COMPARACIÓN DE DISTRIBUCIONES POR FUTUROS PROFESORES

Pedro Arteaga y Carmen Batanero, Universidad de Granada, España

Blanca Ruiz, ITESM, México

RESUMEN

Este estudio tiene como objetivo analizar las estrategias usadas por los futuros profesores de educación primaria para comparar dos distribuciones de datos. Los resultados obtenidos en una muestra de 135 futuros profesores en una tarea abierta indican dificultades en la interpretación de medidas de posición central y escaso uso de las medidas de dispersión.

ABSTRACT

The aim of this study is to analyze the strategies used by pre-service primary school teachers in comparing data distributions. Results from a sample of 135 pre-service teachers in an open task suggest their difficulties in interpreting the central position measures and scarce use of spread measures.

Arteaga, P., Batanero, C., Ruiz, B. (2009). Comparación de distribuciones por futuros profesores. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 129-138). Santander: SEIEM.

INTRODUCCIÓN

Una de las capacidades básicas en estadística es leer, analizar, y hacer inferencias a partir de distribuciones de datos (Shaughnessy, 2007), una idea compleja que involucra las de variable estadística, valor, frecuencia, posición central y dispersión. Todos estos conceptos se incluyen en el nuevo Decreto de Enseñanzas Mínimas para la Educación Primaria en España (MEC, 2006) donde la estadística se estudia desde el primer ciclo (niños de 6 y 7 años). Será importante, por tanto, asegurar la comprensión adecuada de la idea de distribución y los conceptos citados por parte de los futuros profesores.

Continuando un proyecto en que analizamos la comprensión de los futuros profesores sobre los gráficos estadísticos (Batanero, Arteaga y Ruiz, 2009), el objetivo de este trabajo es analizar el uso e interpretación de medidas de posición central y dispersión en una muestra de futuros profesores de Educación Primaria (n=135) al comparar dos distribuciones.

INVESTIGACIONES PREVIAS SOBRE LA IDEA DE DISTRIBUCIÓN

El primer paso para comprender la idea de distribución es ver los datos como valores diferentes de la misma variable y ser capaz de construir una distribución que tenga un valor central dado (Bakker y Gravemeijer, 2004). Este paso no siempre se alcanza, pues al pedir a los estudiantes que escriban una distribución con una media o mediana dada, los estudiantes se limitan a repetir valores muy similares o equidistantes del promedio (Shaughnessy y Ciancetta, 2002).

Dos características básicas de las distribuciones son las medidas de posición central y dispersión, aunque algunos alumnos ni siquiera usan la media para comparar dos distribuciones (Konold, Pollatsek, Well y Gagnon, 1997). En lugar de ello, comparan directamente las frecuencias absolutas de algunos valores (sin tener en cuenta las relativas), incluso cuando las muestras eran de tamaño muy diferentes. Batanero, Estepa y Godino (1997) encontraron las siguientes estrategias correctas al comparar distribuciones: comparar las medias cuando los datos son independientes o reducir las dos distribuciones a una sola, restando los valores correspondientes, en el caso de muestras relacionadas, comparando luego la media con cero. También encontraron estrategias incorrectas como comparar valores aislados en las dos distribuciones.

Watson y Moritz (1999) y Watson (2001) definieron dos niveles de estrategias de los estudiantes al comparar dos distribuciones. En el primer nivel de su jerarquía, los estudiantes son capaces de comparar conjuntos de igual tamaño, mientras que en el segundo se comparan conjuntos de datos de diferente tamaño. Las estrategias de los estudiantes incluyen razonamiento proporcional, comparación de las gráficas o de las medidas de posición central de los dos grupos.

Otro requisito para comprender la distribución es la idea de variabilidad, que está siempre presente en los datos y tiene múltiples significados en estadística (Reading y Shaughnessy, 2004): variabilidad de resultados posibles en un experimento aleatorio; variabilidad en los datos recogidos; variabilidad en una variable aleatoria; variabilidad en las muestras o la distribución muestral. Sin embargo pocos estudiantes tienen en cuenta la variabilidad al comparar distribuciones.

En lo que sigue complementamos las anteriores investigaciones centrándonos en futuros profesores, un colectivo cuya comprensión de la distribución no ha sido analizada en profundidad. Analizamos el uso que hacen tanto de las medidas de posición central, como de las de dispersión al comparar dos distribuciones en una tarea abierta en que los datos se dan en forma de listado. Hacemos notar que en todas las investigaciones reseñadas las distribuciones que se comparan se dan en forma de gráfica o tabla ya construidas a los participantes, mientras que en nuestro estudio, los estudiantes han de realizar previamente este paso.

MÉTODO

Participaron en el estudio 135 futuros profesores (divididos en cuatro grupos). Los datos se tomaron durante una de las prácticas del curso de Currículo de Matemáticas en la Educación Primaria, en la cuál se propuso a los futuros profesores la realización de un proyecto en el que ellos mismos tomaron los datos necesarios.

La pregunta de investigación planteada en el proyecto (tomado de Batanero, 2001) a los futuros profesores fue evaluar las intuiciones del conjunto de estudiantes de la clase sobre los experimentos aleatorios. Para ello se realizó en la clase uno de los experimentos utilizados en la investigación sobre percepción de la aleatoriedad (ver, por ejemplo, Nickerson, 2002). El experimento consiste en que cada estudiante invente una secuencia de 20 lanzamientos de una moneda equilibrada (sin lanzarla realmente). Los futuros profesores realizaron individualmente el experimento, inventando una secuencia de 20 lanzamientos (secuencia simulada) y anotaron los resultados en una hoja de registro, escribiendo C para cara y + para cruz. A continuación lanzaron realmente la moneda anotando los resultados en la segunda parte de la hoja (secuencia real). Se pidió a los estudiantes que contasen el número total de caras en cada una de las dos secuencias y al finalizar la clase el profesor proporcionó a los estudiantes una hoja de datos que contenía para cada alumno el número de caras de las secuencias real y simulada (Ver datos obtenidos en uno de los grupos en la Tabla 1).

Alumno	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Simulada	7	10	11	10	11	10	11	13	8	11	11	10	12	10	11	10	12	9	12	10	10	7	9	10	11	10	12	10	11	13	11	12
Real	7	15	14	9	13	8	11	9	12	12	12	10	11	11	11	12	11	7	14	8	10	6	9	13	9	8	11	11	11	10	10	10

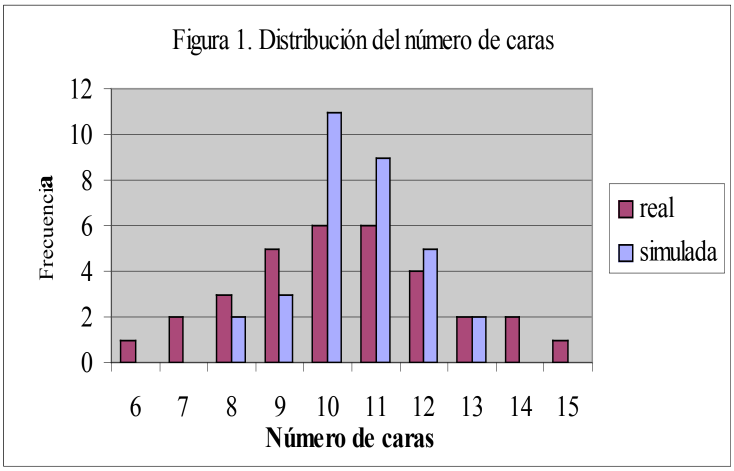
Tabla 1. Número de caras en secuencias reales y simuladas al lanzar 20 monedas

La tarea propuesta consistió en analizar individualmente los datos presentados en la Tabla 1 y producir un informe escrito, en el que debían comparar las distribuciones del número de caras en las secuencias real y simulada y justificar en base al análisis de los datos si la clase en su conjunto tenía o no buenas intuiciones sobre el azar. Se dio libertad para usar los gráficos o estadísticos que se consideraran pertinentes.

En la Tabla 2 presentamos los estadísticos del número de caras en las dos distribuciones y en la Figura 1 su representación conjunta. Se espera que los estudiantes calculen alguna medida de tendencia central y dispersión y las comparen. También se esperan observen que los valores de las medidas de tendencia central son muy similares y en consecuencia los alumnos han tenido buena intuición respecto al promedio del número de caras al lanzar 20 veces la moneda. Por otro lado, la mayor variabilidad del número de caras en las secuencias reales indica que la intuición respecto a la dispersión es pobre y se tiende a producir secuencias aleatorias con menor variabilidad a la esperada teóricamente. En lo que sigue analizamos el uso de las medidas de tendencia central y dispersión en esta tarea, mientras que los gráficos producidos en una muestra menor de estudiantes (101) fueron analizados en Batanero, Arteaga y Ruiz (2009).

	Simulada	Reales
Media	10,4	10,4
Mediana	10,5	10
Moda	10	10,11
Varianza	2	4,3
D. Típica	1,4	2,1
Mínimo	8	6
Máximo	13	15
Rango	5	9

Tabla 2. Estadísticos de las dos distribuciones



RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Estadísticos calculados

De un total de 135 estudiantes, 127 calculan algún estadístico, lo que indica una primera aproximación a la idea de distribución en los estudiantes, en términos de Bakker y Gravemeijer (2004), pues pasan del dato aislado a un resumen estadístico del conjunto de datos. En la Tabla 3 vemos que el estadístico calculado con preferencia es la media (110) o moda (97); la mediana es calculada por 88 estudiantes. En general el cálculo de las medidas de posición central es correcto, lo que indica un buen dominio de los algoritmos de cálculo, aunque aparecen algunos errores: por ejemplo 12 estudiantes calculan mal la media mostrando errores de cálculo o falta de ponderación; para el cálculo de la mediana fueron 26 alumnos los que cometieron errores como no ordenar los datos, no resolver el caso de indeterminación o no tener en cuenta la frecuencia al calcular la mediana; fueron cuatro estudiantes los que calcularon erróneamente la moda al no tener en cuenta el caso de bimodalidad. Estos errores coinciden con los ya señalados en estudiantes de secundaria en investigaciones previas como la de Cobo (2003).

	Correcto	Incorrecto	Total
Media	98	12	110
Mediana	62	26	88
Moda	93	4	97
Rango	60	6	66
Otra medida dispersión	43	0	43

Tabla 3. Estadísticos calculados por los estudiantes (n=135)

Hemos encontrado algunas concepciones erróneas, explicitadas en las soluciones. En el siguiente ejemplo, se confunde la variable en observación (número de caras en las diferentes secuencias producidas por cada estudiante, en la que el máximo fue 12) con los sucesos del experimento (cara y cruz), al calcular la moda:

Moda = Son las caras porque su número máximo es 12, mientras que el número máximo de cruces es de 11. (Alumno CE)

Un alumno confunde valor máximo que toma la variable con la moda:

La moda en la secuencia simulada es de 13 caras y en la real de 15 caras (Alumno SC)

Otro error fue no tener en cuenta la frecuencia en el cálculo de la mediana, considerando tan sólo los diferentes valores obtenidos de la variable y tomando su punto medio, lo que sería equivalente a considerar como mediana el centro del rango, error encontrado en Mayén (2006) en su estudio sobre comprensión de los medidas de posición central.

El uso de medidas de dispersión es menor y la mayoría de los que lo usan calculan el rango (66), 60 de ellos correctamente. Algunos estudiantes toman incorrectamente los mismos valores del máximo mínimo y rango en la secuencia real y simulada o muestran concepciones erróneas sobre el rango, como el siguiente estudiante, que usa las frecuencias, en vez de los valores de la variable para calcular el rango:

Gracias a las frecuencias también he podido restarle a la mayor la menor, es decir, obtener el rango (Alumno CG)

Unos pocos (43) calculan además alguna otra medida de dispersión, como la desviación típica varianza o coeficiente de variación. Casi todos han hecho el cálculo con la hoja Excel, lo que explica que no haya errores. Es evidente que las medidas de dispersión son menos intuitivas para los futuros profesores, coincidiendo con los resultados de Borim y Coutinho (2008), quienes indican que el significado de la varianza y la desviación típica es muy difícil para los estudiantes para profesor.

Uso de estadísticos en la comparación

Por otro lado hemos analizado (Tabla 4) como utilizan los alumnos los estadísticos calculados para comparar las distribuciones, encontrado que muchos alumnos se limitan a calcularlos sin interpretación o comparación posterior, lo que coincide con lo señalado por Konold, Pollatsek, Well y Gagnon (1997).

Tipo de comparación	Frecuencia
Comparan medias	41
Comparan modas	27
Comparan medianas	13
Comparan dispersión	40
Comparan valores aislados	19
Comparan solo sus datos	17
Indican lo que esperan	18
No comparan	26

Tabla 4. Uso de los estadísticos en la comparación entre los alumnos que calculan algún estadístico (n=127)

Respecto a las medidas de posición central, 41 comparan las medias (37 correctamente), 27 las modas (23 correctamente) y 13 las medianas (11 correctamente). Algunos estudiantes presentan los estadísticos pero no comparan (26), y de ellos algunos indican lo que esperan sin comparar (18), siguiendo sus creencias previas, como el siguiente caso:

> *En un principio el nº de caras y de cruces a priori debería ser el mismo, pero debido a que esto es un proceso aleatorio, las secuencias de caras y cruces en realidad es imprevisible (Alumno ES).*

Otros alumnos comparan sólo sus propios datos (17), al no haber comprendido el propósito de la práctica, tratando de evaluar únicamente sus propias intuiciones. Por ello se limitan a comparar el número de caras que obtuvieron en las dos secuencias, sin hacer referencia a los estadísticos; generalmente manifiestan que una buena intuición supone poder acertar el experimento:

> *Secuencia simulada: número de caras=10. Secuencia real: número de caras 11; he acertado 13 veces.* (Alumno EL)

Diecinueve alumnos comparan valores aislados de la variable o porcentajes de valores aislados; cuatro de ellos comparan únicamente los máximos y mínimos en cada distribución. Esta estrategia apareció en la investigación de Estepa y Batanero (1995), quienes la explican por la existencia de una concepción local de la asociación estadística, consistente en juzgar la asociación entre dos variables considerando tan sólo una parte de los datos y no el conjunto completo. Por ejemplo el siguiente alumno compara los valores aislados de la variable en las secuencias real y simulada, además muestra que una buena intuición supondría acertar en la realización del experimento:

> *Se puede decir que la mayoría de la gente no ha acertado el número de caras en la secuencia simulada y en la real; aunque hay un par de personas que sí* (Alumno CB)

Sólo 40 estudiantes utilizan las medidas de dispersión (34 de ellos el rango y seis la desviación típica o la varianza). A continuación se presentan dos ejemplos en que los alumnos han sido capaces de apreciar la diferencia de dispersión en el número de caras:

> *El número de caras reales que ha obtenido el grupo es mucho más variable, que en la simulación. Para poder realizar esta afirmación hemos utilizado el estudio del rango* (Alumno JI)

> *Por último, en lo que se refiere a la desviación típica, en el número de caras hay mayor dispersión en la secuencia real que en la simulada* (Alumno CC)

Conclusiones sobre el problema planteado

Para resolver el problema planteado en el proyecto, además de comparar las distribuciones, los estudiantes han de interpretar los resultados en el contexto del problema (traducir estos resultados a lo que indican respecto de las intuiciones de los estudiantes). Es precisamente este último paso (puesta en relación del resultado con la pregunta planteada) el que ha causado más dificultad, por la falta de familiaridad de los futuros profesores con proyectos estadísticos y actividades de modelización.

En la Tabla 5 observamos que la obtención de la conclusión es la tarea más difícil para todos los estudiantes, siendo sólo una tercera parte de los estudiantes que calculan algún estadístico los que obtienen una conclusión, al menos parcial. Solo cinco estudiantes completan las conclusiones de que por un lado, el grupo tiene buena intuición respecto al promedio de número de caras y por otro las intuiciones sobre la variabilidad de los fenómenos aleatorios es pobre en los estudiantes.

Conclusión	Frecuencia
Correcta	5
Parcialmente correcta	34
Incorrecta o no concluye	88

Tabla 5. Conclusión obtenida por los estudiantes que calculan algún estadístico (n=127)

A continuación reproducimos la respuesta de uno de los estudiantes que obtiene una conclusión completa.

> *La media de la simulada y la real se asemeja,.... la mediana y la moda dan los mismos datos. En cuanto al número de caras las intuiciones del aula fueron aproximadas a la realidad, pero no del todo, ya que la desviación típica nos indica que los datos se distancian en la dispersión. (Alumna CG)*

Treinta y cuatro estudiantes llegan a una conclusión parcial, debido bien a que sólo comparan las medidas de posición central sin tener en cuenta la dispersión, o al contrario. Un ejemplo de conclusión parcial es el siguiente ejemplo:

> *La intuición de mis compañeros observando la tabla del nº de caras es buena, ya que los valores más repetidos en la secuencia simulada coinciden con los valores de la secuencia real: 10 y 11 son las más repetidas. La media de las dos secuencias es alrededor de 10, por lo tanto creo que la intuición es buena.* (Alumno TG)

El resto no llega a una conclusión o bien hace una conclusión incorrecta. Los estudiantes no siempre conectan los resultados del trabajo matemático con la situación problemática, es decir, no ven las implicaciones de lo obtenido en el análisis estadístico sobre las intuiciones de los estudiantes.

> *Comparando los datos me he dado cuenta que son muchos los resultados entre los compañeros que coinciden, pero aún así, sigo pensando que es mera casualidad, porque en la simulada hemos puesto lo que hemos querido.* (Alumno EL)

Otros estudiantes, aún cuando conectan el modelo matemático (distribución) con el problema real, fallan en la obtención de conclusiones debido a que suponen que una buena intuición ha de corresponder a obtener los mismos resultados en las secuencias real y aleatoria. En la siguiente respuesta, el estudiante muestra una concepción correcta del azar (no se puede prever) y otra incorrecta al tratar de evaluar el número de coincidencias o la diferencia de valores obtenidos en cada estudiante en los experimentos, en lugar de comparar directamente las distribuciones de las variables. Es decir, este estudiante compara caso a caso no utilizando la distribución al hacer la comparación.

> *Partiendo del estudio de los datos, se podría decir que en valores absolutos, la previsión del grupo no ha sido demasiado desafortunada. Un juego de azar es imposible de prever con total exactitud, pero las aproximaciones sumadas a los aciertos son mayores a las previsiones muy alejadas del resultado real.* (Alumno LG)

Falta en otros la capacidad de análisis para detectar las diferencias, lo que les lleva a concluir que los resultados en las dos secuencias son similares, como en el siguiente ejemplo:

> *Como conclusión, podemos ver que los resultados son prácticamente los mismos tanto en la real como en la simulada, de lo que podemos deducir que lo real y lo simulado es muy parecido ya que lo que te inventes puede ser prácticamente igual a lo real.* (Alumno AC)

CONCLUSIONES

Al comparar las distribuciones un porcentaje importante de estudiantes de la muestra ha calculado algún estadístico, principalmente estadísticos de posición central (media, mediana y moda) y en menor medida de dispersión, lo que indica un primer paso en la comprensión de la distribución, según Bakker y Gravemeijer (2004).

El cálculo de estadísticos es, en general, correcto, con pocas excepciones, aunque también aparecen algunos de los errores descritos en la investigación de Cobo

(2003) y Mayén (2006), pero con mucha menor frecuencia que en aquellos estudios. Aunque el cálculo de las medidas de posición central fue sencillo, la mayoría de los estudiantes se limita a calcularlos, pero no los interpreta ni los usa para la comparación, aunque en caso de compararlos, la comparación es correcta. Menos aún usan la idea de dispersión, aunque el cálculo del rango lo hacen correctamente, pareciendo que aunque se comprende el procedimiento de cálculo, los alumnos no llegan a captar el significado de la dispersión ni su utilidad en la comparación de dos distribuciones. Los resultados confirman los hallados por Konold, Pollatsek, Well y Gagnon (1997) y Batanero, Estepa y Godino (1997), aunque las tareas propuestas en estas investigaciones fueron cerradas (las distribuciones se dan gráficamente), mientras en nuestro caso son más abiertas.

En resumen, aunque hay un inicio de comprensión del concepto de distribución, esencia del razonamiento estadístico, no llega a ser completo en una parte de los futuros profesores, pues el razonamiento sobre la variabilidad, que es otro de los componentes esenciales para comprender la distribución (Reading y Shaughnessy, 2004), es difícil para la mayoría. En consecuencia, sería necesario atender a estos problemas en la formación de los profesores de educación primaria, pues una mejora de la educación de los niños pasa por la formación del profesor.

Agradecimientos: Este trabajo forma parte del proyecto SEJ2007-60110 (MEC - Feder), Grupo PAI FQM126 y beca FPU AP2007-03222.

BIBLIOGRAFÍA

Bakker, A., Gravemeijer, K. (2004). Learning to reason about distribution. En J. Garfield y D. Ben Zvi (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp 147-168). Dordrecht: Kluwer.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística.* Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Batanero, C., Estepa, A., Godino, J. D. (1997). Evolution of students' understanding of statistical association in a computer-based teaching environment. En J. B. Garfield y G. Burrill (Eds.), *Research on the Role of Technology in Teaching and Learning Statistics. 1996 IASE Round Table Conference* (pp. 183-198). University of Minnesota: IASE.

Batanero, C., Arteaga, P., Ruiz, B. (2009). Statistical graphs produced by prospective teachers in comparing two distributions. Trabajo presentado en *CERME, 6, Sixth Conference of European Research in Mathematics Education.* Lyon: ERME.

Borim, C., Coutinho, C. (2008). Reasoning about variation of a univariate distribution: a study with secondary mathematics teachers. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference.* Monterrey: ICMI e IASE. CD-ROM.

Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Estepa, A., Batanero, C. (1995). Concepciones iniciales sobre la asociación estadística. *Enseñanza de las Ciencias,* 13(2), 155-170.

Konold, C., Pollatsek, A., Well, A., Gagnon, A. (1997). Students analyzing data: Research of critical barriers. En J. B. Garfield y G. Burrill (Eds.), *Research on the role of technology in teaching and learning statistics.* Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.

Mayén, S. (2006). *Comprensión de medidas de posición central en estudiantes mexicanos de Bachillerato*. Trabajo de Investigación Tutelada. Universidad de Granada.

MEC (2006). *Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación primaria*.

Nickerson, R. S. (2002). The production and perception of randomness. *Psychological Review.* 109(2), 330-357.

Reading, C., Shaughnessy, J. M. (2004). Reasoning about variation. En J. Garfield y D. Ben-Zvi (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 201-226). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 957-1009). Greenwich, CT: Information Age Publishing, Inc., and NCTM.

Shaughnessy, J. M., y Ciancetta, M. (2002). Students' understanding of variability in a probability environment. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics: Developing a statistically literate society,* Cape Town: International Statistics Institute. CD- ROM.

Watson, J. M. (2001). Longitudinal development of inferential reasoning by school students. *Educational Studies in Mathematics, 47,* 337-372.

Watson, J. M., Moritz, J. B. (1999). The beginning of statistical inference: Comparing two data sets. *Educational Studies in Mathematics, 37,*145-168.