia segunda en la mayor parte de los casos):

$$\Delta_2 = u_2 - 2u_1 + u_0 = \log 11 - 2 \log 10 + \log 9,$$

pues parece lógico hacerlo alrededor del 10 (o del 100, que resulta lo mismo, sólo cambia la exactitud, puesto que trabajamos con potencias superiores y, por lo tanto, convendrá lo más alto). Nosotros nos limitaremos ahora a los 11 primeros:

$$\Delta_2 = \log 11.9 - \log 100 = \log 99/100 = \log (1 - 1/100).$$
$$\Delta_2 = - \Delta/100 = 0{,}0043,$$

que es ya muy exacto.

$$\Delta_3 = u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0 = \log 12 - 3 \log 11 + 3 \log 10 - \log 9.$$
$$\Delta_3 = \log 12 \times 1000 - \log 99 \times 121 = \log 12000/11979.$$
$$\Delta_3 = \log (1 - 21/11979) \ldots \log (1 - 21/12000).$$
$$\Delta_3 = \ldots - \Delta \times 21/12000 = - 903/1.200.000 \ldots$$
$$\simeq \boxed{0{,}0007525 = \Delta_3}$$

Como se ve, el cálculo de las diferencias superiores es muy sencillo, conociendo una pequeña tabla anterior...

No cabe duda de que con ello se puede llegar a toda la exactitud que se desee, pues se puede hacer también un proceso cíclico de aproximaciones sucesivas.

Obtenido Δ, hallamos log 99, y de aquí Δ_2.

Obtenemos Δ_2, con éste obtenemos más exacto log 1024, etc.

Obtenemos con más exactitud log 12, log 11, log 10, etc.

Aplicamos a $\log (1 - 21/11979)$ la primera y segunda diferencia y obtenemos Δ_3, etc. Nótese que el mismo Δ_2 se puede volver a aplicar asimismo en $\log (1 - 1/100)$, etc.

$$= - \frac{\Delta}{100} + \frac{\Delta_2}{100} \cdot \left(\frac{1}{100} - 1 \right) / 2 + \frac{\Delta_3}{100} \left(\frac{1}{100} - 1 \right) \left(\frac{1}{100} - 2 \right) / 2 \cdot 3 + \ldots$$

Sólo me resta añadir que se comprueba mediante las segundas diferencias que log 2 = 0,301032 sólo tiene un error de la última cifra y de ello se deduce que los cálculos consiguientes son más exactos que lo previsto y la tabla de los cuatro decimales exactos se hace en pocas horas.