FUNCIONAMIENTO DIDÁCTICO DE LOS GRÁFICOS DE FUNCIONES

Eduardo Lacasta Zabalza
Universidad Pública de Navarra-Nafarroako Unibertsitate Publikoa

El gráfico cartesiano es un instrumento de enseñanza muy utilizado en la introducción de las principales funciones elementales y en los primeros conceptos del análisis: crecimiento, límite, continuidad, derivada, etc. Pero al mismo tiempo no es un objeto que se enseñe: no constituye un capítulo de un manual de matemáticas.

El gráfico de una función está generalmente considerado por los profesores como un instrumento bastante útil y universal para obtener rápidamente conocimientos sobre las funciones: se utilizan como ilustración y a veces incluso como el objetivo del estudio de las matemáticas.

Esta buena opinión del gráfico ¿proviene de su carácter espacial? Existe un conjunto de ideas sobre la eficacia de la imagen en la transmisión de conocimientos que se puede resumir en el refrán “una imagen vale más que mil palabras”.

¿Piensan los profesores que el gráfico juega un papel heurístico y permite manipular algunos conceptos matemáticos sin que sea necesario definirlos completamente?

¿Es la elección de este instrumento un éxito? Antes de intentar contestar estas y otras preguntas relativas al funcionamiento de los gráficos, veamos someramente la evolución de la enseñanza del cálculo, con especial atención a funciones y gráficas.

Partiremos de la reforma de los años sesenta y setenta de las matemáticas, que afectó a gran número de países y entre ellos a España. Esta reforma estuvo en principio poco relacionada con la enseñanza del cálculo, pero ésta se vio afectada por una dirección formalista y conjuntista y por el predominio algebraico. Los autores de aquella reforma no pudieron prever cómo podrían los alumnos beneficiarse de un enfoque estructural, qué elementos de cultura matemática eran necesario para ello y tampoco se dieron cuenta de las restricciones que introdujo el hecho de abordar una enseñanza masiva y no solamente para las élites.

1. REACCIONES A LA REFORMA CONJUNTISTA. LA REFORMA EDUCATIVA EN ESPAÑA

Entre las críticas a la enseñanza del cálculo de los setenta podemos citar la introducción de las nociones básicas sin el planteamiento de un problema, o a partir de problemas muy lejanos del estudiante, la construcción lineal de los conceptos, sin ninguna conexión con la resolución de problemas, el empleo muy precoz del lenguaje formalizado y una enseñanza muy centrada en el discurso del profesor.

Si bien es cierto que la reforma de los setenta plantea por primera vez la cuestión de la adaptación de las enseñanzas matemáticas a los descubrimientos de la epistemología genética piagetiana, estas críticas también apuntan la necesidad de buscar un equilibrio más satisfactorio entre las exigencias que impone el saber matemático y las exigencias que impone el funcionamiento cognitivo del estudiante.

A partir de 1983, se comienza a realizar en España, en diversos centros de Enseñanzas Medias y EGB, reformas experimentales. Primero se hicieron en centros coordinados por el MEC; posteriormente, se fueron incorporando otros centros bajo la supervisión de las Comunidades Autónomas con competencias en materia de Educación (Andalucía, Cataluña, etc...).

Estas reformas experimentales recogían las iniciativas de amplios sectores de profesorado, implicados en la innovación curricular y metodológica en el aula.

Los cambios producidos en estos centros, la elaboración de nuevos materiales y la introducción de nuevos métodos docentes han sido elementos dinamizadores de la última Reforma Educativa.

En 1987, se publica el Libro Blanco que recoge las propuestas ministeriales de modificación del sistema educativo.

Las enseñanzas mínimas o aspectos básicos del currículo para todo el Estado se establecieron por el MEC en 1991. En el caso de la Matemática, sobre estas disposiciones han ejercido una notable influencia distintas corrientes ya extendidas por países de Europa y EEUU. Mencionamos entre ellos los siguientes estudios:

- El informe Cockcroft, publicado en el Reino Unido, resultado de los trabajos de una Comisión de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas en las escuelas de primaria y secundaria de Inglaterra y Gales.

- El informe de Kuwait, en 1986, promovido por el ICMI aporta un amplio debate sobre la Matemáticas en Primaria y Secundaria en la década de los 90. Este documento fue discutido en un Simposio celebrado en Valencia cuyas conclusiones publicó la Editorial Mestral en 1988.

Algunas de las proposiciones deducidas de estos estudios iban en la línea de modificar las relaciones entre la teoría y las aplicaciones, organizando la enseñanza alrededor de algunos problemas importantes. Asimismo se planteó una atención a la teoría limitada únicamente a lo necesario, con base en niveles de formalización accesibles a los estudiantes.

Los objetivos generales del área de matemáticas relacionados con funciones y gráficas que se plantearon entonces para la ESO pretenden desarrollar en el alumnado, entre otras, las capacidades siguientes:

- Incorporar al lenguaje y modos de argumentación habituales las distintas formas de expresión matemática (.., gráfica, ..) con el fin de comunicarse de manera precisa y rigurosa.

- Utilizar técnicas sencillas de recogida de datos para obtener información sobre fenómenos y situaciones diversas, y para representar esa información de forma gráfica y numérica y formarse un juicio sobre la misma.

- Identificar los elementos matemáticos (..., gráficos, ...) presentes en las noticias, opiniones, publicidad etc. analizando críticamente las funciones que desempeñan y sus aportaciones para una mejor comprensión de los mensajes.

Los contenidos que afectan a nuestro tema de estudio vienen recogidos en las enseñanzas mínimas bajo el epígrafe "interpretación y tratamiento de la información".

El Decreto que se publicó en 1991 establece como conceptos (estructuras conceptuales) *mínimos* los siguientes: *características globales de las gráfica* s (continuidad, crecimiento, periodicidad, tendencia) y el *estudio de fenómenos y gráficos* (lineales, cuadráticos, exponenciales y periódicos).

Los procedimientos –en cierta manera se corresponden con la definición de Cockroft de estrategias generales, destrezas y hechos– que fijan las enseñanzas mínimas son: la utilización e interpretación del lenguaje gráfico haciendo uso del vocabulario y los símbolos adecuados, la utilización de expresiones algebraicas para describir gráficas sencillas, la obtención de datos de forma individual y colectiva utilizando diversas fuentes y recursos y la detección de errores en la utilización del lenguaje gráfico y estadístico.

Las actitudes fijadas por el Decreto de mínimos se refieren a la valoración de la incidencia de los nuevos medios tecnológicos, a la curiosidad por investigar relaciones entre magnitudes o fenómenos y al interés y valoración crítica del uso de los lenguajes de naturaleza matemática (gráfico, estadístico, etc.) en informaciones y argumentaciones.

Con carácter general se fija el siguiente criterio: *interpretar relaciones funcionales dadas en forma de tabla o a través de una expresión algebraica sencilla y representarlas utilizando gráficas cartesianas.*

Conocidas las enseñanzas mínimas, el Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) y las Comunidades Autónomas con competencias en materia educativa han elaborado y publicado los correspondientes currícula de la ESO. Debe recordarse que estas disposiciones constituyen un primer nivel de concreción, ya que son los profesores quienes deberán elaborar las programaciones de aula para adaptar el currículo a las características de sus alumnos y a la realidad de cada centro.

El MEC y la mayor parte de las autonomías mantienen en un solo bloque la interpretación, representación y tratamiento de la información.

Ya en uno, ya en dos bloques, los contenidos de funciones y gráficas en todas las autonomías vienen agrupados de la siguiente forma:

- Conceptos: Función como relación entre magnitudes variables, formas de representación de una función: verbal, tablas, gráfico o fórmula, características globales de las gráficas, estudio de funciones elementales: lineales, proporcionalidad, cuadráticas, inversas, exponenciales y periódicas.

- Procedimientos: *Utilización de distintos lenguajes: gráfico, expresión algebraica, tablas.*

- Algoritmos y destrezas: *Construcción de gráficas a partir de una descripción verbal, una tabla o una fórmula sencilla, construcción de tablas a partir de una gráfica o una fórmula, obtención de expresión algebraica a partir de una gráfica o una tabla, en casos sencillos.*

- Estrategias generales: *Análisis de las características globales de una gráfica.*

- Actitudes de apreciación por la matemática: Reconocimiento y valoración de da la utilidad del lenguaje gráfico

Entre las conexiones con otros bloques podemos señalar: la proporcionalidad como función y como gráfica y resolución gráfica de ecuaciones. (La proporcionalidad aritmética se estudia en el bloque de números. En las diversas secciones de contenidos se hace referencia a esta conexión).

- Procedimientos: Manejo de tablas y gráficos para efectuar cálculos de proporcionalidad. Resolución gráfica de sistemas de dos ecuaciones con dos variables.

A pesar del carácter comprensivo de la ESO, en el último curso los alumnos podrán elegir entre dos opciones diferentes A y B.

La opción A, de carácter más utilitario que formalista, está orientada al fomento de capacidades relacionadas con la aplicación de las matemáticas. Los contenidos serán los referidos a lectura e interpretación de gráficos.

En la opción B, más formalista, deberá insistirse más en los aspectos constructivos que en los interpretativos. Además de interpretar gráficas, el alumnado será capaz de construirlas, con cierta precisión, en una gama más amplia de relaciones funcionales. Un contenido específico es la tasa de variación media.

Esta síntesis pone bien a las claras el especial hincapié en el lenguaje gráfico, en comparación con orientaciones anteriores.

2. POSIBLES REPERCUSIONES DE LA INNOVACIÓN PUESTA EN PRÁCTICA EN LA ACTUALIDAD

Los "Estándares curriculares" de la NCTM (1991) y "El lenguaje de funciones y gráficas" del SHELL CENTRE (1990) han ejercido gran influencia en el diseño curricular de la ESO, así como en los desarrollos y aplicaciones realizadas en el entorno del proceso de reforma e innovación educativa. En concreto, en la “construcción de gráficas a partir de una descripción verbal, una tabla o una fórmula sencilla”, en la “construcción de tablas a partir de una gráfica o una fórmula”, en la “obtención de expresión algebraica a partir de una gráfica o una tabla, en casos sencillos” se ve bien patente la influencia de los trabajos del SHELL CENTRE.

La propuesta innovadora del SHELL CENTRE, una realización que ha puesto en práctica las investigaciones de JANVIER, provocó en algunos profesores de matemáticas un replanteamiento global de la enseñanza de los gráficos y de las relaciones funcionales en la enseñanza secundaria.

Sin embargo, nos parece conveniente avanzar algunas reflexiones sobre las posibles repercusiones de su uso generalizado.

Si realizamos una lectura de las publicaciones de ejemplos y modelos del nuevo diseño curricular relativos a nuestro objeto de estudio, observaremos la repetición y proliferación de algunas experiencias como "mirando gradientes" u otras análogas del SHELL CENTRE. La experiencia de gradientes es sumamente instructiva pero, asimismo, compleja. Se trata de establecer una relación entre la altura y el volumen de agua de botellas de formas diversas, incluso raras. Actividad que si con recipientes de formas "regulares" ya crea problemas a los alumnos, les es sumamente difícil con botellas "irregulares". Convendría reflexionar sobre la conveniencia de una reproducción aislada de la actividad, sin estar integrada en un proceso más amplio, con actividades inicialmente más simples, que el alumno pueda controlar. Amparo MORENO (1981) realizó una experiencia que tituló "Un redondel con muchas cosas dentro, eso es un conjunto". Esta experiencia venía a mostrar cómo los diagramas de Venn, que en su origen se habían comenzado a utilizar como medio didáctico para introducir la teoría intuitiva de conjuntos se habían convertido en objeto de enseñanza (BROUSSEAU denomina a este fenómeno, por el que la forma sustituye al fondo, "deslizamiento metadidáctico"). ¿No existirá, tal vez, el riesgo de convertir los ejemplos y actividades, ciertamente interesantes, mencionados en el párrafo anterior en nuevo objeto de estudio?

Muchas de las actividades que se proponen son relaciones entre magnitudes variables. Nos preguntamos si el hecho de acudir, con excesiva frecuencia, a experiencias del mundo físico – de la vida real y, por tanto, "en condiciones no-ideales"– es una ayuda o más bien crea nuevos obstáculos. No es aventurado pensar que los problemas de comprensión del fenómeno físico en sí dificultan el establecimiento de una relación entre las magnitudes variables, intervinientes en ese fenómeno. Volveremos a tratar este punto más adelante.

A pesar del esfuerzo realizado en la movilización del profesorado y su participación en las nuevas propuestas curriculares, es justo pensar que la influencia de este movimiento es mucho mayor en los programas que en la posición real del profesorado y alumnado. Debemos contar con las resistencias del sistema educativo, con la inercia del profesorado, formado en su mayoría en el "boom" de la Matemática moderna, ante la multiplicidad de tareas que se le proponen.

En el centro de todas estas observaciones están las preguntas que plantea Michèle ARTIGUE (1995): ¿Qué aprenden en realidad los alumnos? ¿Cómo estructuran un campo de saberes que la enseñanza no estructura por ellos? ¿Qué concepción se forman de las nociones que manipulan sin recurrir a definiciones precisas? ¿Qué influencia tienen sobre estas concepciones las actividades que se realizan con calculadoras y, en particular, con las calculadoras gráficas?

En el mismo trabajo, Michèle ARTIGUE señala, basándose en trabajos estadounidenses cómo el mundo de la investigación y el de la innovación están lejos de establecer vínculos estrechos. En concreto, se ha publicado que la mayoría de los proyectos inscritos en el área de la renovación del cálculo en los Estados Unidos se han aplicado de forma independiente de los trabajos de investigación existentes.

El problema de la efectividad de las aportaciones innovadoras es el de la obtención de hechos confiables. Los proyectos innovadores por lo general se ponen en práctica gracias al entusiasmo de sus difusores. La necesidad de convencer hace que se deje a un lado la importancia de un análisis riguroso de los efectos de la innovación. Esto se ve particularmente en los casos concernientes a la tecnología informática y, en concreto en lo que a función y gráfico respecta, en el uso de las calculadoras gráficas y programas de ordenador. Se sobreestima la potencia del instrumento introducido, mientras que los problemas de su gestión se subestiman. Para ARTIGUE, *“Se cae entonces en el peligro de un discurso ingenuo, donde se toma con frecuencia como análisis cognitivo y didáctico el hecho de que esas herramientas se constituyan en un buen catalizador para forzar la evolución de las prácticas pedagógicas de los profesores y para comprometerlas con un enfoque más constructivista del aprendizaje”.*

3. ALGUNOS ENFOQUES DISTINTOS PARA TRATAR EL FUNCIONAMIENTO DEL GRÁFICO CARTESIANO DE FUNCIONES

¿Qué resulta de la abundante actividad de investigación e innovación? ¿Sobre cuántos problemas se ha avanzado en realidad? ¿Cuáles son las preguntas que permanecen abiertas? Es difícil hacer una síntesis por múltiples razones:

Las investigaciones se han desarrollado con enfoques que difieren por el peso distinto que se le ha otorgado a las dimensiones epistemológica, cognitiva y didáctica, y también por los marcos teóricos que las sustentan. Ello supone una *riqueza* en el conjunto de las aportaciones, pero también un serio *problema de comunicación* entre quienes profundizan en líneas de investigación distintas, que hacen difícil su comprensión por las grandes diferencias de planteamiento teórico, que tiene complejas razones de índole científica, pero también cultural.

La problemática que se plantea en torno al lenguaje gráfico en general se puede englobar en el problema general de la representación, que desde el inicio de la didáctica de las matemáticas se ha enfocado con ayuda de la lingüística en el estudio de significantes y significados, de las metáforas, los problemas que generan la homonimia y sinonimia, estudiados por Josette ADDA (1987), etc.

En didáctica de las matemáticas ha habido abundantes trabajos sobre la visualización en el cálculo, siendo especialmente importantes los que podemos englobar en el “pensamiento matemático avanzado”. En nuestro país, AZCÁRATE y DEULOFEU (1990) expresaban la confianza en la potencia del lenguaje gráfico, que era una posición dominante en la época, de esta manera: “Los dos lenguajes de mayor abstracción y por tanto más difíciles de interpretar, la gráfica y la fórmula algebraica, permiten obtener una visión general y completa de la función estudiada, tanto cuantitativa como cualitativa... La diferencia entre ambos lenguajes es evidente : la gráfica permite ‘ver’ las características globales de la función también determinables a partir de la ecuación, pero mucho más difíciles de interpretar...”.

Claude JANVIER (1983) expresaba esta confianza, diciendo que los gráficos podían servir de “soportes intuitivos” de una utilización eficaz de conceptos matemáticos. En 1981, en su intervención en las JAEM, proponía un método de enseñanza de funciones a través de los gráficos que juzgaba claramente exitoso. Pero en trabajos más recientes, se ha puesto de manifiesto que la utilización del lenguaje gráfico lleva consigo también ciertas dificultades. Por ejemplo, el mismo JANVIER (1993), encuentra dificultades específicas en la interpretación de los gráficos de funciones con variable temporal –las “crónicas”–, que analiza en términos de obstáculo epistemológico.

UN ENFOQUE SEMIOLÓGICO

Varios autores de didáctica de las matemáticas se han ayudado de la semiología. En el enfoque semiológico de BERTIN (1973), la representación gráfica es un lenguaje visual, consistente en un sistema de signos monosémico y se puede definir como la parte racional del mundo de las imágenes.

Un sistema es monosémico cuando el conocimiento de la significación de cada signo precede a la observación de los signos ensamblados. Un gráfico no se concibe más que si se ha precisado la significación única de cada signo.

¿Cuál es la diferencia entre lo gráfico y lo simbólico? En el gráfico, la palabra precede siempre al signo, mientras que en lo simbólico el signo el signo precede a la palabra o tiende a hacerlo; el signo se vuelve símbolo para los que son capaces de hacer la analogía pertinente. Ahora bien, lo simbólico tiende a la monosemia del signo y se concibe por la naturaleza esencialmente polisémica de la forma y el color, que cada uno puede interpretar a su modo, hasta que emerge el simbolismo o si no, hasta que se adquiere la costumbre de una convención. Lo simbólico se debe a las leyes de la imagen figurativa.

Esta precisión sobre las diferentes leyes de la representación gráfica y simbólica ayudan a entender lo que GLAESER plantea en "Matemáticas para el alumno-profesor": mostrando la fotografía de un cadáver disecado y un esquema del aparato digestivo, tal como lo muestran los libros de texto concluye que "lo abstracto es más simple que lo concreto". Se podrían hacer muchas matizaciones a esta afirmación tan general, pero en lo que al gráfico cartesiano de las funciones respecta, el código de la representación es esencial en matemáticas, pero no suele figurar de manera explícita en la enseñanza, porque se considera como evidente (ADDA 1987).

UN ENFOQUE COGNITIVO: LA ARTICULACIÓN DE REGISTROS DE RAYMOND DUVAL

Las gráficas son representaciones semióticas, como también lo son las figuras geométricas, la escritura algebraica o la lengua. Esto quiere decir que el representante visible (en el caso de las gráficas que nos ocupan, líneas trazadas en el plano cartesiano) tiene leyes de organización que le son propias y que le permiten representar otra cosa (funciones u otros objetos matemáticos). La forma de las representaciones es el representante (el trazo) y el fondo es el contenido, lo representado (en este caso, la función). La forma cambia según el sistema semiótico utilizado, lo que origina lo que DUVAL llama distintos *registros de representación* para un mismo objeto, a los que corresponden distintas tipos de tratamiento cognitivo. En nuestro caso, una misma función puede tener como registros distintos el dibujo de su gráfica, su fórmula algebraica, una tabla numérica, una descripción textual.

DUVAL hace hincapié en la importancia de la forma frente al contenido, que no sería para él un mero soporte para las representaciones mentales (un "soporte intuitivo", en palabras de Claude JANVIER), puesto que la forma comanda el tipo de tratamiento que se puede efectuar. Pero, a pesar del interés especial de las representaciones gráficas, que permiten tratamientos más "intuitivos", no basta con "ver" para distinguir entre forma y contenido. La importancia de la forma de las representaciones y de las representaciones semióticas en la actividad cognitiva matemática sólo se puede observar en el *paso de un* *registro de representación a otro.* Esta afirmación viene sostener el acierto de Claude JANVIER al proponer las “traducciones” y valida también en cierto modo el “juego de marcos” (“Jeux de cadres”) de Régine DOUADY.

Pero tanto en los trabajos de JANVIER como en los de DUVAL, aparecen importantes matizaciones que nos hacen cuestionar algunas aportaciones de la innovación plasmadas en materiales curriculares la validez de la profusión de actividades de cambio de registros de representación y de actividades matemáticas basadas en actividades reales o problemas de física, biología, etc.

Advierte DUVAL que la forma de una gráfica cartesiana no tiene carácter analógico con las variaciones de los fenómenos que representa o describe, lo que es especialmente evidente en el caso de fenómenos físicos, biológicos o económicos. Asimismo señala que un aprendizaje de las representaciones gráficas efectuado en la perspectiva de una coordinación de registros, sobrepasa el mero dominio de las representaciones gráficas y está condicionado por la comprensión del proceso matemático. Esta comprensión exige no solamente que no se confunda un objeto y su representación, sino también que se pueda cambiar fácilmente de registro de representación.

En lo que a la lectura global de los gráficos de funciones respecta y en particular en los casos en los que aparecen diversas magnitudes (tiempo, espacio, velocidad, etc.) que diversos autores señalan como especialmente importante frente a la lectura punto a punto, más comúnmente realizada por estudiantes de distintos niveles, en DUVAL (1993) se señala que el aprendizaje de la interpretación local no se puede hacer al margen de un estudio puramente matemático. Cuando el gráfico representa magnitudes heterogéneas, además del proceso de lectura global, existe el de interpretación de las magnitudes presentes.

4. FUNCIONAMIENTO DIDÁCTICO DEL GRÁFICO CARTESIANO DE FUNCIONES

Vamos a estudiar el funcionamiento didáctico de los gráficos cartesianos de funciones. ¿A qué nos referimos? Al funcionamiento de estos gráficos en situaciones didácticas; es decir, en situaciones constituidas por un conjunto de relaciones, específicas del saber (en este caso la función), y de condicionamientos recíprocos que ligan enseñante y enseñado.

Por contraposición al funcionamiento didáctico, la teoría de situaciones establece que el funcionamiento a-didáctico supone que el alumno puede hacer frente, con la ayuda de lo que ha aprendido, a problemas en los que la intención de enseñar un saber está oculta; es decir, que el alumno tiene la posibilidad de interpretar como nuevas situaciones sus relaciones con el saber, con quien enseña y con el medio, y de darles respuestas apropiadas.

No nos referiremos pues a la utilización a-didáctica del gráfico, en la que el alumno actúa de manera autónoma, sin intervención del profesor, frente a los problemas en los que entra en juego el gráfico cartesiano de funciones, ni a los diferentes usos que profesor y alumno pueden hacer del gráfico.

Un elemento crucial que aporta este enfoque teórico de la teoría de situaciones es pues tener en cuenta los comportamientos de alumnos y profesores *específicos del saber en cuestión.*

De acuerdo con el planteamiento que acabamos de exponer, vamos a estudiar el funcionamiento didáctico de los gráficos apoyándonos en encuestas planteadas a profesores y alumnos.

5. PROPIEDADES DIDÁCTICAS Y PRESENTACIÓN ESCOLAR DE LOS GRÁFICOS

Los procesos de enseñanza y aprendizaje se bloquean fatalmente; es decir, que llega un momento en el que el profesor espera que los alumnos sepan algo y éstos no responden. Todo lo que permita salir de este bloqueo o evitarlo es ventajoso. ¿Es el gráfico un elemento privilegiado para salir del bloqueo? Examinemos el papel del gráfico directamente en la relación didáctica y las condiciones de esa relación.

SABERES Y CONOCIMIENTOS COMUNES COMO BASE

La relación didáctica crea la necesidad de postular una base de saberes y conocimientos comunes. Para enseñar es necesario que haya un ambiente en el que el repertorio del alumno y del profesor se suponga que es el mismo. Si no hay un acuerdo en este sentido entre profesor y alumnos, no puede haber relación didáctica. Este repertorio común puede estar constituido por: a) saberes antiguos, b) conocimientos espontáneos (la lengua, conocimientos espaciales) y c) una historia común anterior, que permite evocar elementos conocidos.

Los profesores necesitan este campo común con el alumno, para disminuir la diferencia que hay entre ellos. Necesitan incluso afirmar que no hay diferencias y que la lectura directa de las funciones facilita esta convención. O sea, que si se estudian las propiedades de las funciones a través del gráfico, el alumno las "verá", mientras que si hay que explicar esas propiedades matemáticamente, los alumnos y el profesor se sitúan en campos distintos y no están en igualdad de condiciones. En este supuesto, no se puede negar la evidencia ni se la puede ignorar. El hecho de tener un repertorio común permite exigir a los alumnos la posesión de algo que se supone que se ha construido directamente a partir de ese repertorio.

En su relación con los alumnos, el profesor puede utilizar principalmente tres recursos:

a) La lengua. Las palabras utilizadas pueden llegar a ser complicadas, pero la lengua es común y el profesor de matemáticas no se plantea su uso como el objeto de una construcción específica.

b) La razón.

c) La evidencia; y, en nuestro caso, la evidencia es la imagen, lo que se ve: "vemos que la función es creciente…".

Cuando un alumno al que se le muestra la imagen sobre la que tiene que encontrar lo que parece evidente, dice “pues yo no lo veo”, la respuesta del profesor es que no está poniendo interés. Lo que se ha enseñado, lo que se ha mostrado, no se puede ignorar; así pues, el profesor exige un saber que considera común, como si fuese una construcción directa, como si se diese el aprendizaje instantáneo, por el sentido (“insight”): “como lo ves, ya sabes qué es el crecimiento de una función”.

Cuanto más amplio e incluso universal es este campo de saber común, más posibilidades existen de intervención y de corrección, lo que es una ventaja para el profesor.

EL EFECTO DE LA MULTIPLICACIÓN DE LAS REPRESENTACIONES

El que existan varias representaciones de los objetos matemáticos brinda la posibilidad del juego de marcos, que puede ayudar al profesor. Cuanto más numerosas son las representaciones diferentes, más oportunidades tiene el profesor de tratamiento y explicación del objeto y de efectuar un *cambio de marco,* en expresión de Régine DOUADY, o una *traducción* para Claude JANVIER, apoyándonos en el *cambio de registro* de Raymond DUVAL, incluso aunque el alumno no se lo espere. De esta manera, al profesor no le molesta trabajar en varios marcos, aunque a veces sean muy conocidos por el alumno, porque tiene la impresión de que está trabajando el *sentido* y que aumenta las opciones que tiene el alumno para poder expresarse.

Así pues, dispooniendo de varios marcos, el profesor tiene la impresión de que su capacidad de explicación aumenta, de que acumula razones para que el alumno sepa y de que se puede dirigir a los alumnos con más soltura; por consiguiente, tiene una sensación de seguridad. El hecho de saber si el alumno participa o no de esos nuevos campos de representación es otra cuestión. Cuando se produce un bloqueo y el alumno no entiende y sigue sin entender en una nueva representación, e incluso el cambio de representación no ayuda más al alumno, el profesor continúa teniendo esa sensación de seguridad.

La preocupación por ofrecer al alumno representaciones distintas puede incluso provocar intervenciones desafortunadas en manuales escolares. El hecho de situar un vehículo en un diagrama espacio-tiempo hace pensar en éste como un desplazamiento físico. Es muy probable que un alumno de 11 años no pueda distinguir los distintos códigos propuestos y no podrá separar las dos representaciones.

Las presentaciones icónicas refuerzan la ilusión del perfil topográfico explicada por KERSLAKE (1977), según la cual, alumnos de 13, 14 y 15 años interpretan una gráfica espacio-tiempo que consta de tramos rectos crecientes y decrecientes enlazados, como una trayectoria o un perfil topográfico: “Es un móvil que sube una cuesta, luego baja y luego vuelve a subir”. J. ADDA (1987) cita una encuesta hecha por el Instituto Nacional de Investigaciones y Documentación Pedagógica de Francia, en la que muchos futuros maestros interpretaban un diagrama velocidad-tiempo de una manera similar.

EL EFECTO DEL ALEJAMIENTO DE LAS REPRESENTACIONES CON RELACIÓN AL OBJETO REPRESENTADO

Las representaciones alternativas pueden ser reformulaciones, explicaciones, modelos… La taxonomía imaginada por BLOOM (1972) da clasificaciones en relación con los objetivos de la educación.

El gráfico es un modelo rico y muy alejado del objeto matemático al que representa (la función): la manera gráfica y la algebraica de resolver un problema suponen tratamientos de la información muy distintos. Este alejamiento tiene algunas virtudes; el contrato didáctico es distinto para ambos tratamientos desde distintos puntos de vista y los conocimientos y los saberes tratados son distintos en ambos casos.

Cuanto más diferentes son los marcos que utilizamos, mayor es lo que podríamos llamar la superficie significante, mayor es el campo semántico y tanto mejor es subjetivamente la situación para el profesor, porque piensa que tiene más posibilidades de fijar la comprensión del alumno y el saber común de base. Así pues, el gráfico facilita la decisión didáctica aislada en un momento dado.

DISTINTAS FORMAS DE PRESENTACIÓN ESCOLAR DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

LA PRESENTACIÓN "OSTENSIVA"

Desde que Harrison RATSIMBA-RAJOHN (1977) presentó por primera vez el concepto de "ostensión", varias investigaciones en didácticas de las matemáticas han mostrado que existe una práctica de enseñanza que responde a las características de la "presentación ostensiva". Daremos la definición general y externa a la didáctica de las matemáticas que proporciona Umberto ECO: "La ostensión tiene lugar cuando un objeto o un acontecimiento dado, producto la naturaleza o de la acción humana (intencionalmente o no), es seleccionada por un individuo y designar la clase de objetos a la que pertenece".

La práctica ostensiva se lleva a cabo en la enseñanza bajo la hipótesis de que la información es captada por el alumno (sin acciones ni interacciones). Las principales características de esta presentación son:

a) El objeto se pone simplemente en presencia del alumno o ni siquiera se muestra realmente: es evocado solamente.

b) El objeto presentado es un elemento de una clase de equivalencia en lugar de ser la propia clase. La clase podría obtenerse, ya sea olvidando algunos caracteres específicos, ya sea relacionándolos, dando contraejemplos o ejemplos alternativos. El contrato didáctico de la práctica ostensiva supone que los medios al alcance del alumno deben bastar para determinar el objeto matemático (es decir, la clase), a través de la noción efectivamente presentada.

LA PRESENTACIÓN EXTENSIVA

Consistiría en dar la colección de los objetos que corresponde a la definición que se pretende enseñar. Únicamente es válida con clases finitas y es una presentación exhaustiva de todos los objetos que corresponden a la definición.

LA PRESENTACIÓN INTENSIVA, CON LA AYUDA DE UNA DEFINICIÓN MATEMÁTICA

Consiste en definir el objeto, no a través de los que es, de su esencia, sino a través de la estructura a la que pertenece.

DISTINTAS ILUSIONES EN LA PRÁCTICA DOCENTE

LA ILUSIÓN "OSTENSIVA"

Consiste en pensar que *basta con mostrar,* con enseñar y, si el alumno no responde a las exigencias del profesor, si se produce un bloqueo, es que el alumno no ha cumplido con su trabajo en la actividad didáctica. La idea subyacente es es la de que se aprende "porque se ve", en un acto breve, "insight", a través del sentido.

La presentación ostensiva puede darse sin intervención de imágenes, pero cuanto más se utilizan éstas, más fuerte es la tendencia del profesor a pensar que la ostensión funciona convenientemente.

LA ILUSIÓN EMPIRISTA

La idea subyacente es: "no se aprende siempre a la primera", o bien "se reconocen los conceptos enseñándolos varias veces", es decir, a través de ostensiones repetidas. Se piensa en esta ilusión que la verdad está en los objetos y se establece después a lo largo del discurso del profesor. En esta ilusión la formulación no es forzosamente necesaria, puede rechazarse e incluso considerarse como un obstáculo al conocimiento correcto.

LA ILUSIÓN FORMALISTA

La definición es la única manera de saber, el verdadero lugar de encuentro entre profesor y alumno. El acompañamiento "ostensivo" no es más que un conocimiento libre aportado por el alumno y aceptable sólo en tanto que elemento utilizable heurísticamente.

En el caso que nos ocupa, para la posición formalista, el gráfico pertenecería a la actividad heurística del alumno, mientras que la definición pertenecería a la actividad propiamente matemática.

6. ALGUNAS HIPÓTESIS EN EL SISTEMA DIDÁCTICO

Para analizar la relación de los profesores con los procedimientos ostensivos y la de los alumnos respecto a la utilización del gráfico, con los elementos teóricos que acabamos de esbozar, vamos a suponer en general que profesores y alumnos han comenzado a participar de una especie de ideología de la imagen, de lo icónico, por la que los unos tienen la impresión de que enseñan más eficientemente, puesto que en el gráfico se “ven” los conceptos matemáticos y los otros piensan que lo que está planteado gráficamente es más fácilmente resoluble: “con gráficos me aclaro mejor”. Esta ideología de lo icónico de los profesores estaría más influenciada por las ilusiones ostensiva y empirista, en detrimento de la ilusión formalista.

Plantearemos esta idea general en forma de hipótesis, que vamos a pretender contrastar.

Hipótesis 1*: Profesores y alumnos piensan que se pueden adquirir conocimientos suficientes a través de la imagen, sin la presencia del saber.*

Hipótesis 2*: Los profesores utilizan los gráficos con la impresión de que van a borrar las diferencias entre profesor y alumno, puesto que una de las virtudes de la imagen es que puede ser leída, interpretada directamente por cualquiera.*

Esta hipótesis tiene en cuenta el gráfico como sentido de las matemáticas. Lo que el profesor dice sobre las funciones se comprueba sobre el gráfico, en el que reside la verdad, el conocimiento, el sentido común. Los profesores necesitan un medio común de construcción para exigir a los alumnos que resuelvan los problemas naturalmente, espontáneamente. De esta manera, si el alumno no lo hace, es que no sabe razonar, que no ve el problema, etc. luego no se puede hacer nada. Así pues, conocer el gráfico es conocer la verdad. El saber sería otra manera de pensar lo que se ve. Esto conduce a pensar que *lo que se ve equivale a lo que se sabe,* luego el saber gráfico podría sustituir al saber matemático.

Hipótesis 3*: Para los profesores, mostrar un gráfico –la ostensión gráfica– es equivalente a una definición o a una demostración.*

Hipótesis 4*: La ideología de lo icónico lleva a los estudiantes a tomar decisiones incorrectas en la resolución de problemas.*

7. LA OPINIÓN DE LOS PROFESORES: ALGUNOS RESULTADOS

Entre las diferentes técnicas utilizables para contrastar estas hipótesis (observación, entrevistas…), hemos elegido el cuestionario planteado a una muestra de profesores de secundaria. A través de las declaraciones de éstos, se ha pretendido encontrar respuestas a la pregunta: ¿Qué piensan los profesores sobre el papel que juegan los gráficos en el aprendizaje de los alumnos? Además nos hemos planteado el acuerdo o desacuerdo en cada caso con esta otra pregunta: ¿Son concordantes las declaraciones?

A lo largo del cuestionario, que no vamos a transcribir en su integridad, se preguntó la opinión de los profesores sobre las características y las virtudes que se atribuyen a los gráficos; es decir, sobre el gráfico como elemento que facilita la comprensión de los alumnos, que mejora sus resultados, como herramienta útil, como herramienta simple, transparente, etc.

Nos hemos limitado a una muestra de 23 profesores de instituto (con alumnos de 15 a 18 años). La mayoría de estos profesores son licenciados en matemáticas.

LA MUESTRA

La muestra elegida no es seguramente un conjunto representativo de la opinión de los profesores; por ello, el objetivo planteado en el cuestionario no es el de inferir cuál es la opinión general de los profesores. Sin embargo, la elección de las preguntas y el análisis de los resultados del cuestionario deben bastar para poner en evidencia los hechos notables y las tendencias observadas.

LA METODOLOGÍA ESTADÍSTICA

La *metodología* del tratamiento estadístico está impuesta por la necesidad de responder a las hipótesis a través de los comportamientos puestos de manifiesto mediante el cuestionario.

En vista del tamaño de la muestra y del formato variado de las preguntas, hemos aplicado un abanico de técnicas estadísticas, con un sitio especialmente importante destinado a los métodos no paramétricos y al análisis implicativo de R. GRAS (1996). Los métodos no paramétricos permiten un control satisfactorio de la certidumbre de los resultados, sin adoptar hipótesis demasiado exigentes y demasiado alejadas de la realidad sobre el modo de distribución de las variables que entran en juego.

La definición de un conjunto de variables ligadas a las opiniones de los profesores permite la construcciónd de una matriz “observaciones x variables”, en la que las observaciones o individuos son los 23 profesores de la muestra. El tamaño de la muestra impone también la no utilización de análisis factorial, por lo que extraeremos solamente algunos resultados puntuales, obtenidos a través del análisis jerárquico e implicativo.

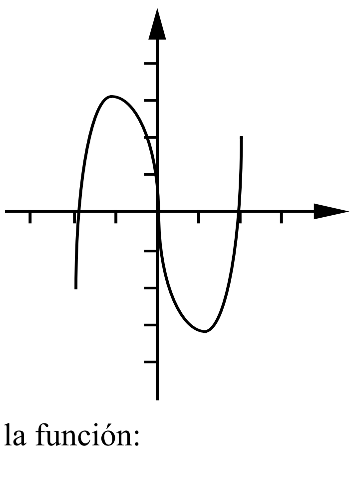
TRANSPARENCIA DEL LENGUAJE GRÁFICO

Se les propuso a los profesores de la muestra la siguiente cuestión:

He aquí cuatro maneras de dar una misma función en 3º de BUP (17 años):

A. Una tabla de los valores de f(x) para los valores de x : …-3, -2,5, -2; -1,5; -0,5; 0; 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3…

B. La gráfica de la función:



C. La tabla de variación de la función:

x	$-\infty$	-2	$-2/\sqrt{3}$	0	$2/\sqrt{3}$	+2	$+\infty$
f(x)		0		0		0	
Crecimiento		↗		↘		↗	
Concavidad			∩			∪	

D. La fórmula de la función: $f(x) = x^3 - 4x$

En los cuatro casos, se les pide a los alumnos calcular los máximos y mínimos, los intervalos en los que la función es positiva o negativa y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Ordene las cuatro maneras de dar la función, según el orden decreciente de riesgo de diferencias entre las interpretaciones del profesor y del alumno (primero, la manera para la que más riesgo de diferencias de interpretación hay, etc.)

La aplicación del test W de KENDALL a las respuestas deja claro que el ordenamiento dado por los profesores no se debe al azar y que existe una concepción homogénea sobre el orden dado a las cuatro presentaciones. El orden cociente es: 1ª Fórmula (D), 2ª Tabla de valores (A), 3ª Tabla de variación (C), 4ª Gráfica (B).

Tal como proponíamos en la hipótesis H2, cuanto más marcado es el carácter icónico de una presentación, menor riesgo de diferencias entre las interpretaciones de profesor y alumno, según el pnto de vista de los profesores. No podemos decir que la hipótesis 2 se vea absolutamente validada, pero cuando menos, se ve apoyada por este resultado, que era el esperado por nosotros.

INFLUENCIA DE LA PRESENTACIÓN OSTENSIVA

En la misma línea de la cuestión anterior, quisimos averiguar la posición de los profesores respecto al interés didáctico de diferentes presentaciones de una misma noción: el límite finito de una función en un punto.

Ordene las cuatro maneras siguientes de describir el límite finito de una función en un punto, según su interés didáctico o su facilidad de explicación y de comprensión (1ª para la más interesante, etc.)

A. Se trata de una definición breve y rigurosa, sin ningún gráfico, tomada del *Calculus* de SPIVAK.

B. Es una definición que utiliza el gráfico, aunque de manera menos explícita y exhaustiva que la alternativa D, tomada de *Matemáticas. Bachillerato 2,* de DE GUZMÁN M. y otros.

C. Esta presentación no va acompañada de gráfica y no define la noción de límite; el alumno puede solamente leer que "el concepto de 'límite' de una función cuando x tiende hacia a" está relacionado con la pregunta "¿cuál es el valor hacia el que tienden los valores f(x) cuando la variable independiente se aproxima a "a"?. Se utiliza una tabla de valores numéricos y el manual en el que figura está dirigido a los alumnos de Matemáticas II de COU

(18 años). El manual debe seguir las disposiciones oficiales que exigen una presentación "intuitiva" del límite. (*Matemáticas. COU. Opciones C y D,* SANTOS D.)

D. Esta presentación utiliza el gráfico con una correspondencia exhaustiva de los elementos de la definición (ε, δ…). Está tomada de un manual de tipo Calculus, utilizado en primeros cursos de universidad. (*Cálculo y Geometría analítica,* LARSON R. E.).

RESPUESTA ESPERADA

De acuerdo con nuestra suposición de que los profesores piensan que el gráfico facilita la obtención de conocimientos matemáticos. Así pues, los profesores deberían atribuir el máximo de interés didáctico a la presentación D, que emplea exhaustivamente el gráfico, seguido de la presentación D. Las otras dos presentaciones podrían atraer la decisión de los profesores según distintos criterios y no teníamos una idea precisa de su orden de preferencia.

RESULTADO

El test W prueba que el ordenamiento dado por los profesores no se debe al azar. Existe una concepción homogénea sobre el orden según el interés didáctico, pero no es el previsto, sino el siguiente: 1ª Presentación "intuitiva" mediante una tabla de valores, sin definición (C), 2ª: Gráfico exhaustivo con texto explicativo (D), 3ª Gráfico simple (B) y 4ª: Definición sin límite ni gráfico (A).

El resultado obtenido podría explicarse porque a los profesores les parece más didáctico primero la cantidad de información y segundo, los gráficos contenidos en el texto. Es decir, cuantos más valores, más explicaciones y más informaciones diversas hay, más didáctico les parece el texto.

Hay que resaltar que en la presentación "C" no se dice qué es el límite de la función. Sólo hay cálculos hechos sobre un ejemplo concreto, en el que la función no existe para $x = a$. Se cumple una de las características de la presentación ostensiva, que hemos expuesto: el objeto presentado es un elemento de una clase en lugar de ser la propia clase.

Este resultado contraria la hipótesis H1: "Profesores y alumnos piensan que se pueden adquirir conocimientos suficientes a través de la imagen, sin la presencia del saber.". No es la imagen lo que provoca este resultado, sino el carácter *ostensivo* de una explicación que, al menos en este caso, es más decisiva que el carácter gráfico o icónico de la presentación.

OTROS RESULTADOS

En la matriz "observaciones x variables" a la que que ya hemos hecho referencia, recoge como variables "elegir el máximo interés didáctico del gráfico exhaustiva (opción D) para explicar la noción de límite" y, entre las respuestas a una pregunta abierta, "necesidad del gráfico para la enseñanza de funciones" y la expresión de la superioridad del lenguaje gráfico, a través de frases como "una imagen vale más que mil palabras", "sin gráficos nos alejamos de la realidad", etc. El análisis implicativo pone de manifiesto que la primera variable implica la segunda y la tercera. Este resultado apoyaría la hipótesis H2 ("Los profesores utilizan los gráficos con la impresión de que van a borrar las diferencias entre profesor y alumno, puesto que una de las virtudes de la imagen es que puede ser leída, interpretada directamente por cualquiera”). Pero hay que tener en cuenta que la mayor parte de los profesores no ostentan la primera variable. Ello nos hace pensar que hay en la muestra profesores más bien “grafistas” y profesores más bien “ostensivos”.

8. LA OPINIÓN DE LOS ALUMNOS: ALGUNOS RESULTADOS

Sin entrar en el detalle de las experiencias realizadas, vamos a tomar en cuenta algunos resultados puntuales obtenidos en las respuestas de alumnos de diferentes niveles de secundaria (8º de EGB, BUP, alumnos de Matemáticas I y de Matemáticas II de COU).

UTILIZACIÓN DEL GRÁFICO Y PROPORCIONALIDAD

Propusimos a una muestra de 89 alumnos de 7º de EGB (13 años) un cuestionario sobre proporcionalidad, en el que se planteaba básicamente el mismo problema matemático (dados cuatro pares de valores, determinar si las magnitudes respectivas eran o no proporcionales) con cuatro presentaciones distintas: texto, tabla de números, información sobre un gráfico. Los mismo alumnos respondieron una encuesta sobre sus preferencias en relación a las modalidades de presentación.

A través de un análisis en componentes principales, se puso de manifiesto que *los alumnos que declaran que el gráfico facilita la comprensión de los problemas no muestran una tendencia a utilizarlo como herramienta efectiva o como medio de control de la proporcionalidad.*

El análisis implicativo muestra que *la preferencia por las presentaciones en forma de tabla o de texto implica el éxito en los problemas así planteados, pero la preferencia por el gráfico no implica el éxito en los problemas planteados gráficamente ni el empleo efectivo del gráfico para resolver los problemas.*

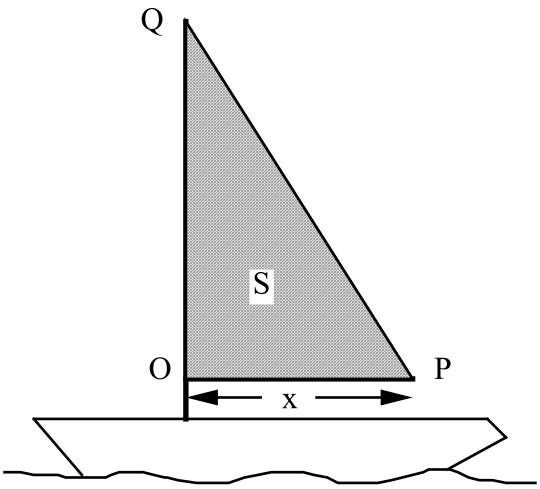
Estos resultados vienen a apoyar la hipótesis H4 *(“La ideología de lo icónico lleva a los estudiantes a tomar decisiones incorrectas en la resolución de problemas”)*

ICONO, GRÁFICO Y FUNCIÓN

Propusimos otro cuestionario en el que en términos generales se planteaba la previsión y comunicación de resultados mediante el gráfico a una muestra compuesta de 33 alumnos de 2º de BUP (16 años) y 19 alumnos de Matemáticas II de COU (18 años). Pudimos constatar que *los alumnos de Matemáticas II elegían erróneamente las cuestiones que exigían interpretar diagramas espacio-tiempo como las más fáciles.* Decimos erróneamente, porque los resultados de estos alumnos eran deficientes en este tipo de cuestión.

He aquí una de las cuestiones planteadas en este último cuestionario:

Se quiere construir la vela de un barquito, en el que la longitud del mástil es OQ = 4 m. El área de la vela, que es el área S del triángulo POQ varía según la distancia OP de la base del mástil al extremo de la botavara (el palo horizontal).



Haz un gráfico que represente la variación del área S de la vela, según x. Representa en los ejes cartesianos la longitud de la botavara (*en metros) sobre el eje OX y el área S de la vela (en metros cuadrados), sobre el eje OY.*

Los alumnos de Matemáticas II declaran mayoritariamente que “los gráficos son fáciles de interpretar” y, al mismo tiempo, algunos de ellos sitúan el icono del problema directamente en el plano cartesiano, en lugar de abstraer la fórmula de la función pedida y representarla.

Este resultado incita a que nos cuestionemos la orientación de esta asignatura, supuestamente adecuada al desarrollo ulterior de los futuros sociólogos, economistas, etc.

9. CONSIDERACIONES PARA UN DEBATE

Los gráficos cartesianos han jugado un papel fundamental en el estudio escolar de las funciones y continuarán haciéndolo. Gozarán todavía durante mucho tiempo de un prejuicio favorable, como marco y como soporte intuitivo, porque acompañan las representaciones más operativas de los matemáticos. Han de continuar siendo irremplazables, aunque su utilización ha de cambiar sin duda, como la de todas las nociones que la tecnología informática puede usar o simular.

Sin embargo, sobre todo en los niveles de bachiller, es posible que la buena opinion que los profesores tienen de los gráficos sea la causa de algunos fracasos, por la confianza que provoca en procedimientos dudosos.

¿Qué razones objetivas podríamos avanzar para matizar la importancia de los gráficos en la enseñanza? A lo largo de nuestro análisis hemos visto cómo:

- Los profesores prefieren las condiciones (gráficas o no) que mejor permiten lo que se podría llamar un "contrato didáctico de ostensión". De esta manera, el sitio atribuído por los profesores al gráfico está basado en una falsa transparencia del mismo, aunque su importancia y necesidad son innegables.

- Los estudiantes de COU que cursan Matemáticas II, en cuyo programa se prima el tratamiento gráfico, aprecian especialmente el gráfico como instrumento de conocimiento intuitivo y de aprendizaje; para ellos, la representación gráfica de las funciones sería una alternativa al conocimiento propiamente matemático. Pero al mismo tiempo, estos mismos alumnos eligen erróneamente las preguntas que contienen gráficos como las más fáciles. Ello nos previene de un posible efecto negativo de la profusión de ejercicios basados en la interpretación y construcción de gráficos, que consistiría en que los alumnos pudieran llegar a pensar que lo importante, en vez de resolver los problemas, es la utilización abundante del lenguaje gráfico, pasando éste de ser un instrumento a ser el objetivo del aprendizaje. Este efecto ha sido denominado en la obra de BROUSSEAU como "deslizamiento metadidáctico".

REFERENCIAS

ADDA J. (1987): *Elementos de didáctica de las matemáticas,* Centro de investigación y de estudios avanzados del IPN (CINVESTAV). México.

ARTIGUE, M.: La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En GÓMEZ, P. (ed) *Ingeniería didáctica en educación matemática,*. Bogotá, 1995.

AZCARATE C. y DEULOFEU J. (1990), *Funciones y gráficas.* Síntesis. Madrid.

BERTIN J. (1973), *Sémiologie graphique. Les diagrammes - les résaux, les cartes,* Mouton, Paris.

BLOOM B. S. y col. (1972), *Taxonomía de los objetivos de la educación. La clasificación de las metas educacionales,* "El Ateneo", Buenos Aires.

DUVAL R. (1993) 'Graphiques et équations, l'articulation de deux registres', "Les représentations graphiques dans l'enseignement et la formation" *Les sciences de l'éducation pour l'ère nouvelle. 1-3,* CERSE, Université de Caen. pp. 57-72.

GRAS R. (1996): *L'implication statistique. Nouvelle méthode exploratoire de données. Applications à la didactique.* La Pensée Sauvage, Grenoble.

JANVIER C (1982), Les représentations graphiques, *Primeras jornadas sobre Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas,* Institut de Ciències de l'Educació de la Universitat Autònoma de Barcelona (pp 7-20).

JANVIER C. (1983): 'Répresentation et compréhension. Un exemple : le concept de fonction' *Bulletin AMQ (association mathématique du Québec),* Octobre 1983 (pp. 22-28).

JANVIER C. (1993) Les graphiques cartésiens : des traductions aux chroniques, "Les représentations graphiques dans l'enseignement et la formation" *Les sciences de l'éducation pour l'ère nouvelle. 1-3,* CERSE, Université de Caen (pp. 17-37).

LACASTA ZABALZA E. (1995): *Les graphiques cartésiens de fonctions dans l'enseignement secondaire des mathématiques : illusions et contrôles,* LADIST, Université Bordeaux I.

LACASTA E. y PASCUAL J. R. (1998): *LAS FUNCIONES EN LOS GRÁFICOS CARTESIANOS,* Educación matemática en secundaria. Editorial Síntesis. Madrid.

MORENO, A., ECHEITA, G., MARTIN, E., BARRIO, C. del: "'Un redondel con muchas cosas dentro', eso es un conjunto". *Revista Infancia y aprendizaje,* nº 30, pp. 69-79. 1981.

NCTM. (1991): *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática,* S.A.E.M. Thales, Sevilla.

RATSIMBA-RAJOHN H. (1977): *Étude didactique de l'introduction ostensive des objets mathématiques,* Mémoire de DEA, IREM de Bordeaux.

SHELL CENTRE (1990): *El lenguaje de funciones y gráficas.* Ministerio de Educación y Ciencia. Centro de publicaciones. Servicio Editorial Universidad del País Vasco, Bilbao.