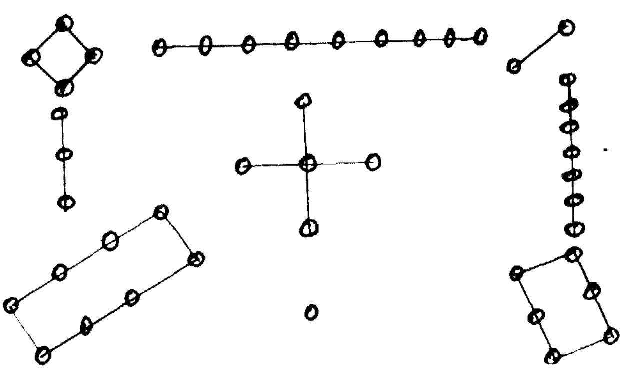
1 Estructura algebraica de los cuadrados mágicos

Por Angel ANTONIO NUÑEZ GARCIA (*)
y Miguel Angel PACIOS ALVAREZ (**)

INTRODUCCION

El estudio y construcción de cuadrados mágicos ha preocupado durante siglos, tanto a matemáticos como a personas interesadas en los aspectos recreativos de las matemáticas.

La historia de los cuadrados mágicos comienza, parece ser, en China hacia el año 2200 a. J. C. La tradición oriental sostiene que el Emperador Yu estaba a la orilla del río Amarillo cuando se le apareció una tortuga con un símbolo místico grabado sobre la concha. Este símbolo se conoce con el nombre de *lo-shu:*



Podemos escribir este símbolo en notación decimal y forma de cuadrado, resultando:

4	9	2
3	5	7
8	1	6

cuadrado en el que la suma de los números de cada fila, cada columna y cada una de las diagonales es 15.

Pasaron muchos siglos hasta que el cuadrado mágico apareció en otros países. Al parecer en el siglo IX lo utilizaban los astrólogos árabes en la lectura de horóscopos. En el siglo XI se encuentran cuadrados mágicos en la India. En Europa Occidental los cuadrados mágicos eran, en la Edad Media, patrimonio de astrólogos y alquimistas. Creían que una tablilla con la representación de un cuadrado mágico libraba a la persona que lo llevaba de cualquier desgracia, era una talismán. Enmanuel Moschopoulos (1282-1328) escribió el primer tratado sobre cuadrados mágicos, que al parecer recogió de la tradición india. Cornelius Agripa (1481-1535) construyó cuadradoso mágicos de órdenes: 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, que se asociaban a los siete cuerpos celestes Saturno, Júpiter, Marte, el Sol, Venus, Mercurio y la Luna.

En el año 1514 aparece un cuadrado mágico sorprendente. En efecto, en el ángulo superior derecho del grabado «Melancolía», realizado en 1514 por Alberto Durero, puede verse el siguiente cuadrado mágico

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

que tiene algunas propiedades sorprendentes: a) el año en el que el grabado fue realizado, 1514, aparece en las celdas centrales de la fila inferior; b) la suma de los cuadrados de la 1.ª y 4.ª fila son iguales; c) la suma de los cuadrados de la 1.ª y 4.° columnas son iguales; e) la suma de los cuadrados de la 2.ª y 3.ª columnas son iguales; f) la suma de los cuadrados de los números situados en las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de los números no situados en las diagonales, y lo mismo ocurre con los cubos. Aparte, claro está, de que la suma de cada fila, cada columna y cada una de las dos diagonales es 34. Sin duda alguna, es un cuadrado mágico realmente notable.

Hacia 1612 se ponen de moda, con Bachet de Meziriac, los pasatiempos con cuadrados mágicos y años más tarde es Fermat el que alcanza gran virtuosismo en tales pasatiempos. El estudio de los cuadrados mágicos sigue a través de los siglos hasta época reciente; en agosto de 1973 se encuentra un cuadrado mágico de orden 10 y suma 495. Si escribimos los números de ese cuadrado con dos cifras, desde 00 a 99 encontramos una sorprendente aplicación a este cuadrado mágico. Veamos: si añadimos a cada uno de los números que figuran en él dos cifras, una que indique la fila y la otra la columna (ambas del 0 al 9), obtenemos una tabla de 100 números de cuatro cifras con la siguiente propiedad:

(*) Catedrático de Matemáticas INB «Gil y Carrasco».
(**) Profesor Agregado de Matemáticas INB «Rey Pastor».

«Dos de estos números difieren en al menos tres cifras.» Ejemplo: 3057 y 7049 sólo coinciden en la segunda cifra 0.

Esta tabla de 100 números nos permite un código para captar errores de transmisión. Si utilizamos un lenguaje formado con la ayuda de cien mensajes elementales diferentes, podemos codificar cada mensaje por uno de esos cien números. Sería necesario que tres cifras al menos fuesen modificadas a lo largo de la transmisión de un mensaje elemental (y no importa cómo) para que la serie de cuatro cifras recibida represente un mensaje erróneo. En los demás casos el error será detectado. Si sabemos que sólo una cifra ha podido ser modificada se puede corregir el error, pues entre los cien números hay uno y sólo uno que difiere en una cifra del número modificado. Esta aplicación de los cuadrados mágicos a un problema tan actual como el de la detección de errores en la transmisión de mensajes codificados, resulta, sin duda, realmente sorprendente.

De las alternativas que ofrece el estudio de los cuadrados mágicos nos hemos decidido, en este artículo, por el estudio de la estructura algebraica de los cuadrados mágicos. Creemos que puede ser un tema original y atractivo para alumnos de COU, por manejarse en él conceptos de estrecha relación con el temario del curso, así: Espacio y subespacio vectorial, dependencia e independencia lineal, base y dimensión, aplicación lineal etcétera. Sin olvidar, claro está, el cálculo matricial.

CUADRADOS MAGICOS

Nos limitaremos en este trabajo a los cuadrados mágicos con coeficientes reales.

DEFINICION

Llamamos cuadrado mágico de orden n a toda matriz n x n tal que la suma de los elementos de cada fila, de cada columna y de cada una de las diagonales son iguales. A la constante que se obtiene como suma de cada una de las diagonales se llama CONSTANTE MAGICA del cuadrado mágico.

CASOS PARTICULARES

I. CUADRADOS MAGICOS DE ORDEN 1

Toda matriz de orden 1 es un cuadrado mágico de orden 1

$$M = (a) \quad a \in R$$

II. ORDEN 2

Sea M una matriz 2 x 2, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (a, b, c, d $\in$ R).

Para que M sea un cuadrado mágico tiene que verificarse:

$a+b=c+d=a+c=b+d=a+d=b+c$. De aquí se deduce de modo inmediato $a=b=c=d$. Para que una matriz 2 x 2 sea cuadrado mágico debe ser de la forma:

$$M = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$$

III. ORDEN 3

Estudiaremos algunas propiedades de estos cuadrados, que luego trataremos de generalizar para el caso de cuadrados mágicos de orden n $\geqslant$ 3.

TEOREMA 1. El elemento central de un cuadrado mágico de orden 3 es un tercio de la constante mágica.

Demostración

Sea el cuadrado mágico $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$; llamemos S a la constante mágica. Por tanto, la suma de la segunda fila y las dos diagonales valdrá 3 S.

$$(a_{21}+a_{22}+a_{23})+(a_{11}+a_{22}+a_{33})+(a_{13}+a_{22}+a_{31})=3S$$

$$3a_{22}+\underbrace{(a_{11}+a_{21}+a_{31})}_{S}+\underbrace{(a_{13}+a_{23}+a_{33})}_{S}=3S$$

$$3a_{22}=S \rightarrow a_{22}=\frac{S}{3}$$

TEOREMA 2. El conjunto de los cuadrados mágicos de orden 3 es un subespacio vectorial de dimensión 3 del conjunto de las matrices 3 x 3.

Demostración

Indicamos por J_3 el conjunto de cuadrados mágicos de orden 3.

I) a) Sean $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$

A, B $\in J_3$. S_A: constante mágica de A.

S_B: constante mágica de B. Es sencillo probar que $A+B \in J_3$ y su constante mágica será S_A+S_B.

b) Sea $A \in J_3$ $r \in R$. S_A constante mágica de A.

$r.A = \begin{pmatrix} ra_{11} & ra_{12} & ra_{13} \\ ra_{21} & ra_{22} & ra_{23} \\ ra_{31} & ra_{32} & ra_{33} \end{pmatrix}$ es evidente que $rA \in J_3$ y que su constante mágica es rS_A.

Por tanto, el conjunto de cuadrados mágicos de orden 3 es un subespacio vectorial del conjunto de matrices 3 x 3.

II) Los cuadrados mágicos: $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

constituyen una base de J_3.

a) Son linealmente independientes

$$\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3 \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & -\lambda_1-\lambda_2+3\lambda_3 \\ -2\lambda_1-\lambda_2+4\lambda_3 & \lambda_3 & 2\lambda_1+\lambda_2-2\lambda_3 \\ \lambda_1+\lambda_2-\lambda_3 & -\lambda_2+2\lambda_3 & -\lambda_1+2\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1=0 \\ \lambda_2=0 \\ \lambda_3=0 \end{matrix} \quad \text{C.Ce.D.}$$

b) Es un sistema de generadores

Sea M perteneciente a J_3 de constante mágica S.

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Veamos si $\lambda, \lambda_1\ \lambda_2, \lambda_3 \in R \quad M=\lambda_1 M_1+\lambda_2 M_2+\lambda_3 M_3$

$$\begin{matrix} \lambda_1=a_{11} & -2\lambda_1-\lambda_2+4\lambda_3=a_{21} & \lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=a_{31} \\ \lambda_2=a_{12} & \lambda_3=a_{22} & -\lambda_2+2\lambda_3=a_{32} \\ -\lambda_1-\lambda_2+3\lambda_3=a_{13} & 2\lambda_1+\lambda_2-2\lambda_3=a_{23} & -\lambda_1+2\lambda_3=a_{33} \end{matrix}$$

Estudiemos si $\lambda_1=a_{11}$, $\lambda_2=a_{12}$ y $\lambda_3=a_{22}$ verifican todas las igualdades.

$-\lambda_1-\lambda_2+3\lambda_3=a_{13}$, sustituyendo: tenemos:

$-a_{11}-a_{12}+3a_{22}=a_{13} \Rightarrow a_{11}+a_{12}+a_{13}=3a_{22} \Rightarrow S=3a_{22}$, que es cierto por teorema 1.

$-2\lambda_1-\lambda_2+4\lambda_3=a_{21}$

$-2a_{11}-a_{12}+4a_{22}=a_{21} \Rightarrow 2a_{11}+a_{12}+a_{21}=4a_{22} \Rightarrow$

$a_{11} + a_{12} + a_{11} + a_{21} = 3a_{22} + a_{22} \Rightarrow S - a_{13} + S - a_{31} = S + a_{22}$
$S = a_{13} + a_{22} + a_{31}$, que es cierta por ser M un cuadrado mágico y en él la suma de los elementos de una diagonal es igual a la constante mágica.

$2\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = a_{23}$

$2a_{11} + a_{12} - 2a_{22} = a_{23} \Rightarrow a_{11} + a_{11} + a_{12} = a_{22} + a_{22} + a_{23} \Rightarrow$
$a_{11} + S - a_{13} = a_{22} + S - a_{21} \Rightarrow a_{11} + a_{21} = a_{22} + a_{13} \Rightarrow$
$S - a_{31} = S - a_{31}$

$\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = a_{31}$

$a_{11} + a_{12} - a_{22} = a_{31} \Rightarrow a_{11} + a_{12} = a_{22} + a_{11} \Rightarrow S - a_{13} = S - a_{13}$

$-\lambda_2 + 2\lambda_3 = a_{32}$

$-a_{12} - 2a_{22} = a_{32} \Rightarrow 2a_{22} = a_{12} + a_{32} \Rightarrow S - a_{22} = S - a_{22}$

$-\lambda_1 + 2\lambda_3 = a_{23}$

$-a_{11} + 2a_{22} = a_{33} \Rightarrow 2a_{22} = a_{11} + a_{33} \Rightarrow S - a_{22} = S - a_{22}$

Los valores dados a λ_1, λ_2 y λ_3 verifican todas las igualdades, luego los cuadrados mágicos M_1, M_2 y M_3 constituyen un sistema de generadores. Por tanto, $B = \{ M_1, M_2, M_3 \}$ forman una base del espacio vectorial J_3; a esta base la llamamos BASE CANONICA. La dimensión de J_3 es efectivamente 3.

NOTA: al generalizar a un orden n c cualquiera veremos una forma de elegir una base.

CONSECUENCIAS

1) El cuadrado mágico $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ tiene como coordenadas (a_{11}, a_{12}, a_{22}) respecto de la base canónica $\{M_1, M_2, M_3\}$

2) $a, b, c \in R$ está unívocamente determinado el cuadrado mágico.

$$M = \begin{pmatrix} a & b & -a-b+3c \\ -2a+b+4c & c & 2a+b+2c \\ a+b-c & -b+2c & -a+2c \end{pmatrix}$$

DEFINICION

Un cuadrado mágico simétrico de orden n es un cuadrado mágico de orden n tal que $i, j \in I = \{1, \ldots, n\}$ $a_{ij} = a_{ji}$. Es decir, es un cuadrado mágico tal que su matriz es simétrica.

TEOREMA 3. Los cuadrados mágicos simétricos de orden 3 constituyen un subespacio vectorial de dimensión 2 del espacio vectorial J_3.

Demostración

Según la consecuencia 2 anterior, todo cuadrado mágico de orden 3 se puede escribir:

$$M = \begin{pmatrix} a & b & -a-b+3c \\ -2a+b+4c & c & 2a+b-2c \\ a+b-c & -b+2c & -a+2c \end{pmatrix}$$

Para que M sea simétrico debe verificar:
$-2a - b + 4c = b \Rightarrow 4c = 2a + 2b \Rightarrow 2c = a + b$
$a + b - c = -a - b + 3c \Rightarrow 2a + 2b = 4c \Rightarrow 2c = a + b$
$-b + 2c = 2a + b - 2c \Rightarrow 4c = 2a + 2b \Rightarrow 2c = a + b$. Sustituyendo $a + b$ por $2c$ resulta:

$$M = \begin{pmatrix} a & 2c-a & c \\ 2c-a & c & a \\ c & a & -a+2 \end{pmatrix}$$

Es decir, todo cuadrado mágico simétrico (C.M.S.) responde a esta forma.

I) Los C.M.S. constituyen un subespacio vectorial.

En efecto: La suma de dos C.M.S. es un C.M.S. Recordemos que la suma de dos cuadrados mágicos es un cuadrado mágico y la suma de dos matrices simétricas es una matriz simétrica.

El producto de un número real por un C.M.S. es un C.M.S. Se razona de modo análogo.

II) La dimensión de este subespacio vectorial es 2.

Sabemos que todo cuadrado mágico simétrico se puede escribir:

$$\begin{pmatrix} a & 2c-a & c \\ 2c-a & c & a \\ c & a & -a+2c \end{pmatrix}$$

siendo $a, c \in R$. Sólo habrá dos matrices de este tipo que sean linealmente independientes y, además, será un sistema de generadores del espacio vectorial de los C.M.S.

Asi una base será la formada por las matrices:

$$\begin{matrix} a=1 \\ c=0 \end{matrix} \qquad S_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} a=0 \\ c=1 \end{matrix} \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Podríamos razonar que el subespacio de los C.M.S. tiene dimensión dos de la forma:

$$C.M.S. = \{M \in J_3 / \ a + b = 2c\}, \text{ siendo}$$

$$M = \begin{pmatrix} a & b & -a-b+3c \\ -2a+b+4c & c & 2a+b-2c \\ a+b-c & -b+2c & -a+2c \end{pmatrix}$$

Sabemos que el espacio vectorial J_3 (C.M.) tiene dimensión 3, entonces el subespacio vectorial de los C.M.S. tendrá dimensión 2, ya que le estamos exigiendo una condición a los elementos de J_3, es decir, le quitamos un grado de libertad; en consecuencia, la dimensión del subespacio vectorial de C.M.S. es 2.

CONSECUENCIAS

1) Todo C.M. se descompone de modo único en la suma de una C.M. de diagonal principal nula y de un C.M. simétrico. Todo cuadrado mágico se puede escribir:

$$M = \begin{pmatrix} a & b & -a-b+3c \\ -2a-b+4c & c & 2a+b-2c \\ a+b-c & -b+2c & -a+2c \end{pmatrix}$$

Este cuadrado mágico se puede escribir:

$$\begin{pmatrix} a & b & -a-b+3c \\ -2a+b+4c & c & 2a+b-2c \\ a+b-c & -b+2c & -a+2c \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2c+a+b & -a-b+2c \\ -a-b+2c & 0 & a+b-2c \\ a+b-2c & -a-b+2c & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} a & 2c-a & c \\ 2c-a & c & a \\ c & a & 2c-a \end{pmatrix}$$

Por tanto, podemos asociar canónicamente a cada C.M. un C.M.S.

$$J_3 \xrightarrow{P} C.M.S. = J_{S_3}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & -a-b+3c \\ -2a-b+4c & c & 2a+b-2c \\ a+b-c & -b+2c & -a+2c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & 2c-a & c \\ 2c-a & c & a \\ c & a & 2c-a \end{pmatrix}$$

Tratamos a continuación de generalizar los resultados obtenidos para C.M. de orden 3 a C.M. de orden n.

ESPACIO VECTORIAL DE LOS CUADRADOS MAGICOS DE ORDEN $n \geqslant 3$

El conjunto de los cuadrados mágicos de orden n, J_n es un subespacio vectorial de las matrices n x n. La demostración es totalmente análoga a la utilizada para el caso $n = 3$.

Núcleo principal de nuestro trabajo será la demostración de siguiente teorema, que generaliza lo estudiado para los cuadrados mágicos de orden 3.

TEOREMA FUNDAMENTAL

El espacio vectorial de los cuadrados mágicos de orden n es, para $n \geqslant 3$, de dimensión $n^2 - 2n$.

LEMA. — Sea $M \in J_n$ de constante mágica S

$$M = \begin{pmatrix} a_{11}\,a_{12} & \cdots\cdots & a_{1j} & \cdots\cdots & a_{1n-1}\,a_{1n} \\ a_{21}\,a_{22} & \cdots\cdots & a_{2j} & \cdots\cdots & a_{2n-1}\,a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}\,a_{i2} & \cdots\cdots & a_{ij} & \cdots\cdots & a_{in-1}\,a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}\,a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nj} & \cdots\cdots & a_{nn-1}\,a_{nn} \end{pmatrix}$$

Indicamos por:

$L_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ suma de los elementos de la fila i.

$C_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ suma de los elementos de la columna j.

$D_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ suma de los elementos de la 1.ª diagonal.

$D_2 = \sum_{i=1}^{n} a_{in+1-i}$ suma de los elementos de la 2.ª diagonal.

Consideramos también la suma de los elementos de las filas, columnas y diagonales de la matriz M privada de los elementos extremos (es decir, la matriz M sin la 1.ª fila, n-ésima fila, 1.ª columna y n-ésima columna).

$l_i = \sum_{j=2}^{n-1} a_{ij}$

$c_j = \sum_{i=2}^{n-1} a_{ij}$

$d_1 = \sum_{i=2}^{n-1} a_{ii}$

$d_2 = \sum_{i=2}^{n-1} a_{in+1-i}$

Llamamos $s = d_1 + d_2 + l_2 \ldots + l_{n1}$, entonces se verifica: $s = (n-2)\,S$

Demostración

Por ser M un cuadrado mágico de constante mágica S, tenemos:

$L_1 = L_2 = \ldots = L_n = C_1 = C_2 = \ldots = C_n = D_1 = D_2 = S$

Con las notaciones anteriores tenemos:

$D_1 + D_2 + L_2 + L_3 + \ldots + L_{n-1} = (a_{11} + d_1 + a_{nn}) + (a_{1n} + d_2 + a_{n1}) + \sum_{i=2}^{n-1}(a_{i1} + l_i + a_{in})$. Tenemos:

$$nS = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} + (d_1 + d_2 + \sum_{i=2}^{n-1} l_i) + \sum_{i=1}^{n} a_{in} \rightarrow nS = C_1 + s + c_n$$

Como $C_1 = C_n = S$, resulta $\Rightarrow nS = S + s + S \Rightarrow s = (n\text{-}2)S$ C.Q.D. Este lema generaliza el teorema 1, que decía: «El elemento central de un C.M. de orden 3 es un tercio de la constante mágica.»

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad n = 3 \qquad s = S, \text{ en}$$

este caso $s = d_1 + d_2 + l_2 = 3a_{22}$; luego, $3a_{22} = S$ $a_{22} = \frac{S}{3}$

LEMA

Sea m una matriz cualquiera de orden $n-2$ y $s = d_1 + d_2 + \sum_{i=2} l_i$

$$m = \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots\cdots\cdots & a_{2n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-12} & \cdots\cdots\cdots & a_{n-1n-1} \end{pmatrix} \quad \text{Llamamos } S = \frac{S}{n-2}.$$

Entonces existe $M \in J_n$, de constante mágica S obtenido bordeando la matriz m.

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ | & \boxed{\; m \;} & | \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Demostración

$$m = \begin{pmatrix} a_{22} & \cdots\cdots & a_{2i} & \cdots\cdots & a_{2n-1} \\ a_{32} & \cdots\cdots & a_{3i} & \cdots\cdots & a_{3n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-12} & \cdots\cdots & a_{n-1i} & \cdots\cdots & a_{n-1n-1} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} a_{11}\,a_{12} & \cdots\cdots & a_{1i} & \cdots\cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21}\,a_{22} & \cdots\cdots & a_{2i} & \cdots\cdots & 2_{2n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ a_{n-11}a_{n-12} & \cdots\cdots & a_{n-1i} & \cdots\cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1}\,a_{n2} & \cdots\cdots & a_{ni} & \cdots\cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Necesitamos $4n-4$ coeficientes, a saber:

- los de la 1.ª fila a_{1j} $j \in \{1, \ldots n\}$
- los de la n-ésima fila a_{nj} $j \in \{1, \ldots n\}$
- los de la 1.ª columna a_{i1} $j \in \{2, \ldots n+1\}$
- los de la n-ésima columna a_{in} $i \in \{2, \ldots n-1\}$

estos coeficientes deben satisfacer las $2n+2$ ecuaciones:
$L_i = S$; $C_j = S$; $D_1 = D_2 = S$ $\quad i \in \{1, \ldots n\}$ $j \in \{1, \ldots n\}$

Vamos a elegir arbitrariamente $2n-4$ coeficientes entre los $4n-4$ buscados de la manera siguiente:

a_{1j} cualesquiera para $j \in \{1, \ldots n-1\}$
a_{i1} cualesquiera para $i \in \{2, \ldots n-2\}$
Luego nos quedan por conocer $2n$ coeficientes que son:

- los de la n-ésima fila a_{nj} $j \in \{1, \ldots n\}$
- los de la n-ésima columna a_{in} $i \in \{1, \ldots n-1\}$
- el coeficiente a_{n-11} de la primera columna

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots\cdots\cdots & \alpha_{n-1} & \nearrow \\ \beta_2 & a_{22} & \cdots\cdots\cdots & a_{2n-1} & \nearrow \\ \beta_3 & a_{32} & \cdots\cdots\cdots & a_{3n-1} & \nearrow \\ \vdots & & & & \\ \beta_{u-2} & a_{u-22} & \cdots\cdots\cdots & a_{u-24-1} & \nearrow \\ \boxed{\nearrow} & a_{u-12} & \cdots\cdots\cdots & a_{u-1n-1} & \boxed{\nearrow} \\ \boxed{\nearrow} & \nearrow & \cdots\cdots\cdots & \nearrow & \boxed{\nearrow} \end{pmatrix}$$

Indicamos por letras griegas $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}$ y $\beta_2, \beta_3, \beta_{u-2}$ los $2n-4$ coeficientes arbitrarios y por ↗ los $2n$ coeficientes desconocidos. Por ser M un cuadrado mágico podemos determinar de modo único:

— Casi todos los coeficientes de la última columna, pues cada fila debe ser tal que:

$L_i = a_{i1} + l_i + a_{in} = S \Rightarrow a_{in} = S - a_{i1} - l_i$ para $i \in \{1, \dots n-2\}$.

— Casi todos los coeficientes de la última fila, cada columna debe ser tal que:

$C_j = a_{1j} + c_j + a_{nj} = S \Rightarrow a_{nj} = S - a_{1j} - c_j$ para $j \in \{2, \dots n-2\}$.

Solamente nos quedan por determinar los coeficientes $a_{n-11}, a_{n1}, a_{n-1n}, a_{nn}$ indicados en la figura por ↗.

Esos coeficientes que quedan por determinar verifican:

$L_{n-1} = S$; $L_n = S$; $C_1 = S$; $C_n = S$; $D_1 = S$; $D_2 = S$;

a_{nn} puede ser determinado utilizando $D_1 = S \Rightarrow a_{11} + d_1 + a_{nn} = S \Rightarrow a_{nn} = S - a_{11} - d_1$;

a_{n1} puede ser determinado utilizando $D_2 = S \Rightarrow a_{n1} + d_2 + {}_{1n} = S \Rightarrow a_{n1} = S - a_{1n} - d_2$;

a_{n-11} puede ser determinado utilizando $C_1 = S$

$$\sum_{i=1}^{n-2} a_{i1} + a_{n-11} + a_{n1} = S \Rightarrow a_{n-11} = S - \sum_{i=1}^{n-2} a_{i1} - a_{n1};$$

a_{n-1n} puede ser determinado utilizando $C_n = S$

$$\sum_{i=1}^{n-2} a_{in} + a_{n-1n} + a_{nn} = S \Rightarrow a_{n-1n} = S - \sum_{i=1}^{n-2} a_{in} - a_{nn};$$

Es suficiente comprobar si se verifican las dos ecuaciones que faltan: $L_{n-1} = L_n = S$.

Se tiene: $D_1 + D_2 + L_2 + \dots + L_{n-2} + L_{n-1} = C_1 + C_n + s$, pues $s = d_1 + d_2 + l_2 + \dots + l_{n-1}$.

Como $D_1 = D_2 = L_2 = \dots = l_{n-2} = S$ y $s = (n-2) S \Rightarrow (n-1)S + L_{n-1} = S + S(n-2) S = nS \Rightarrow L_{n-1} = S$

Teniendo en cuenta que:

$L_1 + L_2 + \dots + L_{n-1} + L_n = C_1 + C_2 + \dots + C_n = nS$,

y como:

$L_1 = L_2 = \dots = L_{n-1} = S \Rightarrow$

$\Rightarrow (n-1) S + L_n = nS \Rightarrow L_n = S$

Por tanto, la matriz M que hemos construido, bordeando la matriz dada m, es un cuadrado mágico de constante mágica S.

COROLARIO

Como corolario de este lema se demuestra el teorema fundamental propuesto.

El número de números reales arbitrarios a partir de los cuales se han calculado los últimos coeficientes desconocidos son:

— $(n-2)^2$ Coeficientes de la matriz $m \in M_{(n-2)x(n-2)}$;
— $(n-1)$ Coeficientes de la 1.ª fila;
— $(n-3)$ Coeficientes restantes de la 1.ª columna.

El número total será: $(n-2)^2 + (n-1) + (n-3) = n^2 - 2n$.

Resumiendo, un cuadrado mágico de orden n está perfectamente determinado por n $n^2 - 2n$ números reales arbitrarios. Por tanto, el espacio vectorial J_n para $\geqslant 3$ tine como dimensión $n^2 - 2n$. C.Q.D.

CONSECUENCIA

I) Base canónica del espacio vectorial J_n.

Como consecuencia del teorema anterior, podemos construir una base canónica; para ello es suficiente elegir todos los coeficientes arbitrarios nulos, excepto uno, que haremos 1, y completar la matriz por el método descrito.

EJEMPLOS

$n = 3 \qquad S = \frac{s}{n-2} \qquad S = s$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \beta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Como $s = 0$ $S = 0$ $\qquad s = 0$ $S = 0$ $\qquad s = 3$ $S = 3$

Los cuadrados mágicos α, β, γ constituyen una base canónica. En esta base el cuadrado mágico chino del que hemos hablado en la introducción

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$ tiene como coordenadas (4, 9, 5)

Para $n = 4$

La dimensión de J_4 es $4^2 - 2 \cdot 4 = 8$

$$S = \frac{s}{n-2} \Rightarrow S = \frac{s}{2}$$

Una base canónica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$S = s = 0 \qquad S = s = 0$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$S = s = 0 \qquad S = s = 0$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$s = 2 \quad S = 1 \qquad s = 2 \quad S = 1$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$s = 2 \quad S = 1 \qquad s = 2 \quad S = 1$

El cuadrado mágico «Melancolía», del que hemos hablado en la introducción, se escribe en función de la base anterior en la forma:

$16A + 3B + 2C + 5D + 10E + 11F + 6G + 7H$, o sea, sus coordenadas en esa base son: (16, 3, 2, 5, 10, 11, 6, 7).

APLICACION LINEAL DE J_n EN R

Definimos $\quad f: J_n \to R$

$M \to f(M) = S$. Esta aplicación hace corresponder a cada cuadrado mágico su constante mágica.

Véamos si es lineal:

a) $f(M_1 + M_2) =$ constante mágica de $(M_1 + M_2) = S_1 + S_2$

$f(M_1) = S_1 \qquad f(M_2) = S_2$; luego, $f(M_1 + M_2) = f(M_1) + f(M_2)$.

b) $f[\lambda M] =$ constante mágica de $(\lambda M) = \lambda S$

$\lambda f(M) = \lambda_n \cdot S$.

El núcleo de esta aplicación lineal será:

Ker f = $\{M \in J_n \mid f(M) = 0\}$, o sea, será el conjunto de cuadrados mágicos de constante mágica 0.

PROPOSICION.—El conjunto de los cuadrados mágicos de orden n y constante mágica 0 (núcleo de la aplicación anterior) es un subespacio vectorial de J_n de dimensión n^2-2n-1.

Demostración

$$f: J_n \rightarrow R$$
$$M \rightarrow f(M)=S$$

Como f es aplicación lineal $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim J_n$ $\dim \operatorname{Ker} f = \dim J_n - \dim \operatorname{Im} f$. Pero como f es suprayectiva tenemos $\operatorname{Im} f = R$, luego:

$$\dim \operatorname{Ker} f = n^2-2n-1 \quad \text{C.Q.D.}$$

BIBLIOGRAFIA

1.—*L'Algebre Lineaire par ses aplications*, T. J. Fletcher, CEDIC.

2.—«Base Mágica», J. Pineaud, *Bulletin APMEP*, n.º 308.

3.—*Conceptos matemáticos: Un enfoque histórico*, Margaret F., Willerding, CECSA.

4.—*Les Carrés Magiques*, M. Glaymann y otros. Publicaciones de la APMEP.