

Simulaciones aleatorias

Por Ricardo AGUADO-MUÑOZ, Ricardo ZAMARREÑO y Agustín BLANCO(*)

1. INTRODUCCION

En este trabajo presentamos unos ejemplos sencillos de *simulación aleatoria* con ayuda de calculadoras.

Las técnicas de simulación que vamos a exponer se conocen bajo el nombre genérico de *Método de Montecarlo* debido a que sus creadores, los matemáticos J. von Neumann y S. Ulam, lo dieron a conocer en un artículo titulado «The Monte Carlo method» en 1949. El nombre hace alusión al famoso casino, pues la ruleta es uno de los instrumentos que se pueden utilizar para simular una variable aleatoria.

En la actualidad, en lugar de ruletas, se utilizan ordenadores. Nosotros hemos intentado aplicar las calculadoras a la realización de estos métodos en bachillerato.

Para la práctica de estas actividades es conveniente disponer de una calculadora programable. A pesar de esto, en la clase se puede dividir el trabajo entre distintos grupos de alumnos, de modo que las calculadoras normales sean aprovechables.

La base del método está en la generación de *números aleatorios*, que pasamos a exponer.

2. GENERACION DE NUMEROS ALEATORIOS

Podemos imaginar que un *número aleatorio* es aquel que se obtiene mediante «un sorteo» efectuado en un conjunto de números.

A veces se necesita disponer de una lista de números aleatorios x_i , comprendidos entre 0 y 1, y distribuidos uniformemente en el intervalo (0,1).

Esta lista puede ser sustituida por una sucesión de números aleatorios (1) generados con la calculadora, del siguiente modo:

Inicialmente elegimos un número, por ejemplo:

$$x_0 = 0,3727468;$$

lo multiplicamos por 147:

$$0,3727468 \times 147 = 54,7937796$$

De este número, nos quedamos con la parte decimal x_1 :

$$x_1 = 0,7937796$$

A partir de x_1 , repetimos el proceso para obtener x_2 :

$$x_2 = \text{parte decimal de } (0,7937796 \times 147)$$

$$x_2 = 0,6856012$$

Del mismo modo obtenemos los números aleatorios siguientes:

$$x_3 = 0,7833764$$

$$x_4 = 0,1563308$$

.....

En general, se tiene:

$$x_{n+1} = D(147 x_n)$$

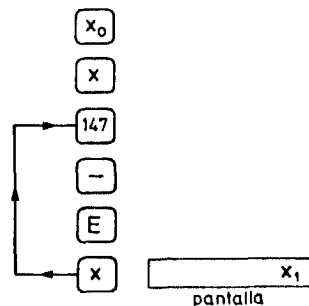
siendo D la función parte decimal.

El número x_0 , a partir del cual se genera la sucesión de números aleatorios, se llama *semilla*. El número 147 es el *generador*.

El carácter aleatorio de la sucesión se puede probar mediante tests especiales; pero nosotros vamos a confirmar este carácter diseñando algunos procesos aleatorios que lo confirmarán de modo indirecto.

Es claro que se puede empezar por otra semilla. En cuanto a generadores, además del 147, se pueden usar, entre otros, los siguientes: 83; 117; 123; 133; 163; 173; 187 y 197 (2). El lector podrá añadir algún otro de su cosecha después de haberlo experimentado convenientemente.

Para generar números aleatorios con una calculadora normal podemos seguir el siguiente programa:



(*) Catedrático y profesores agregados de Matemáticas respectivamente del I.N.B. «Herrera Oriá» de Madrid.

(1) Más propiamente: los números «aleatorios» generados por un computador se llaman *pseudoaleatorios*.

(2) RADE, L.: *Tentez votre chance avec votre calculateur programmable*. CEDIC. Paris, 1977.

En este programa E representa la parte entera de 147 x₀.

3. CALCULO ALEATORIO DE π

Vamos a ver una primera aplicación de los números aleatorios:

Se trata de calcular un valor aproximado de π, lanzando dardos sobre la diana representada en la figura 1.

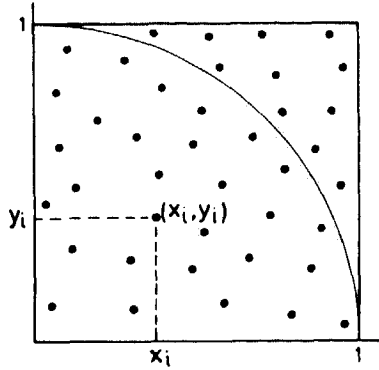


Fig. 1

La diana es un cuadrado de lado 1, en el que se ha inscrito un cuadrante de círculo.

Supongamos que todos los dardos que se lanzan dan en el cuadrado y que se reparten uniformemente; entonces la probabilidad de que un dardo caiga en el cuadrante de círculo es:

$$p = \frac{\text{área del cuadrante}}{\text{área del cuadrado}} = \frac{\pi/4}{1} = \frac{\pi}{4}$$

Supongamos, ahora, que lanzamos N dardos sobre el cuadrado, y sea n el número de los que caen en el cuadrante. La frecuencia relativa de caída en el cuadrante $\frac{n}{N}$, será aproximadamente igual a $\frac{\pi}{4}$. Por tanto:

$$\pi \approx \frac{4n}{N}$$

Si el número N es suficientemente grande, cabe esperar que $\frac{4n}{N}$ sea una buena aproximación de π.

Como no es cosa de ponerse a lanzar dardos sobre un cuadrado, los lanzamientos serán simulados con la calculadora:

Produzcamos dos sucesiones de números aleatorios comprendidos entre 0 y 1:

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$$

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_i, \dots$$

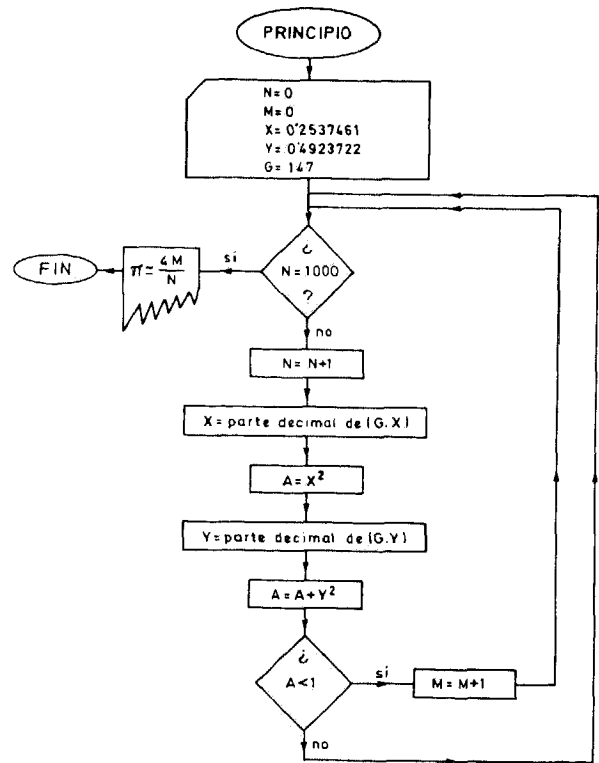
Cada par de números (x_i, y_i) representa un punto del cuadrado (fig. 1), es decir, el resultado obtenido al lanzar el dardo i-ésimo. Si x_i² + y_i² < 1, el dardo ha dado en el cuadrante de círculo.

Simulando el lanzamiento de, por ejemplo, 1.000 dardos y contando el número n de los que caen en el cuadrante, tenemos:

$$\pi \approx \frac{4n}{1.000}$$

He aquí el organigrama para esta simulación:

ORGANIGRAMA PARA EL CALCULO ALEATORIO DE π



Con una calculadora programable hemos ejecutado el correspondiente programa y obtenido los siguientes resultados:

N	π
10	3,6
100	3,28
1000	3,200
10000	3,1428

Para efectuar el cálculo aleatorio de π con calculadoras científicas normales, conviene elegir los pares (x_i, y_i) en una *tabla de dígitos aleatorios*. El recuento resulta tedioso si lo hace una sola persona; nosotros, en la clase, hemos distribuido fotocopias de una tabla de dígitos aleatorios y cada alumno ha efectuado 10 lanzamientos. De este modo la clase consigue unos 400 lanzamientos, número suficiente para ilustrar el método.

Vale la pena señalar que, a falta de tablas de dígitos aleatorios, se puede usar una guía telefónica, considerando, por ejemplo, las cuatro últimas cifras de cada número de teléfono.

4. SIMULACION DE RULETAS

Para simular la ruleta de la figura 2 podemos proceder del siguiente modo: de cada número aleatorio x_i, 0 < x_i < 1, tomamos la primera cifra decimal; así, por ejemplo, el número aleatorio x = 0,2151462 nos proporciona el dígito aleatorio 2. Con una calculadora programable, la primera cifra

decimal de x_i se puede hallar tomando la parte entera de $10 x_i$. En general:

$$d_i = E(10 x_i)$$

siendo E la función parte entera.

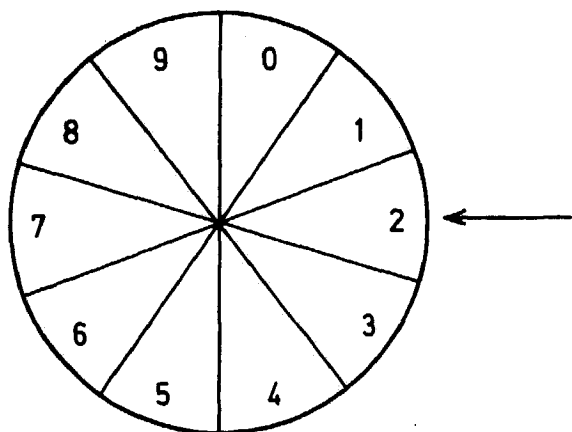


Fig. 2

Con una calculadora programable, y partiendo de la semilla $x_0 = 0,3727468$ hemos obtenido los dígitos:

7 6 7 1 9 1 3 1 4 1 1 0 4 0 1 7 1 2 6 3
9 6 3 6 4 6 0 8 2 5 5 3 6 3 7 8 3 1 2 4

5. SIMULACION DE UN DADO

A partir de la ruleta anterior se puede simular un dado despreciando los dígitos 0, 7, 8 y 9 cada vez que aparezcan. Sin embargo, resulta más sencillo el siguiente procedimiento:

- 1.º Generar un número aleatorio x_i , $0 < x_i < 1$.
- 2.º Calcular $6x_i$, que será un número comprendido entre 0 y 6.
- 3.º Hallar la parte entera de $6x_i$, que será uno de estos números: 0, 1, 2, 3, 4, 5.
- 4.º Sumar una unidad al resultado obtenido en el apartado anterior.

Brevemente:

Una vez generado el número aleatorio x_i , el punto del dado es:

$$d_i = E(6x_i) + 1$$

siendo E la función parte entera.

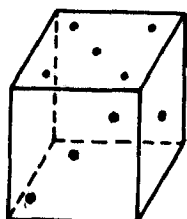


Fig. 3

Veamos un ejemplo:

partiendo de $x_0 = 0,3727468$, calculamos:

$$147x_0 = 54,7937796,$$

tomamos la parte decimal:

$$x_1 = 0,7937796,$$

multiplicamos por 6:

$$6x_1 = 4,7626776,$$

tomamos la parte entera:

$$E(6x_1) = 4,$$

sumamos una unidad:

$$d_1 = 4 + 1 = 5$$

El número 5 es, pues, el resultado del primer «lanzamiento».

A partir de x_1 se reitera el proceso.

El lector puede diseñar un programa adaptado a su calculadora. Nosotros hemos obtenido, con un programa que calcula las frecuencias de cada dígito, los resultados que se recogen en la tabla:

N	1	2	3	4	5	6
10	4	0	2	0	3	1
100	23	17	16	17	17	10
1000	164	156	155	181	186	158
10000	1623	1625	1625	1777	1709	1641

6. SIMULACION DE MONEDAS

Una moneda es un caso particular de ruleta. Es la ruleta que sólo tiene dos números: 0 y 1.

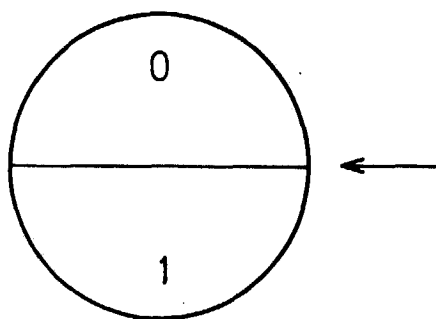


Fig. 4

El 0 representa la *cara* y el 1 la *cruz*.

Para obtener estos números podemos considerar el siguiente proceso:

Después de generar el número aleatorio x_i , $0 < x_i < 1$, sumamos 0,5, y obtenemos un número comprendido entre 0,5 y 1,5. Si ahora hallamos la parte entera, obtenemos 0 ó 1, cada uno de ellos con probabilidad 0,5.

$$d_i = E(x_i + 0,5)$$

A veces se necesita simular una ruleta como la de

la figura 5, que proporciona 1 con probabilidad p y 0 con probabilidad $1-p$.

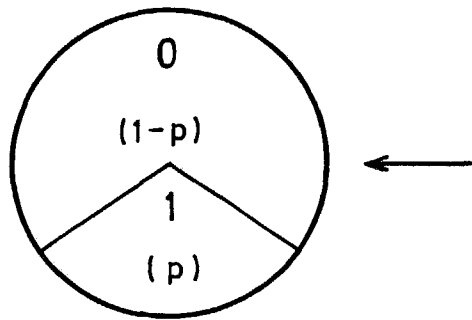


Fig. 5

Esta ruleta se puede simular mediante el algoritmo:

$$d_i = E(x_i + p)$$

Con un programa para obtener 1 con probabilidad $1/3$ hemos elaborado la siguiente serie aleatoria, que recogemos en tabla agrupando los dígitos de tres en tres.

111	001	000	000	000	100	111	000	000	100
010	011	000	000	000	000	100	100	001	010
000	000	110	010	100	000	011	100	110	001
000	000	001	000	011	101	011	110	100	101
100	100	101	011	100	101	010	000	011	101
001	001	100	100	110	000	010	010	000	000
000	100	000	110	000	000	011	010	000	101
000	001	100	110	000	100	000	011	100	111
100	100	000	110	000	000	000	000	000	001
000	000	001	000	000	110	100	110	001	000

7. SIMULACION DE UN BOMBARDEO

Como aplicación de la tabla obtenida en 6 vamos a considerar el siguiente problema:

La probabilidad de destruir un puente al arrojar una bomba desde un avión es $1/3$. Hallar un valor aproximado de la probabilidad de destruir el puente arrojando 3 bombas.

La tabla 6 simula el proceso. Cada grupo de tres dígitos representa el lanzamiento de tres bombas. El 1 significa éxito, el 0 fracaso.

Considerando las 100 ternas de la tabla se ve que el puente queda destruido en 62 ocasiones:

$$p \approx \frac{62}{100} = 0,62$$

Este número se aproxima a la probabilidad p , que se puede calcular teóricamente así:

$$p = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 0,70$$

8. FABRICACION DE BOTELLAS

Supongamos que la pasta para fabricar 100 botellas contiene 50 partículas extrañas. Al final del proceso de fabricación se rechazan, por inservibles,

todas las botellas que contengan al menos una de esas partículas. ¿Cuántas botellas resultarán aceptables?

El proceso se puede simular suponiendo que cada partícula se distribuye al azar en el conjunto de las 100 botellas.

El siguiente cuadro representa las 100 botellas. Los puntos son las partículas extrañas, y han sido colocadas en la cuadrícula tras generar con la calculadora 50 números aleatorios comprendidos entre 0 y 99.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
•	•			•	•				
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
•		•	•	••	••	••			
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
•						•		•	•
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
•		••		••				••	
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
	•						•	•	•
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
•			•					•	
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
	•	•	•		•			••	
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
				•			••	••	•
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
	•				•				
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
•								•	•

Del cuadro se deduce que en esta situación han resultado aceptables 61 botellas.

Hemos hecho una segunda simulación, resultando 60 botellas buenas.

Estos resultados concuerdan con el hecho de que la probabilidad teórica de que una botella sea aceptable es

$$p = (0,99)^{50} \approx 0,60$$

9. LA COLECCION DE CROMOS

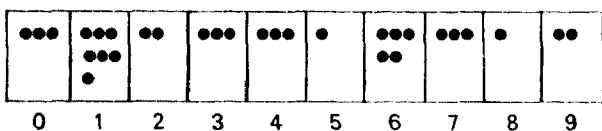
Si tenemos curiosidad por saber cuántos cromos hay que comprar para rellenar un álbum, nada mejor que simular la situación.

Estableceremos hipótesis sencillas: todos los cromos tienen la misma probabilidad de aparecer, probabilidad que se mantiene constante a lo largo del proceso; en cada sobre sólo entra un cromos (el lector puede simular casos en que los sobres traigan dos, o más, cromos no repetidos).

En primer lugar hemos simulado situaciones en las que hay un solo coleccionista, esto es, situaciones en las que los cromos «repes» no se cambian. Después hemos supuesto que hay dos (o más) coleccionistas, que extraen los cromos por turno y que intercambian entre si los «repes» cada vez que es posible.

A continuación se estudia el caso de una colección de 10 cromos y un solo coleccionista:

Después de haber generado con la calculadora dígitos equiprobables (véase 4), hemos obtenido el siguiente resultado:

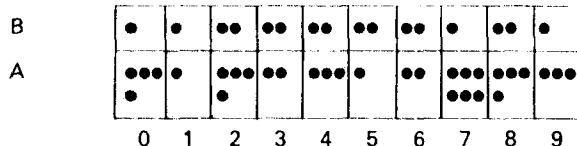


Es decir, para completar el álbum hemos necesitado comprar 30 cromos.

En otras simulaciones posteriores hemos visto que se precisan 20, 21, 24, 20 y 36 cromos.

Considerando las seis simulaciones tenemos que, por término medio, hay que «comprar» unos 25 cromos.

Para ver la influencia que tiene el hecho de que se puedan cambiar los «repes», hemos supuesto el caso de dos coleccionistas A y E que intercambian cromos repetidos siempre que el canje es posible:



El coleccionista A necesitó comprar 29 cromos y el B 14. En el cuadro figuran tachados con un aspa los cromos que han sido cambiados.

En esta simulación se observa que el número de intercambios ha sido pequeño y que, además, alguno de los cromos obtenidos por canje ha salido posteriormente en los sobres.

He aquí los resultados obtenidos en otras simulaciones:

A 43, B 35; A 55, B 25; A 15, B 15; A 19, B 29

La media, en los cinco casos en que se intercambian los repetidos, es 28. El azar nos juega una mala pasada pues, aparentemente, parece que es peor cambiar. Esto es debido a que el número de cromos por álbum es bajo; lo mismo que el de coleccionistas.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	37	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Prosigamos con el tema aumentando, ahora, el número de cromos. Supongamos un álbum de 100 cromos y un solo coleccionista. He aquí el resultado:

Para completar el álbum se ha necesitado comprar 559 cromos.

Hemos hecho una segunda simulación en la que han sido necesarios 529 cromos para terminar el álbum.

Sorprende que sea necesario comprar más de cinco veces el número de cromos del álbum para poderlo completar.

Para ver la influencia del intercambio de cromos hemos diseñado una experiencia en la que suponemos tres álbums de 100 cromos y tres coleccionistas que se intercambian los «repes».

La simulación ha sido llevada a cabo por tres alumnos provistos de una calculadora programable cada uno. Al principio de la experiencia han hecho alto, para intercambiar los cromos repetidos, cada 10 cromos «adquiridos»; más tarde han parado

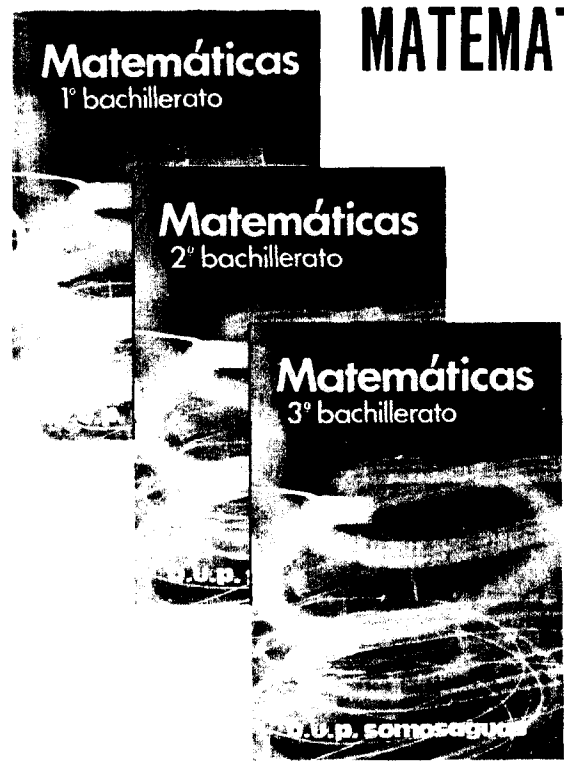
para cambiar cada cinco cromos; y al final cada vez que sacaban un cromo.

De este modo se ha visto que para completar cada colección han hecho falta: 245, 246 y 293 cromos.

No deja de sorprender que en esta situación muy próxima a la real, haya que comprar dos veces y media el número de cromos del álbum para poder completarlo.


BIBLIOGRAFIA

- [1] NAYLOR, T.: *Técnicas de simulación en computadoras*. Limusa, Méjico, 1977.
- [2] RADE, L.: *Tentez votre chance avec votre calculateur programmable*. CEDIC, Paris, 1977.
- [3] SOBOL, I. M.: *Método de Montecarlo*. MIR, Moscú, 1975.



MATEMATICAS B. U. P. SOMOSAGUAS

●	1.º BACHILLERATO D. Prada, P. Bujanda y otros	450 Ptas
	SOLUCIONARIO	400 Ptas.
●	2.º BACHILLERATO D. Prada, P. Bujanda y otros	455 Ptas.
	LIBRO DE PROBLEMAS Y SOLUCIONARIO	575 Ptas.
●	3.º BACHILLERATO P. Cela	470 Ptas.
	LIBRO DE PROBLEMAS Y SOLUCIONARIO	600 Ptas.
	COLECCION APUNTES IEPS:	
	MATEMATICAS. ¿UN NUEVO MODO DE PENSAR?	150 Ptas.
	EL JUEGO Y EL MATERIAL DIDACTICO EN LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA	190 Ptas.


NARCEA, S. A. DE EDICIONES. Federico Rubio, 89. Madrid 20. Teléfono 254 61 02