

# La colaboración y la cooperación asistida por ordenador en la Didáctica de las Matemáticas

*Melchor Gómez García.*

*Centro Superior de Estudios Universitarios LA SALLE. (UAM). Madrid.*

*Raquel Carrillo Cuevas*

*Colegio Obispo Perelló*

## Resumen

La aparición de las nuevas tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en el campo educativo, en concreto en la didáctica de las matemáticas, está ocasionando importantes modificaciones en la práctica docente. La tradicional clase de Matemáticas con pizarra, tiza y papel está pasando a ser un espacio ocupado también por equipos informáticos y conexión de banda ancha. Los libros de Matemáticas ya no hacen su trabajo en solitario, vienen acompañados de tutores informáticos y programas multimedia para el ordenador.

En la actualidad no puede pensarse en ordenadores aislados y las capacidades de éstos pasan a un segundo plano ya que lo que interesa es que el ordenador sea un vehículo de transporte y presentación de información en el momento y sitio donde sea necesaria. No hay informática, ni computación, ni telecomunicaciones sin redes. La información no debe estar contenida en el ordenador donde se trabaja o aprende, sino se debe poder viajar hacia ella con el ordenador.

La introducción de las tecnologías de la información y la comunicación colaborativas en el ámbito de la didáctica

de las matemáticas comporta un cambio de paradigma en su conceptualización y modificaciones en su desarrollo didáctico. Vamos a abordar diferentes aspectos relacionados, como: qué cambio de paradigma en la enseñanza y aprendizaje matemáticos ocasiona la tecnología, cómo se deberían conceptualizar los entornos virtuales de aprendizaje desde un punto de vista matemático, cómo mejorar la construcción del conocimiento matemático a través de medios tecnológicos o qué dudas se pueden formular alrededor de la calidad de la enseñanza colaborativa con soporte TIC.

## Palabras clave

Aprendizaje colaborativo, T.I.C. (Tecnología de la Información y la Comunicación), Didáctica de las Matemáticas, Resolución de problemas.

## Abstract

The appearance of new information and communication technologies (ICT) in the field of education, specially in the teaching of mathematics, is causing important changes in the teaching

practice. The traditional Mathematics class with the board, chalk and paper is becoming a space occupied also by computing equipment and broadband connection. The books on Mathematics do not function in isolation, they come along with computing tutors and multimedia programmes for the computer.

Nowadays we cannot think about isolated computers and their capacities are pushed to the background because the interesting thing is that the computer is a means of transport and presentation of information in the moment and place where it is necessary. There is neither computing nor computation nor telecommunication without networks. The information should not be contained in the computer where one works or learns, but one should be able to travel towards it with the computer.

The introduction of collaborative information and communication technologies in the field of Mathematics teaching implies a change of paradigm in its conceptualisation and modifications in its didactic development. We are going to deal with different related aspects such as: what change of paradigm in mathematic teaching and learning technology causes, how the virtual learning environments should be conceptualised from a mathematical point of view, how to improve the construction of mathematic knowledge through technological means or what doubts can be raised about the quality of collaborative teaching based on ICT.

### Key words

Collaborative learning, I.C.T. (Information and communication technologies), Teaching of Mathematics, Problem solving.

## Introducción

### 3.1 Conocimiento matemático

Para poder entender el planteamiento didáctico que vamos a proponer, deberíamos adoptar los siguientes supuestos iniciales sobre las Matemáticas.

- La matemática es una actividad humana que implica solución de problemas. En la búsqueda de respuestas o soluciones a estos problemas externos o internos emergen y evolucionan progresivamente las técnicas, reglas y sus respectivas justificaciones, las cuales son socialmente compartidas. La competencia matemática requiere familiaridad con los tipos de problemas y los recursos disponibles para su solución.
- La competencia matemática requiere dominio y fluidez en el uso de los recursos lingüísticos y operativos, es competencia comunicativa. En la actividad matemática se utilizan estos recursos lingüísticos y expresivos que desempeñan un papel comunicativo e instrumental.
- La matemática es un sistema de reglas (definiciones, axiomas, teoremas), que tienen una justificación fenomenológica y están lógicamente estructuradas. La competencia matemática requiere el dominio de los sistemas matemáticos disponibles y capacidades de resolver nuevos problemas (comprensión relacional).  
En síntesis podemos distinguir tres facetas básicas en el conocimiento matemático:
  - El componente práctico que comprenden situaciones-problema y técnicas de resolución.
  - El componente discursivo-relacional, formado por el sistema de

- reglas y justificaciones.
- El componente lingüístico, en el que se apoyan ambos componentes, por lo que el lenguaje matemático (en sus diversos registros) constituye un tercer componente sin el cual los otros dos no pueden desarrollarse.

El reconocimiento de la complejidad del conocimiento matemático debe llevarnos a reconocer también una complejidad para el logro de la competencia y comprensión matemática, las cuales no pueden ser concebidas como estados dicotómicos, esto es, se tiene o no competencia, se comprende o no se comprende un tema matemático. Se tratan más bien de procesos en progresivo conocimiento y mejora. (Godino, 1992).

La atención a estos tres aspectos o dimensiones de las matemáticas está en la base de la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1996), quien propone un diseño de situaciones de formulación, comunicación, validación e institucionalización como complementos imprescindibles de las situaciones de acción o investigación. El tipo de discurso realizado por el profesor y los alumnos es un aspecto central determinante de lo que los alumnos aprenden sobre matemáticas. Si el núcleo de la comunicación sólo se produce del profesor hacia los alumnos, de forma escrita a través de la pizarra, los alumnos aprenderán unas matemáticas distintas, y adquirirán una visión diferente de las matemáticas que si tiene lugar una comunicación más rica entre el profesor y alumnos y estos entre sí. Además, las situaciones de acción deben estar basadas en problemas genuinos que atraigan el interés de los alumnos a fin de que estos los asuman como propios y deseen resolverlos; constituyen un primer encuentro de los alumnos con los obje-

tos matemáticos implícitos, en el que se les ofrece la oportunidad de investigar por sí mismos posibles soluciones, bien individualmente o en pequeños grupos.

La Teoría de Situaciones Didácticas constituye una teoría de aprendizaje organizada de las matemáticas, esto es, una teoría de instrucción matemática en consonancia con los presupuestos epistemológicos y cognitivos expresados anteriormente. (Godino, 2002). Describe un entorno de aprendizaje potente en el que se presta atención al saber matemático puesto en juego en las tareas. Constituye una potencial ayuda para el logro de la competencia y comprensión matemáticas, como veremos posteriormente.

### **3.2. Aprendizaje en Matemáticas**

Partimos de que el aprendizaje se produce por adaptación al medio, a una situación concreta, y los conocimientos se adquieren por progresos relativamente discontinuos que suponen rupturas cognitivas, cambios de modelos implícitos y de concepciones. (Brousseau, 1989).

Esta concepción del aprendizaje se apoya básicamente en tres principios (Anthony, 1996):

- i) El aprendizaje es un proceso de construcción del conocimiento y no de mera retención y absorción del mismo.
- ii) El aprendizaje es dependiente del conocimiento previo del alumno, pues utiliza el conocimiento que ya posee para construir nuevo conocimiento.
- iii) El alumno es consciente de sus progresos cognitivos, y puede llegar a controlarlos y regularlos.

El aprendizaje resulta ser el proceso personal de construcción significativa del conocimiento, para lo que se necesita participación activa, en vez de una simple recepción de normas y conocimiento objetivado. (Bauersfeld, 1994).

En este marco surge la metáfora del desarrollo individual respecto al concepto aprendizaje: el desarrollo individual se basa en la participación de los alumnos en las actividades de la comunidad.

Nadie que se dedique a la didáctica de las matemáticas, en cualquiera de los niveles, dejaría de reconocer en la actividad de resolución de problemas una característica esencial, central: hacer matemática es, ante todo, resolver problemas.

Además, estaremos de acuerdo en que la resolución de problemas y el saber cómo comportarse en situaciones problemáticas constituyen un vehículo excelente para la formación de conceptos matemáticos. (D'Amore 1997).

### 3.3. Resolución de problemas y desarrollo de competencias

En los programas ministeriales se puede encontrar el tema "Problemas", y este tema tiene una justificación clara. El pensamiento matemático se caracteriza por la actividad de resolución de problemas y esto está en sintonía con la tendencia natural del niño a hacer preguntas y a buscar respuestas. Por consiguiente las nociones matemáticas básicas se apoyan y constituyen partiendo de situaciones problemáticas, que ofrecen la oportunidad de verificar qué estrategias resolutivas utiliza y cuáles son las dificultades que encuentra. ¿Cómo no compartir esta

posición? (D'Amore 1997).

La resolución de problemas utilizada como recurso metodológico puede contribuir poderosamente a desarrollar las capacidades de los estudiantes. En realidad la capacidad para resolver problemas englobaría a todos los demás, ya que cuando resolvemos problemas ponemos en juego buena parte de las capacidades deseables en un matemático. (García, 2002).

"Resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía previamente camino alguno, encontrar la forma de salir de una dificultad, de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado, que no se consigue de forma inmediata, utilizando los medios adecuados". (Polya, 1981).

Enumerando la lista de las capacidades de la inteligencia podemos encontrar: (Hofstadter, 1989).

- Responder a situaciones con flexibilidad.
- Sacar partido en circunstancias fortuitas.
- Encontrar semejanzas entre situaciones a pesar de las diferencias que puedan separarlas. Encontrar diferencias entre situaciones a pesar de las semejanzas que las unan.
- Sintetizar nuevos conceptos considerando viejos conceptos y uniéndolos de manera nueva.
- Proponer ideas nuevas. Modificar hipótesis.

En el campo de las matemáticas estas capacidades pueden desarrollarse mejor que de ningún otro modo por medio de la resolución de problemas. Los problemas tienen que ser vistos como situaciones que se resuelven mediante un proceso razonado en el

que se dan oportunidades a los estudiantes para que se cuestionen, experimenten, hagan conjeturas y ofrezcan explicaciones.

Esta es una notable paradoja de la matemática -observó el comentarista John Tierny-. No importa con cuánta decisión ignoren el mundo quienes la practican, constantemente producen mejores herramientas para entenderlo. Los griegos decidieron estudiar, por ninguna razón en particular, una curva llamada elipse, y dos mil años más tarde los astrónomos descubrieron que describía la manera en que los planetas se mueven alrededor del sol. (Hoffman, 2001).

#### **3.4. Creación colectiva de conocimiento**

La creación del conocimiento es un proceso personal que necesita de un diálogo solidario con los demás. Una dialéctica entre lo individual y lo colectivo. El diálogo es una herramienta imprescindible para una construcción democrática de los conceptos y algoritmos matemáticos, aunque el sistema funcione guiado por otras prioridades. (Ramírez, 2001).

Si el objeto fuera hacer que los discípulos pensaran, antes que hacer que acepten ciertas conclusiones, la educación se llevaría de modo completamente distinto: habría menos rapidez de instrucción y más discusión, más ocasiones de que los discípulos se encontraran animados a expresarse por sí mismos.

El interés por la didáctica de las matemáticas me lleva al interés por el diálogo, pues la relación entre ambos es estrecha. Las tradicionales clases magistrales no pueden convivir con él. ¿Cómo es posible que un profesor no

pueda decir nada sobre su alumnado después de dos meses de clase, más allá del número registrado en su libreta? (Cosa que en ciertos ámbitos educativos es demasiado frecuente, y más cuanto más edad tienen los alumnos, y no digamos el nivel universitario). No es cuestión de desinterés o metodología. Es ausencia de diálogo.

Los efectos del diálogo son fascinantes e inesperados. Pero se dan, así que hay que tener fe y echar la caña a ver si pican; a veces incluso sin saber muy bien qué cebo colocar, o incluso sin cebo.

Cuenta Holt: "Pienso en mis alumnos de 5º grado, enseñándome sus ejercicios de Aritmética y preguntando con ansiedad: ¿Están bien?. Me miran como si estuviese loco cuando les replico: ¿Tú qué crees?. Porque, ¿qué importa lo que ellos piensen? Lo correcto no tiene nada que ver con lo real, con la coherencia ni con el sentido común: lo correcto es lo que el profesor dice que es correcto; y la única forma de averiguar si algo está bien consiste en preguntárselo al profesor. Quizá el mayor de todos los daños que infligimos a los niños en la escuela es el de arrebatarles la posibilidad de juzgar la validez de su propio trabajo, privándoles así de la capacidad de emitir tales juicios o incluso de la creencia de que pueden emitirlos." (Holt, 1977).

Sin preguntas interesantes no hay diálogo. Con preguntas cerradas tampoco. El ejemplo más paradigmático de esta situación son esas inútiles y vacías entrevistas a futbolistas en las que el periodista incluye en su pregunta la respuesta. El jugador, quizá abrumado, suele empezar: "La verdad es que sí"(?).

Podría pensarse que el trabajo en

grupo favorece el diálogo, pero no es necesariamente así. Depende de los alumnos y alumnas que haya en la clase y de las relaciones establecidas entre ellos. Las posibilidades son múltiples, y según se plantee el funcionamiento de una clase el diálogo se verá más o menos favorecido. No hay que irse a las posiciones extremas, porque la realidad, como siempre, impone modelos mixtos. Se puede empezar trabajando individualmente y continuar, cuando la tensión de la resolución del problema lo haga necesario, colectivamente, bien mediante un diálogo dirigido o en grupos. (Ramírez et al, 1998).

El objetivo didáctico es la implicación de los estudiantes en lo que están haciendo, tanto si hablan como si leen, escriben o escuchan. Es lo que más adelante (apartado 5) denotaremos como devolución didáctica, en términos de Brousseau.

### **3.5. Interacción social y conflicto socio-cognitivo**

Desde un punto de vista interaccionista del aprendizaje, un punto fundamental del mismo son las interacciones y sus efectos positivos en el proceso educativo.

El saber contemplado como una construcción social mediada por factores sociocognitivos pone de manifiesto la importancia de los procesos que se utilicen en el aula para facilitar el contacto de los alumnos con el saber, posibilitando la deconstrucción del saber existente y su posterior reconstrucción por el sujeto que lo aprehende. Y es precisamente en este proceso de apropiación del saber donde las interacciones sociales tienen un papel fundamental. (Cesar, 1998).

El conflicto socio-cognitivo aparece, y de ahí su nombre, en las interacciones sociales entre individuos en las que se manifiesta un sistema de centraciones cognitivas opuestas que los individuos tienen que coordinar para resolverlo. El papel del conflicto socio-cognitivo en las construcciones cognitivas individuales ha sido puesto de manifiesto en numerosas investigaciones, en tanto que se trata de un conflicto estructurante fuente de cambios en el individuo. (Chamorro, 1995).

Provocar estos conflictos socio-cognitivos es de gran interés desde un punto de vista metodológico. La contradicción de puntos opuestos de vista es de mayor nitidez que la que proviene únicamente de hechos que un individuo confronta aisladamente. La ausencia de otro individuo con quien confrontarse podría llevar al individuo aislado a ignorar tal contradicción o incluso a pasar de un punto de vista al otro de forma oscilante sin resolver el conflicto. Se puede contrastar en diversos estudios de la psicología social, que se obtiene un mejor resultado de la coordinación de acciones entre individuos que de una coordinación individual en los procesos de elaboración del conocimiento.

Ya desde la psicología del desarrollo, con un enfoque contextual, se pretende un cambio del estudio "cognición contra individuo" a "cognición socialmente compartida". La cognición se contempla como una construcción intersubjetiva o contrato comunicativo, una co-construcción de significados social e institucionalmente situados. Aparece la ya mencionada metáfora del desarrollo individual respecto al concepto aprendizaje: el desarrollo individual se basa en la participación de los alumnos en las actividades de la comunidad.

Hay que destacar que para promover interacciones (entre profesor y alumnos, alumnos con alumnos) que permitan desarrollar estrategias de resolución, es necesario percibir cómo se negocian significados y qué papel juega éste aspecto en el establecimiento de interacciones.

Cuando se pretende promover interacciones entre iguales en el aula, llevando a los estudiantes a aprender a hacer conjeturas y a defender sus argumentos, es necesario que el contrato didáctico se vuelva más flexible, que los alumnos sientan que tienen tiempo para pensar, que sus razonamientos son apreciados, que no es un drama escoger una estrategia de resolución equivocada y después modificarla. Es preciso establecer un contrato didáctico en el que las preocupaciones formativas se superpongan a las evaluativas. (César, 1998).

Concretando más, profesorado y alumnado deben negociar unas normas que faciliten la participación de los alumnos en el proceso de interacción, es decir negociarán el contrato didáctico.

Cuando cada alumno de un grupo colaborativo se enfrenta a conjeturas y argumentaciones de un compañero de grupo, se ve obligado a un trabajo de descentración de sus propias explicaciones. Por otro lado, como también ha de explicar sus estrategias de resolución tiene que clarificarlas por sí mismo, lo que le lleva a darse cuenta de pasos que de otro modo no tomaría en consideración. Así el aprendizaje se vuelve más comprensivo y menos mecanizado.

En este marco, -entorno educativo de las matemáticas y con soporte informático y de comunicación - podemos

pensar que se establecen entre los alumnos y el profesor o de unos alumnos con otros, un tipo de relaciones que producen retroacciones. Tomando en consideración estos aspectos podemos dar la definición de interacción electrónica como el intercambio de mensajes electrónicos que tienen lugar entre dos o más personas que se influyen mutuamente intercambiando información y producen resultados que probablemente ninguno de ellos hubiera producido por separado. (Murillo, 2000).

En un sentido más amplio, la interacción por medios telemáticos entre todos los actores que participan en la actividad educativa se debe entender no sólo como puesta en contacto de deferentes elementos de un sistema informático o tecnológico, sino como una actividad sociocultural situada o actividad relacional y discursiva que se puede desarrollar en un determinado contexto virtual para favorecer (o no) un mayor aprendizaje del alumno. Esto es lo que se entiende por interacción virtual. (Barberá, 2002).

Existen estudios detallados de cómo se construye el conocimiento a través de las interacciones sociales. (César, 1997), (César, 1998), (Murillo, 2000).

Es necesario destacar el papel que juega el error. Los alumnos con la interacción con sus iguales pierden el miedo a explicar sus razonamientos y consecuentemente ganan capacidad para aportar soluciones y sus correspondientes argumentaciones; todo ello porque desdramatizan el error y éste pasa a formar parte del proceso de aprendizaje. En otras palabras, el error se usa como fuente de reflexión y como método de trabajo; y promueve y legitima el trabajo de descubrimiento del grupo.

En matemáticas existen fundamentalmente dos modalidades de funcionamiento de procesos interpersonales (Laborde, 1991). Según sea donde se haga:

- i) Problemas que tienen una dimensión social en sí mismos. Es el caso de los juegos de mensajes en geometría para describir y reproducir una figura conforme a un mensaje recibido, el uso de códigos y símbolos matemáticos -como unidades de medida, escrituras económicas-, es decir, las situaciones de formulación.
- ii) Problemas resueltos por un grupo de alumnos, al margen de que el problema tenga una dimensión social. Ello va a permitir a los alumnos confrontar sus estrategias con las de otros compañeros, favoreciendo así la descentración del individuo. Todo ello redundará en una más sencilla negociación en el rechazo o validez de una estrategia.

En ambos casos hay procesos sociales, en el primero son internos al problema y en el segundo externos.

Por último, aclarar que la interacción no es aplicable siempre a toda situación como un remedio milagroso. Determinadas tareas que demandan conocimientos muy lejanos aún para los alumnos, o que están muy automatizadas, no se resuelven mejor por el hecho de provocar una interacción social. (Chamorro, 1995).

### 3.6. A colaborar. Aprendemos matemáticas.

Desde un enfoque constructivista, el ajuste pedagógico mutuo que produce la interacción social -de la que hablábamos en el apartado anterior- nos permite interpretar gran cantidad de dimensiones y aspectos de los pro-

cesos generales de enseñanza y de aprendizaje en contextos virtuales. También nos permite abordar con perspectivas y aportaciones interesantes temas que han sido tópicos en los últimos años en educación con soporte tecnológico, como son la colaboración y la cooperación virtuales o los debates virtuales.

"El término conflicto socio-cognitivo pone el acento de manera excesiva en dos momentos del debate: el examen y la toma de consideración de posiciones contradictorias, y enmascara una condición indispensable para su buen funcionamiento: la cooperación de alumnos de cara a la construcción de un saber común verdadero" (Brousseau, 1990).

Lo que es más importante, todos estos efectos positivos en el proceso educativo que produce la interacción, son más beneficiosos cuando los estudiantes desarrollan un trabajo colaborativo (Bishop, 1996).

Un entorno colaborativo de aprendizaje es un entorno en el que:

- i) las tareas que se plantean son "abiertas"(con más de un posible camino de resolución o incluso con varias soluciones).
- ii) las actividades tienen varias fases: resolución del problema en pequeño grupo, informe, reflexión.
- iii) utilización de herramientas informáticas (TIC).

Usando la terminología de Hershkowitz, a un entorno de estas características se le denomina "entorno rico" (rich environment).

Si los alumnos trabajan en red (mejor con soporte informático) la colaboración se ve favorecida, y si los estudian-

tes trabajan de forma colaborativa se puede acometer un aprendizaje significativo. La colaboración para resolver una tarea se define como la construcción común de una solución, acompañada de un esfuerzo de los colaboradores para mantener una comprensión mutua del razonamiento a lo largo de toda la resolución. La cooperación corresponde a una división de responsabilidades y adjudicación de las tareas en las que cada participante adopta a priori las metas y los resultados de otros.

Por ello se usan cada vez más los métodos de enseñanza a partir del trabajo en grupos pequeños. Los grupos pequeños permiten a los estudiantes colaborar y trabajar juntos en un problema, facilitando así que puedan compartir conocimientos previos y estrategias. Los grupos pequeños también crean un contexto de aprendizaje de apoyo, no amenazador, para aquellos alumnos que quizás no son tan brillantes en matemáticas y que se sienten puestos a prueba al estar en la misma clase que aquellos que tienen un nivel más alto.

Algunos profesores de matemáticas no están suficientemente familiarizados con los métodos de trabajo colaborativo en grupos pequeños. Parece que se teme dejar que los alumnos discutan, colaboren, comparen ideas y elaboren productos conjuntamente. No obstante, cuando los profesores participan en cursos de formación permanente es así como prefieren trabajar. (Bishop, 2000).

Pongamos como último argumento un ejemplo bastante conocido en el ámbito matemático, que es una versión del "dilema del prisionero", formulado en 1950 por el matemático Alber Tucker, pionero en la teoría de juegos.

Un caco y su cómplice han entrado por la noche en un laboratorio rural y han robado la fórmula secreta de un revolucionario yogur con sabor a bacterias coliformes. La policía les da el alto a la salida del laboratorio, pero a los ladrones les da tiempo a ocultar la fórmula robada junto a un poste de teléfonos. Luego les detienen y les enjaulan en dos calabozos separados para que no puedan comunicarse. Uno de los guardias le esboza la situación al caco:

- *Mira, listo, lo mejor es que me digas dónde habéis escondido la formullta. Si tú cantas y tu colega no, saldrás libre y a él le caerán dos años.*
- *Un momento -responde el caco- ¿Y si él también confiesa?*
- *Entonces pringáis un año cada uno.*
- *Pero espere, espere, y ¿qué pasa si no confesamos ninguno de los dos? Sin prueba no hay delito.*
- *No, pero les calzo a los dos un multazo.*
- *¿Por qué?*
- *Por beber en la calle, mismo.*
- *Hombre, eso no está mal, pero claro, si yo no confieso y él sí, el tipo se va de rositas y a mí me caen dos años.*
- *Justamente, así que a cantar. ¿Tiene razón el guardia? ¿Le conviene cantar al caco? La situación ideal sería que ni el caco ni el cómplice confesaran, desde luego, porque así se irían los dos de rositas pagando una simple multa. Pero ¿se puede fiar el caco de su cómplice? Porque si no canta, pensando que él es un buen tipo y va a hacer lo mismo, y luego resulta que si canta, al caco le caen dos años y el maldito cómplice vuela y encima se lleva la fórmula, y por ahí si que no. Más aún, el cómplice estará pensando lo mismo en ese momento, seguro que el tío canta la traviata por lo que*



*podiera pasar y como el caco no le haga la segunda voz se cuece en la trena. Vaya problema endemoniado. Si al final iba a tener razón el guardia.*

Se trata de una paradoja porque el resultado más frecuente de una situación semejante será que los dos cómplices confiesen (cada uno por miedo a que lo haga el otro), cuando es obvio que lo mejor para los dos sería que ninguno lo hiciera.

La moraleja podría formularse así: "Hay veces que, incluso desde un punto de vista egoísta, más vale COOPERAR".

## Metodología

### 4.1 Fases

En la experiencia realizada hemos distinguido cinco fases (ordenadas en el tiempo), cuatro que son el núcleo del presente estudio y una quinta que está actualmente en desarrollo:

- i) Fase de formación y diseño  
En esta primera fase se concretó el planteamiento general del trabajo que se debía realizar -fines, objetivos, material, pasos a dar, etc -, y la elección de los centros que iban a participar. Se negoció el papel de cada uno y se organizó la formación previa sobre informática y comunicación para que la experiencia comenzara a caminar.
- ii) Fase de despliegue  
Mientras iba elaborando las actividades y las colocaba en el servidor del proyecto hemos ido por todos los colegios y hablando con todos los profesores que participaban en la experiencia, explicando "in situ" la herramienta que se iba a utilizar, así como las posibilidades de aprendizaje que ofrece y la orientación que

se le quería dar.

- iii) Fase de desarrollo  
Durante el último trimestre del año los alumnos han estado resolviendo las actividades propuestas, con envíos de preguntas, respuestas, réplicas, aclaraciones o soluciones. Además se ha apoyado a los profesores que durante la actividad lo han solicitado, y finalmente se les ha hecho una encuesta a los docentes.
- iv) Fase de optimización  
Con los datos obtenidos de las observaciones propias y de los profesores colaboradores, y las encuestas finales a los centros, se sugieren unos cambios y mejoras en el sistema, que en discusión con los programadores -algunos cambios eran técnicamente posibles y otros no- se han implementado en el navegador.
- v) Fase de distribución  
En la actualidad se está negociado la elaboración unos paquetes de contenidos curriculares en matemáticas para poner a disposición de todos los que se conecten a la página del proyecto, así como la utilización del sistema como herramienta de investigación en didáctica.

### 4.2 Actuación

En tres de los centros colaboradores, además de lo descrito anteriormente, se seleccionó a cuatro grupos de alumnos que desarrollaron las actividades diseñadas para el Navegador por triplicado, es decir:

- i) Primero resolvieron los tres problemas individualmente.
- ii) Luego resolvieron esos mismos problemas colaborativamente en la propia clase, en grupos de dos o tres.
- iii) Finalmente resolvieron los 3 proble-

mas usando el Navegador, interactuando los cuatro grupos de los tres centros.

#### 4.3 Elementos de valoración

Para analizar las actividades de estos alumnos hemos estructurado los datos según las siguientes cuestiones:

1. Siguió las instrucciones correctamente.
2. Llegó a conclusiones en los cuatro ejercicios.
3. Realizó correctamente los cuatro ejercicios.
4. Realizó correctamente el ejercicio 1 (solución única).
5. Realizó correctamente el ejercicio 2 (solución múltiple).
6. Realizó correctamente el ejercicio 3 (varias soluciones).
7. Realizó correctamente el ejercicio 4 (varias soluciones).
8. Número de soluciones correctas diferentes del ejercicio 1.
9. Número de soluciones correctas diferentes del ejercicio 2.
10. Número de soluciones correctas diferentes del ejercicio 3.
11. Número de soluciones correctas diferentes del ejercicio 4.

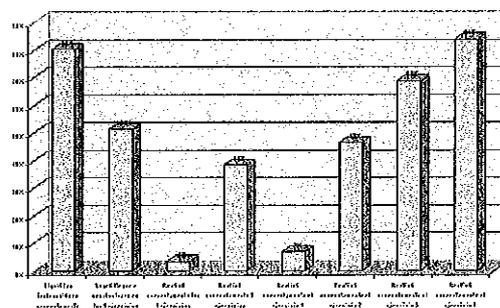
Todas ellas se han estudiado comparativamente en los tres momentos: resolución individual, resolución colaborativa en el aula, y resolución colaborativa con soporte TIC.

## Resultados

### 5.1 Trabajo individual

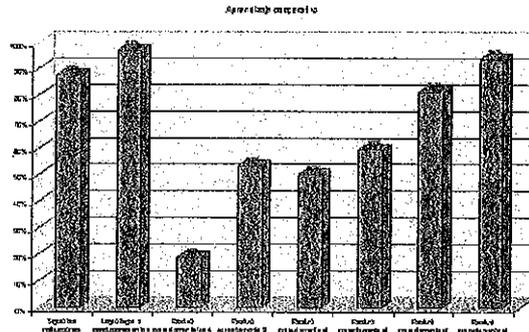
ITEM	SI	%	N	%
Siguió las instrucciones correctamente	69	80%	17	20%
Llegó a conclusiones en los cuatro ejercicios	44	51%	42	49%
Resolvió correctamente los cuatro ejercicios	3	3%	83	97%
Resolvió correctamente tres ejercicios	33	38%	53	62%
Realizó correctamente el ejercicio 1	6	7%	80	93%
Realizó correctamente el ejercicio 2	40	47%	46	53%
Realizó correctamente el ejercicio 3	58	69%	27	31%
Realizó correctamente el ejercicio 4	72	84%	14	18%

Trabajo individual



### 5.2 Trabajo colaborativo presencial

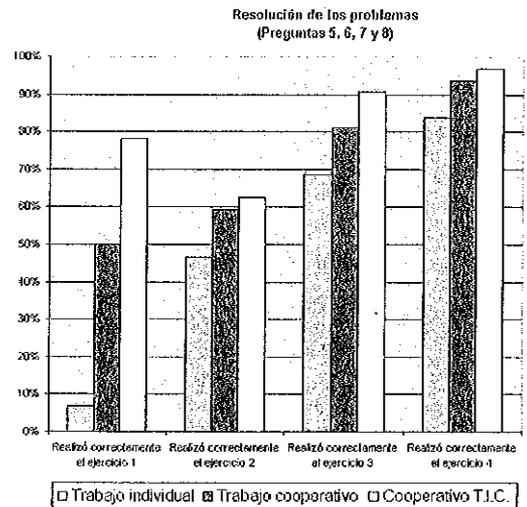
ITEM	S	%	N	%
Siguió las instrucciones correctamente	28	88%	4	13%
Llegó a conclusiones en los cuatro ejercicios	31	97%	1	3%
Resolvió correctamente los cuatro ejercicios	6	19%	26	81%
Resolvió correctamente tres ejercicios	17	53%	15	47%
Realizó correctamente el ejercicio 1	16	50%	16	50%
Realizó correctamente el ejercicio 2	19	59%	13	41%
Realizó correctamente el ejercicio 3	28	81%	6	19%
Realizó correctamente el ejercicio 4	30	94%	2	6%



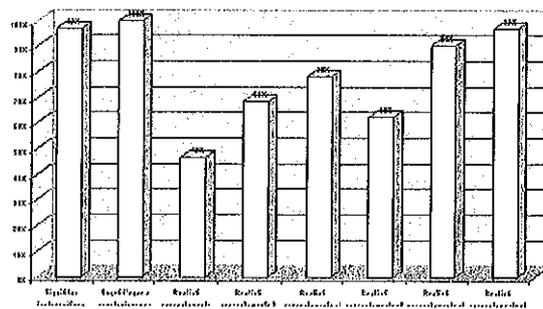
### 5.3 Trabajo colaborativo con soporte TIC

Nº de PREGUNTA	OPINIONES											
	TRABAJO INDIVIDUAL				TRABAJO COLABORATIVO				TRABAJO COLAB. CON SOPORTE TIC			
	SI	%	NO	%	SI	%	NO	%	SI	%	NO	%
Pregunta 1	69	80%	17	20%	28	68%	4	13%	31	97%	1	3%
Pregunta 2	44	51%	42	49%	31	97%	1	3%	32	100%	0	0%
Pregunta 3	3	3%	83	97%	6	18%	26	81%	15	47%	17	53%
Pregunta 4	33	38%	63	62%	17	63%	15	47%	22	69%	10	31%
Pregunta 5	6	7%	80	93%	16	60%	10	50%	25	78%	7	22%
Pregunta 6	40	47%	46	53%	19	59%	13	41%	20	63%	12	38%
Pregunta 7	69	69%	27	31%	26	81%	6	19%	29	81%	3	9%
Pregunta 8	72	84%	14	16%	30	94%	2	6%	31	97%	1	3%

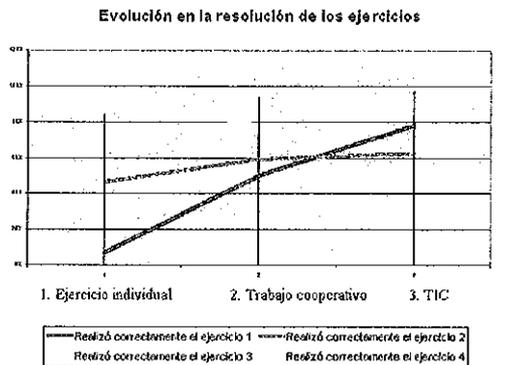
ITEM	S I	%	N O	%
Siguió las instrucciones correctamente	31	97%	1	3%
Llegó a conclusiones en los cuatro ejercicios	32	100	0	0%
Resolvió correctamente los cuatro ejercicios	15	47%	17	53%
Resolvió correctamente tres ejercicios	22	68%	10	31%
Realizó correctamente el ejercicio 1	25	78%	7	22%
Realizó correctamente el ejercicio 2	20	63%	12	38%
Realizó correctamente el ejercicio 3	29	91%	3	9%
Realizó correctamente el ejercicio 4	31	97%	1	3%



### TIC colaborativo



### 5.4 Resultados comparados



## Conclusiones

Valoramos tres parámetros:

Conclusiones alcanzadas por los alumnos.

El parámetro con balance más positivo es el que se refiere a las conclusiones alcanzadas por los alumnos en el proceso de solución de los problemas. En la actividad individual sólo la mitad de los ellos llega a conclusiones (correctas o no) en todos los problemas que se le plantean, lo que quiere decir que la otra mitad de ellos deja sin concluir alguna actividad (y probablemente no pase de una primera lectura). En la actividad realizada con TIC colaborativa el 100% de los alumnos llega a conclusiones en el 100% de los problemas (gráfica 14). En términos de la Teoría de Situaciones hay una mejora en la "devolución".

Esto quiere decir que ningún grupo de alumnos dejó sin intentar resolver ningún ejercicio, esto es, el "abandono casi inmediato" de un problema que me cueste resolver se redujo notablemente. (Habitualmente muchos de nuestros alumnos dejan la hoja en blanco cuando se les plantea un problema de dificultad para ellos). Esto constituye un claro indicador del interés que este tipo de entorno puede aportar a la resolución de problemas. El número de conclusiones aumenta ya espectacularmente cuando la actividad se resuelve colaborativamente frente a los resultados obtenidos del modo tradicional.

Los alumnos ganan en capacidad de generar conjeturas y argumentaciones, porque la interacción electrónica les ayuda a perder el miedo de explicar sus razonamientos y a desdramatizar los errores, que pasan a formar

parte de los pasos que pueden ocurrir durante el proceso de aprendizaje. Se puede decir incluso que se hacen más persistentes en sus tareas. Esta mejora se ve en general, tanto en alumnos menos competentes como en más competentes, según los profesores presentes en las aulas.

Soluciones correctas.

La evolución en la resolución correcta de los problemas planteados va mejorando cuantitativamente a lo largo de los tres entornos diferentes en que planteamos la actividad: el trabajo individual inicial, el trabajo cooperativo (en pequeños grupos o parejas) y es uso de las TIC colaborativas. Esto queda manifiesto en las gráficas 11, 12 y 12b, donde tanto en conjunto como por separado el porcentaje de resoluciones correctas aumenta en todos los casos.

Estos datos vendrían a indiciar que el aprendizaje colaborativo tiene mejores prestaciones (en términos de eficacia resolutoria), y dichas prestaciones mejoran si esta colaboración tiene soporte TIC.

Esta mejora supone por sí sola un claro beneficio en el aprendizaje de las matemáticas, al margen de explicaciones que justifiquen este aumento.

La experiencia ha mostrado que los alumnos pueden tener más éxito que el propio profesor para hacer entender ciertos conceptos a sus compañeros. Éstos están más cerca entre sí en lo que respecta a su desarrollo cognitivo y a la experiencia en la materia de estudio.

No sólo el compañero que aprende se beneficia de la experiencia. También el estudiante que explica la materia a

*Melchor Gómez García.  
Raquel Carrillo Cuevas*

sus compañeros consigue una mayor comprensión.

Comprensión matemática e interiorización de conocimientos.

Las modificaciones en la solución de un problema durante el proceso colaborativo con soporte TIC, provocan mayoritariamente la mejora global de la estrategia. Dos de cada tres de las modificaciones realizadas de un mismo problema (un poco más, el 67%) redundaron en una mejora cualitativa de la solución del mismo, y un 6% no produjo perjuicio -ni beneficio- en la misma. (Ver gráficas 24, 25 y 26).

En otros casos (minoritarios) también provocan que la solución final sea incorrecta cuando el alumno consiguió inicialmente que su solución fuese correcta. Esto tiene una lectura parcialmente negativa pues el resultado neto del problema tiene un empeora-

miento. Pero debemos saber considerar el valor didáctico que tiene desde un punto de vista matemático el hecho de que ciertos alumnos que resuelven correctamente un ejercicio - desde el punto de vista numérico o geométrico- no tienen comprendido ni asimilado el proceso, pues ante argumentaciones diversas (correctas e incorrectas), terminan tomando un camino erróneo. De otro modo, con las TIC colaborativas se pone de manifiesto de modo más claro qué procesos matemáticos se llevan a cabo comprensivamente y cuáles por imitación (y sin solvencia), pues esto últimos van a quedar destapados en los procesos de diálogo y argumentación.

La producción matemática conseguida es fruto de una reflexión generalizada (de casi todos) basada en el contraste constante. El grupo asume algunos elementos de responsabilidad del docente y se considera productor de conocimiento, no sólo participante.

**Direcciones de contacto:**

Melchor Gómez García  
Centro Superior de Estudios Universitarios La Salle  
C/. La Salle, 10  
28023 Madrid  
E-mail: melchor@eulasalle.com

Raquel Carrillo Cuevas  
Colegio Obispo Perelló  
C/. Virgen del Sagrario, 22  
28027 Madrid  
E-mail: raquelcarrillo@arraquis.es

## **Bibliografía**

- ANTHONY, G. (1996): "Active Learning in a Constructivist Framework" en *Educational Studies in Mathematics*, nº 31, pp. 349-369.
- BARBERÁ, E.; BADÍA, A.; MOMINÓ, J. (2002) Enseñar a aprender a distancia: ¿es posible?. (web en línea)  
[http://www.uoc.es/web/esp/art/uoc/0105018/ensapren\\_imp.html](http://www.uoc.es/web/esp/art/uoc/0105018/ensapren_imp.html)  
(Consulta: Junio 2002)
- BAUERSFELD, H. (1994): "Perspectives on Classroom Interaction" en *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, pp. 117-146.
- BISHOP, A. (1996): *International Handbook of Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht.
- BISHOP, A. (2000): "Enseñanza de las matemáticas: ¿cómo beneficiar a todos los alumnos?" en A. Bishop, J. Deulofeu, N. Gorgorió (coords.) *Matemáticas y Educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Graó. Barcelona.
- BROUSSEAU, G. (1989): *Fundamentos de didáctica de la matemática*. Universidad de Zaragoza. Zaragoza.
- BROUSSEAU, G. (1990): "Obstacles épistemologiques, conflicts socio-cognitifs et ingénierie didactique" en *Construction des savoirs*. Agence d'ARC. Québec.
- BROUSSEAU, G. (1996): *The theory of didactic situations*. Kluwer A. P. Dordrecht.
- CHAMORRO, C. (1995): "Los procesos de aprendizaje en Matemáticas y sus consecuencias metodológicas en Primaria" en *UNO*, n. 4, pp. 87-96.
- CÉSAR, M. (1997): "Students interactions in the maths class" en *Proceedings of 49 CIEAEM*.
- CÉSAR, M. (1998): "¿Y si aprendo contigo? Interacciones entre parejas en el aula de matemáticas" en *UNO*, n. 16, pp. 11-23.
- DAMON, W. Y PHELPS, E. (1989): "Critical distinctions among three approaches to peer education", en *International Journal of Education Research*, nº 58 (2), pp 9-19.
- D'AMORE, B. (1997): *Problemas. Pedagogía y Psicología de la Matemática en la actividad de resolución de problemas*. Síntesis. Madrid.

- GARCÍA, J.; MARTINÓN, A. (1998): "Interacción y construcción significativa del conocimiento: notas teóricas y una práctica educativa" en UNO, n. 16, pp. 85-100.
- GARCÍA, J. (2002): "Resolución de problemas y desarrollo de capacidades" en UNO, n.29, pp. 20-37.
- GODINO, J. (2002): "La competencia y la comprensión matemáticas: ¿qué y cómo se consiguen?" en UNO, n. 29, pp. 9-19.
- GODINO, J. (1992): "La formación matemática y didáctica de maestros como campo de acción e investigación para la didáctica de las matemáticas: El proyecto Edumat-Maestros" en M.C. Penalva, G. Torregrosa, J. Valls (Eds.): Influencia de la didáctica de las matemáticas a los distintos perfiles profesionales. Universidad de Alicante. Alicante.
- HOLT, J. (1977). El fracaso de la escuela. Alianza Editorial. Madrid.
- HOFFMAN, P. (2001): El hombre que sólo amaba a los números. Granica. Barcelona.
- LABORDE, (1991): What about a Learning Environment where Euclidean Concepts are manipulated with a Mouse ?. Springer Verlag. Berlin.
- MONEREO, C. ; DURÁN, D. (2002): Métodos de aprendizaje cooperativo y colaborativo. Edebé. Barcelona.
- MURILLO, J. (2000): Un entorno interactivo de aprendizaje con Cabri actividades, aplicado a la enseñanza de la Geometría en la ESO. (web en línea) <http://www.blues.uab.es/~ipdmc/Murillo/indice.htm> (Consulta: Agosto 2002)
- POLYA, G. (1981): Mathematical Discovery. On understanding, learning and teaching problem solving. Wiley and Sons. Inc. New York.
- RAMÍREZ, A. (2002): "El conocimiento: una creación colectiva" en UNO, n. 29, pp. 39-54.
- RAMÍREZ, A.; USÓN, C. (1998). Variaciones sobre el mismo tema. Una cita con la creatividad de clase de matemáticas. Proyecto Sur Ediciones. Granada.
- YACKEL, E. (1996): "Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics" en Journal for Research in Mathematics Education, n. 27, pp. 458-447.