La muerte de la Geometría

Por Javier de LORENZO(*)

Algunos medios ligados más o menos estrechamente a lo que vino en llamarse la «inteligencia», los medios intelectuales, de pensamiento, han puesto en primer plano, muy de moda, un cementerio viviente. Desde «Schönberg ha muerto» lanzado por Pierre Boulez, hasta «Marx ha muerto» de los nuevos filósofos franceses; no se ha salvado ni el creador del psicoanálisis a quien también le ha tocado su turno, el consabido «Freud ha muerto». Toda una lista de personajes que, como tales, bien habían muerto, aunque lo que se prentende, al parecer, es indicar que son sus connotaciones las que han desaparecido del pensamiento y cultura en general actuales. Frases indicativas no sé si de autopublicidad de quienes las lanzan para señalar que rompen muy revolucionariamente con el pasado —para lo cual toman una frase del pasado—, o mero reflejo de que lo que está si no en desaparición sí en decadencia es, precisamente, el pensamiento racional crítico al que dicen representar. Lo que no reflejan, en modo alguno, es una auténtica preocupación por la muerte, dado que los miembros de la sociedad actual viven radicalmente marginados, no como estadística, a la problemática vivencial de la muerte, de «su» muerte como individuos.

A tanto ha llegado la preocupación esteticista mortuoria que en próximo Congreso Internacional de Educación Matemática —California 1980— se plantea como uno de los temas, y a buen seguro que de los polémicos desde el el «A bas Euclides!» de Dieudonné —quien debía estar al tanto de las actuales corrientes, porque su frase equivalía al «Euclides ha muerto»—, nada menos que el de *La muerte de la Geometría*. Enunciado algo más suave, porque queda en el aire si la Geometría se ha muerto, está muriéndose, va a morirse..., si se trata de festejar sus responsorios o analizar causas de su enfermedad... En principio, y según otras manifestaciones, cabe inferir que se trata de que la Geometría *ha* muerto, de modo efectivo. Y ello porque hay quienes vienen reclamando por «resucitarla» en los programas de Bachillerato y en los primeros años de la Facultad de Matemáticas. Y toda resurrección me parece que entraña una previa muerte de aquello por lo que se reclama que resucite. Y es el mismo proceso de peticiones de quienes exigen una resurrección del psicoanálisis freudiano, del marxismo de Marx, de unas vueltas a la naturaleza, a la religión...

Admitido que la Geometría haya muerto, me entra una pregunta, mera curiosidad de dato: ¿Cuándo murió la Geometría? Y buscando, no encuentro fecha alguna de defunción; buscando, lo que encuentro es que existen muchas geometrías actualmente y que han existido muchas otras geometrías en el pasado. Se me ha presentado tan amplio el término «Geometría» que no sé a qué Geometría se le da el certificado de defunción, si es que puede atribuírsele certificado de defunción alguno a un término conceptual.

En esa búsqueda sí observo en los momentos presentes una ausencia de preocupación por la imagen conceptual, en beneficio de una imagen estríctamente sensorial y perceptiva, apoyada en la tecnología contemporánea. Recientemente Jorge Luis Borges llegaba a señalar, en una entrevista, cómo le molestaba Pérez Galdós por su detención en la descripción de todos los detalles de, por ejemplo, una habitación. Borges posee una imaginación especial sorprendente, como ha puesto de relieve en alguno de sus escritos; no requiere del detallismo de cada uno de los múltiples objetos que se encuentran en una biblioteca para que el lector tenga la impresión de encontrarse en su interior, si es que la misma llega a tener interior. Pero no todos somos ciegos. Necesitamos algunos rasgos que indiquen cómo es ése espacio en el que el relato nos sumerge. Ahí, ciertamente, está la capacidad del escritor. Sin embargo, la técnica actual es tan maravillosa que incluso hace prescindir de cualquier tipo de descripción: basta mirar la pantalla y se ve la habitación, cómo es el personaje, su vestimenta... Sobran las palabras y cualquier tipo de términos. Es presencia de imagen en la que algunos quieren ver una de las causas de la pobreza terminológica, de vocabulario que hoy se deja sentir. No sólo pobreza de vocabulario, sino pobreza de imagen verdadera, no estrictamente sensorial, directa, porque en esa imagen en la pantalla tampoco se ven los elementos que hay en ése pretendido espacio; la atención queda prendada en el engaño, y sigue a la acción, al movimiento de personajes y de sus «diálogos»... En cualquier caso no requiere del esfuerzo de pasar de esa fugaz captación sensorial a una descripción lingüística que, por el empleo imprescindible del lenguaje y el tiempo, tiene que ser analítica, diseccionadora pero, a la vez, fijadora de la auténtica imagen que de otra manera fluye y se escapa de quien se dice observador.

Bromas aparte, un tema como el papel de la Geometría en el momento actual, y más en relación con su pretendida defunción, plantea muchas y muy diversas cuestiones. Voy a limitarme a alguna de las que hacen referencia a ese posible papel en la enseñanza y más en concreto, al nivel que aquí puede preocupar. Y como los metodólogos de la enseñanza parecen exigir que no se den clases magistrales —lejos de mí la funesta manía del magisterio— sino que más bien se plantean problemas, voy a tratar de seguir la línea y más que resolver cuestiones voy a

(*) Catedrático de Matemáticas e Inspector de Enseñanza Media.

dejarlas esbozadas, y con la mayor brevedad y esquematismo posibles.

Y una primera distinción se me presenta. Por un lado, a qué llamar «Geometría». Búsqueda del contexto semántico de un término, equivale a penetrar en la problemática de los cambios de connotación de conceptos en las disciplinas científicas. Problemática metodológica que hoy se encuentra muy en primer plano en lo que se califica de Filosofía de las ciencias y en la cual se generaliza la aceptación de que los conceptos, de modo efectivo, varían de significado tanto en el tiempo como en el contexto en el cual se manejan. En nuestro caso, averiguar a qué responde un término como el de «Geometría» puede equivaler a dar certificado de defunción a algo que ya lo tuvo desde hace siglos o a darlo a algo que, por el contrario, posee una vitalidad total... En este sentido puede observarse que hoy sí se explica Geometría en Bachillerato, un cierto tipo de Geometría, naturalmente: *la incluida tras el epígrafe* de Algebra lineal. Después de caracterizar la estructura de Espacio vectorial, se particulariza al Espacio afín y, *tras la introducción de una métrica* —que se particulariza, a su vez, en la métrica euclídica—, se estudia el Espacio Métrico euclídeo. Dado este espacio —normalmente en dos y tres dimensiones— se estudian, en él, las posiciones de rectas, de rectas y planos, cónicas... También hay un estudio de curvas ligado al capítulo de funciones de variable real. Poco, ciertamente, pero nociones geométricas, y en cierta unidad, existen. El certificado de defunción dado a la Geometría es, por ello, inexacto, al menos no puede referirse a este tipo de geometría que es el que permite, por otra parte, generalizaciones a métricas no euclídeas y hasta leves introducciones a geometrías no *euclídeas a nivel de* C.O.U. —*y basta seguir* alguno de los capítulos de un libro de Golovina, por ejemplo—. Es claro que puede discutirse si el término «Geometría» conviene o no a esta acepción. Desde mi punto de vista, y radicalmente, no es cuestionable, creo que es una acepción que pertenece al contexto semántico del término «Geometría».

Aquí viene el segundo elemento de la distinción: No se trata, ya, de uno de los problemas de la Filosofía de la ciencia como el de variaciones del significado de conceptos. Lo que entra en juego en el certificado de defunción no es un elemento estrictamente conceptual, sino un haz de creencias que soportan la brubuja conceptual y que mantienen querencias por un cierto tipo de Geometría, que no identifican con el tipo antes mencionado. Lo que *para algunos parece haber desaparecido* es la Geometría sintética, al viejo modo euclídeo. Una geometría en la que se realizan construcciones de ciertas figuras, con algunas transformaciones convenientes, en la que se siguiera explicando el teorema de las tres perpendiculares o el de la recta de máxima pendiente, pongo por caso... Lo que algunos parecen querer resucitar es este tipo de geometría. Es lo que puedo inferir en el correspondiente rechazo del «Euclides ha muerto»...

Me viene, inmediata, otra pregunta: ¿Es euclídeo este tipo de geometría, que se añora? Añoranza en la cual se pretende una vuelta a lo «concreto» contra los riesgos de la abstracción que se ven personificados en el tipo de geometría apoyado en espacios vectoriales n-dimensionales y en los que el alumno *nada «ve», frente a las escelencias de las construcciones* de la vieja Geometría euclídea y sintética, donde la visión concreta no estaba alejada del rigor necesario que toda obra matemática debe requerir. Por otro lado, y desde el punto de vista de la didáctica, daba satisfacción a los que ven dicha enseñanza como un paso de lo concreto real, del hecho puro *hacia lo abstracto, mediante sucesivas generaciones*, frente al procedimiento de la geometría vectorial que marcha de lo general a lo concreto... En este punto, mi respuesta a la pregunta anterior es clara: este tipo de construcciones que se añora ni es euclídeo ni se encuentra en el espíritu de la construcción geométrica euclídea. De manera informal y esquemática desarrollo la justificación de esta respuesta, adelantada como conclusión.

Al igual que hay que admitir, pese a las continuas afirmaciones en contra, que sí se enseña Geometría, para algunos puede ser sorprendente la afirmación de que la Geometría euclídea surge frente al concepto de medida intuitivo y, fundamentalmente, como la creación de un espacio conceptual opuesto y contrario al espacio perceptivo, al espacio de nuestras *representaciones. Sorprendente, porque se mantiene* como cuadro acrítico del pensamiento, como un artículo de fe en el que todos, creyentes o no, creen, la vieja afirmación de que la Geometría *nace* en Egipto como consecuencia de las inundaciones del Nilo y que no tiene otro objeto que la medida de la tierra; la Geometría, como cualquier otra disciplina tiene que surgir, por real decreto, de la experiencia directa. Sin embargo, las cosas no suelen ser tan fáciles como este esquematismo acrítico y dogmático sostiene. La creación pitagórico-platónica, reflejada en los *Elementos* de Euclides, es la de un espacio intrafigural estrictamente conceptual que nada tiene que ver con la experiencia, y de *aquí el papel que juega* en esta creación el elemento demostrativo. El espacio euclídeo es *homogéneo*, y en sus dos aspectos: de relatividad de posición o invariabilidad de figuras en los desplazamientos por lo que no hay puntos privilegiados; de relatividad de magnitud o posibilidad de construir figuras semejantes. Homogeneidad establecida en los postulados 4 y 5 respectivamente. Es un espacio *isotropo* en el que no existen direcciones privilegiadas. Es *continuo* en el sentido de Poincaré de que si A está relacionado con B y B lo está con C, entonces A tiene que estar en relación con C... Y estas características quedan establecidas en los postulados y nociones comunes, en los primeros principios, cuyo papel estriba, precisamente, en caracterizar el marco en el que se van a situar las figuras *objeto de estudio por parte del geómetra. Frente* a estas características, el espacio representativo, el perceptivo o de las imágenes visual, táctil, auditiva, etcétera, es radicalmente opuesto, porque ni es homogéneo, ni isotropo, ni continuo... Características del espacio conceptual euclídeo que obligaron a la creación de métodos aptos para manejar dicho espacio conceptual, porque los dados por la experiencia eran impotentes para dicho manejo. Método que no es otro que el hipotético-deductivo como algunos lo han calificado cuando más correcto es el nombre de método demostrativo o axiomático. Aunque, y aquí vuelve a interferir el mundo de creencias, la impotencia del hombre *le lleva al manejo* de unas construcciones geométricas, de puntos que no son puntos, de rectas que no son rectas..., pero *que «recuerdan» en cierta medida* los puntos, las rectas, las figuras del espacio conceptual.

He indicado, ése espacio eidético, de formas puras, es un espacio conceptual intrafigural, por lo que requiere del auxiliar de la construcción, construcción como mero auxiliar porque la clave se centra en dar la demostración —no la mera deducción— de las propiedades que se descubren en las figuras que se encuentran inmersas en dicho espacio. La construcción es inútil si no va acompañada de la demostración de todas y cada una de las etapas, con su justificación correspondiente. De ahí que la Geometría euclídea vaya ligada, como auténtico paradigma, al método axiomático.

Intrafigural, el espacio euclídeo es un espacio estático. No aparece el movimiento en él. Y cuando el movimiento se hace problema, su descripción, su manejo, requiere el concepto de función. Y es la revolución cartesiana, la «geometría analítica». Función y curva para expresar el movimeinto, creando nueva connotación al término «Geometría». En lugar de mantener el método euclídeo se prescinde de él —y en algún otro lugar he discutido el papel de la vuelta a los antiguos, al método axiomático en los coetáneos de Descartes—. Salvo Newton, que como buen neoplatónico distinguió con radical nitidez el espacio y el tiempo *absolutos —geométricos o conceptuales—* de los espacio y tiempo perceptivos, se llevó a una identificación del pretendido espacio *euclídeo con el representacional* y, más allá, se le identificó con el espacio de la «verdadera» realidad, con la naturaleza. Identificación que no hace cosa que anular el método con el que se tenía que desarrollar la geometría euclídea, porque no se hace preciso demostrar lo que es evidente, ni lo que se muestra como más claro que los principios de los que tiene que realizarse la demostración. Y son afirmaciones de los matemáticos enciclopedistas, entre los que ya se pierde totalmente el significado que el conjunto de postulados y primeros principios presentaba. A partir de entonces la geometría sintética se convierte en el mero juego de construcciones con regla y compás o, posteriormente, construcciones geométricas que algunos hemos sufrido y que en mi memoria represento por la magnífica colección de problemas de Petersen. Construcciones en las cuales el factor demostrativo euclídeo es nulo, aunque se pretenda cubrir con algunos barnices de justificación de pasos o de construcciones, pero en las cuales nunca se completaba dicha demostración porque nunca se especificaban, totalmente, los postulados de los que se partía, las definiciones intermedias, etc. Eran construcciones ciertamente muy concretas, como las maravillas de Mascheroni que estusiasmaban a Napoleón, pero que se encontraban tan alejadas del espíritu geométrico euclídio que el mismo Euclides necesitó de vindicadores, al modo de Saccheri.

Y precisamente una vuelta a Euclides y al espíritu geométrico es la que dieron los acusados de formalismo, desde Pasch a Hilbert pasando por Peano *y su escuela tras los esfuerzos de algunos geómetras* proyectivos de abolir cualquier llamada a la figura en beneficio de la componente demostrativa. Sistema completo de axiomas, que permite, a la vez, no sólo caracterizar el espacio euclídeo y en él una determinada geometría, sino todo un haz de ellas según los espacios que se vallan obteniendo por las modificaciones correspondientes de los axiomas de entrada. Todo un haz de geometrías diferentes, en espacios diferentes, aunque sean irrepresentables en el papel o el encerado, o en la imaginación sensorial del matemático. Pero la Geometría volvía a sus orígenes, a ser construcción conceptual, marginada al espacio perceptivo, incluso contrapuesta al mismo. Línea en la cual la primera obra de Peano, hace ya casi un siglo, con su introducción vectorial, marcará la ruta que todavía hoy sigue la Geometría.

Y en este sentido, y enlazando con la pregunta últimamente formulada, ¿se explicó alguna vez la Geometría euclídea? Si uno busca en sus recuerdos de estudiante, en los textos que se autotitulaban de Geometría, observa que en ellos se contenía una mrzcla de postulados en la primera lección, de imágenes y de construcciones geométricas y de frases como «en cuyo caso es evidente». Los sistemas de postulados nadie sabía si eran completos, pero tampoco importaba mucho: no se volvían a manejar... Se pretendía, además, que era una disciplina que ayudaba mucho a la imaginación y captación del espacio «real» porque ayudaba a «ver» en dicho espacio. Sólo contemplar las paredes del aula eliminaba tales pretensiones, o mirar las figuras que alguien trazaba en la pizarra cerrando alternativamente los ojos... Las rectas no eran rectas; los puntos no eran puntos nunca porque siempre eran gordos... Y si se pasaba a la Descriptiva, la primera afirmación que uno ha *escuchado era: «un punto son dos puntos; una recta,* dos rectas»... Los teoremas se enunciaban sin mucho rigor y, francamente, se demostraba como se podía. Lo cual era natural y hasta lógico, porque nadie decía qué era una demostración y cuáles eran las reglas de demostración que se manejaban para que como alumno uno las pudiera manejar... Se daba un texto, se repetía y lo que iba seguido de *dem.* era la demostración. Nadie decía en qué consistía una demostración a pesar de que parecía ser el personaje fundamental. Pero no necesito volver a mis recuerdos de años atrás. En gran medida todo sigue igual, aunque sin este tipo de geometría, porque es muy bonito afirmar «Quien dice matemática, dice demostración», y como luego no se dice qué es «demostración» resulta que quien dice afirmaciones de este tipo dice sinsentidos. (Y *aquí se encuentra una vieja cuestión,* que dejo para otra posible nota: el hecho de que una demostración matemática no es otra cosa que lo que algunos dicen que es una demostración matemática o, en otras palabras, que toda demostración matemática no estriba en otra cosa que en un acto social de aceptación —en lo que me encuentro de acuerdo con Yuri Manin—. Y con este problema, otro tópico: el de que la Geometría, su enseñanza —en el híbrido que he esquematizado— era una disciplina excelente para el aprendizaje y ejercicio del razonamiento. Quiero decir, todo alumno, sometido a teoremas como el de las tres perpendiculares, aprendía a razonar. Tema psicológico, qué sea el razonamiento, en el que no quiero entrar porque nadie me ha aclarado nunca, en los terrenos mateméáticos, qué sea un razonamiento.)

Desde luego, según sus declaraciones, lo que a Hobbes, a Espinosa, a Russell atrajo de la Geometría euclídea fue la existencia de proposiciones independientes a la experiencia y que podían demostrarse por los solos principios de la Lógica. Por supuesto, estos autores estudiaron directamente los *Elementos* de Euclides y no los textos que los demás sufrimos y hemos hecho sufrir en nuestra enseñanza. Pero a Euclides, a Euclides, por mucho que se haya dicho, no creo que lo hayan leído casi ninguno de los que defienden la vuelta a una pretendida geometría que *califican de euclídea.* Si lo leyeran es muy posible que atenuaran sus afirmaciones. De leerlo pasarían, creo, a los sistemas geométricos a lo Hilbert o, más *adecuados a la enseñanza, a lo Peano.* En otras palabras, a lo que de Geometría se está dando ahora, realmente, aunque admito que pudiera desarrollarse más, en detrimento de otras materias con las que ciertamente se sobrecarga a nuestros alumnos —y a nosotros como profesores—.

Creo que no es a Euclides a quien se quiere volver, sino a una Geometría mezcla de un atisbo de deductivismo y constructivismo concretos con regla y compás y con pretendidas ventajas de visiones espaciales. Pero aquí incide la problemática que he indicado como haz de creencias asociado al pensamiento. Que la construcción axiomática euclídea, conceptual, como paradigma, constituye una de las líneas maestras que orienta el pensamiento y la cultura occidental. Una tendencia iconoclasta absoluta. Tendencia contra la imagen, contra el papel de la memoria radical, que es sinestésica, a favor del papel analizador del lenguaje, con sus implicaciones racionalistas —y no sólo racional logicista, que hay muchos tipos de racionalidad—. En este sentido, a la geometría de problemas, de construcciones, le ha ocurrido lo mismo que a la Aritmética que sufrimos de niños, «viejos» problemas hoy desaparecidos de nuestra enseñanza. Se han convertido en juegos matemáticos o de entretenimiento. Han quedado marginados porque la tendencia iconoclasta occidental los ha marginado; tendencia que se refleja en esa ausencia de preocupación por la imagen conceptual a que antes hice referencia, con su fijeza asociada, así como en los sucesivos planes de enseñanza, pero que ningún nuevo plan puede hacer resucitar, como tampoco podía adaptarse a la sociedad la persona estudiada y analizada durante más de veinte años por Luria y que éste describe en su magistral *Pequeño libro de una gran memoria*.

Una vuelta a este tipo de ejercicios mentales, de construcciones geométricas, de problemas aritméticos, puede ser un elemento muy positivo para una enseñanza que se margine de lo que hoy día es el hacer matemático y, más en profundidad, el hacer del pensamiento cultural occidental. Constituiría un regreso a una línea no seguida desde siglos. Que valga la pena esa vuelta para empezar otras líneas de pensamiento y consecuente transformación social, quizá más positivas, es un elemento contrafáctico en el que no entro aquí. Lo que sí considero necesario es que al emitir certificados de defunción geométricos y los intentos de resurrección asociados, se tenga presente, muy claramente, que las añoranzas suelen ser peligrosas. Quiero decir, lo que no se puede pretender es una explicación de la teoría de la relatividad en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones mediante figuras y construcciones geométricas pictóricas en un encerado o papel. O se hace geometría de cuatro dimensiones —y ello exige una vuelta al método euclídeo, axiomático y el previo estudio de los espacios vectorial, afín...— o se hace figura imaginativa o construcción en una pizarra o papel; pero teniendo presente que el encerado o papel no es el espacio de cuatro dimensiones, el espacio de la teoría, que es irrepresentable, sino una sección del mismo. Puede hacerse, es claro, tanto una geometría n-dimensional como una labor de construcciones gráficas —o en aspecto recreativo o en aspecto de posterior aplicación a terrenos como el arquitectónico o el técnico—, pero siempre que se sea consciente de que son dos cosas distintas. Y aunque el término «Geometría» las ha cubierto a las dos, su campo contextual se ha venido delimitando hacia la aceptación algebrizadora y no sólo por una dinámica interna al mundo conceptual en el que se encuentra el pensamiento y la Geometría, sino por una dinámica externa impuesta por otras disciplinas —y he mencionado, en concreto, una teoría física—. Todo ello, y por la afirmación realizada antes de que sí se da un cierto tipo de Geometría, me conduce a la afirmación de que, actualmente al menos, la Geometría no ha muerto. Y también a que es posible potenciarla, en la línea auténticamente euclídea: demostrativamente. Y lo mismo me vale para un recuerdo a Euclides quien, si bien muerto, no ha muerto en el sentido euclídeo del término y no en el que se le dio a partir de la «ciencia nueva».