CONTEXTOS EDUCATIVOS, 4 (2001), 137-159

# SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN DE NÚMEROS RACIONALES POSITIVOS. UN ESTUDIO CON MAESTROS EN FORMACIÓN[1]

**José María Gairín Sallán**
*Departamento de matemáticas, Universidad de Zaragoza*

*RESUMEN. Este trabajo se estructura en dos etapas diferenciadas por sus objetivos y por la metodología de investigación utilizada.*

*En la primera etapa, y aplicando la metodología de Investigación-Acción, se elabora e implementa una propuesta didáctica en un grupo natural de estudiantes de la Diplomatura de Maestro de Educación Primaria de la Universidad de Zaragoza, con la intención de incrementar la comprensión de los futuros maestros sobre los números racionales positivos mediante el fortalecimiento de las conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal. Para ello se define un modelo desde el que se construyen dos sistemas de representación de cantidades no enteras de magnitud, a través de éstos se conceptualiza a las expresiones fraccionaria y decimal como resultados de repartos igualitarios, y se pone de manifiesto que las notaciones fraccionaria y decimal admiten una estructura numérica subyacente similar.*

*En la segunda etapa se aplica la metodología de la entrevista a tres de los estudiantes que intervinieron en la primera etapa, con el objetivo de indagar sobre las relaciones entre las producciones previas de estos estudiantes y su actuación como profesores que revisan tareas realizadas por escolares. Se concluye que cuanto mayor es la comprensión del modelo por parte de los futuros maestros, más eficaces se muestran en la detección y diagnóstico de los errores de los escolares, y más tienden a ofrecer razonamientos sustentados en el mundo de los objetos; mientras que los estudiantes para maestro que muestran una débil comprensión del modelo llegan a aceptar como carrectas respuestas erróneas de los escolares, y priman el lenguaje simbólico en las explicaciones que ofrecen a los niños.*

*Descriptores: Educación Matemática, Didáctica de la Matemática, Formación del Profesorado, Número Racional, Modelo, Sistemas de Representación, Investigación-Acción, Entrevista*

*ABSTRACT. This survey is structured into two stages differentiated by the aims and methodology used in its realization.*

*The first stage in mainly based on a didactic assignment, done by applying Research-Action methodology and intended to be performed by a group of students studying to be Teachers of Primary Education in the University of Zaragoza. This assignment aims at increasing future teachers' comprehension of positive rational numbers through implementing the links existing between fractional and decimal notations. In order to achieve this objetive, a pattern with two systems of representation of amounts not whole of magnitude is defined, through which fractional and decimal expressions are conceptualized*

1. Resumen de la Memoria de Tesis Doctoral.

*as results of equalitarian distributions, revealing that fractional and decimal notations admit a similar underlying structure.*

*In the second stage, the methodology of interview is used with three students who took part in the first satage. The aim is to study the relations between these students' previous productions and their performance as teachers who have to correct schoolchildren's tasks. As a result, it can be inferred that the greater the future teachers' comprehension of the pattern is, the more effective they prove to be in detecting and analysing children's errors, and the more sustained reasons they offer in the physical world; on the other hand, the future teachers who have not understood clearly the pattern tend to consider schoolchildren's errors as correct and to give priority to the symbolic language used by the children in their explanations.*

*Descriptors: Mathematical Education, Didactic of Mathematics, Rational number, Pattern, System of Representation, Research-Action, Interview*

## 1. Introducción

Como formadores de Maestros de Educación Primaria estamos interesados, con carácter general, en estudiar las dificultades de comprensión que tienen los estudiantes sobre los distintos constructos que componen el concepto de número racional y también sobre su estructura como sistema, como conjunto de entes, relaciones y operaciones; igualmente estamos interesados en estudiar alternativas didácticas que ayuden a los profesores en formación a superar esas dificultades. Nuestra intención es evitar que las dificultades de comprensión de los profesores retroalimenten los errores de los escolares.

Surge así nuestra pregunta de investigación: *¿de qué modo se pueden modificar los conocimientos sobre los Números Racionales de los estudiantes para maestro?* La pregunta es pertinente porque de su respuesta se derivarán actuaciones que mejoren la formación inicial de los profesores de matemáticas. Y mejorar la formación de los maestros significa mejorar la formación matemática de los escolares: el conocimiento de la materia es uno de los factores de mayor influencia sobre lo que los maestros hacen en las clases y, a la larga, sobre lo que los escolares aprenden.

Para dar respuesta a la pregunta formulada, esta tesis doctoral nace con la preocupación de abordar la formación inicial de los maestros desde una doble dimensión: mejorar sus conocimientos matemáticos y mejorar su preparación como educadores matemáticos. En consecuencia, este trabajo de investigación se estructure en dos etapas diferenciadas, tanto por los objetivos perseguidos como por la metodología utilizada.

- En la Primera Etapa, y aplicando la metodología de Investigación-Acción, se elabora e implementa una propuesta didáctica en un grupo natural de estudiantes de la Diplomatura de Maestro de Educación Primaria de la Universidad de Zaragoza, con una doble intencionalidad:
  a) incrementar la comprensión de los futuros maestros sobre los números racionales positivos mediante el fortalecimiento de las conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal;
  b) potenciar la reflexión de los futuros maestros, desde la perspectiva de aprendices, sobre un proceso de enseñanza-aprendizaje cuyas herramientas conceptuales son la comprensión, los modelos de aprendizaje y los sistemas de representación.

Con esta finalidad se contempla, en primer lugar, una revisión bibliográfica que permita al investigador elaborar dicha propuesta desde una perspectiva multidimensional: las características matemáticas del conjunto de los Números Racionales; los obstáculos y dificultades que condicionan el aprendizaje de este tópico; las peculiaridades de la instrucción que sobre el tópico mencionado recibieron los estudiantes para maestros en su etapa de enseñanza obligatoria; los conocimientos previos que tienen los futuros maestros acerca de este conjunto numérico; y las concepciones y errores más frecuentes que se han detectado, tanto entre escolares como entre los futuros profesores.

Asimismo se arbitran medios para observar la construcción del conocimiento en el aula, pues se considera a ésta el espacio natural en que se desarrolla el proceso de enseñanza-aprendizaje, y en el que se contempla toda la riqueza y multiplicidad de las variables que lo conforman.

- En la Segunda Etapa se interroga a estudiantes que intervinieron en la Primera Etapa, para indagar sobre las relaciones entre las producciones previas de estos estudiantes y su actuación como profesores. Se aplica la metodología de la entrevista.

  El objetivo es el de hacer indagaciones sobre el modo en que los estudiantes para maestros afrontan las tareas profesionales de revisión de trabajos escolares. Más concretamente, nos ocuparemos de determinar si existe alguna relación entre las producciones previas de estos estudiantes para maestro, ya estudiadas en la Primera Etapa, y su comportamiento ante las tareas de detectar y diagnosticar los errores que aparecen en producciones de escolares; de ofrecer explicaciones a dichos escolares para que superen los errores previamente detectados, y de organizan la secuencia didáctica con la que proseguir la instrutción de esos escolares.

## 2. Delimitación del problema

Nuestro problema tiene una concreción curricular precisa: la formación en matemáticas y en educación matemática de los estudiantes para Maestro de Educación Primaria sobre el campo numérico concreto de los Números Racionales. La pertinencia de un estudio de este estudio se justifica desde una perspectiva múltiple:

- La presencia en el currículo de matemáticas de los números racionales es una constante en la historia de la enseñanza de las matemáticas en España de los últimos 200 años (Vallejo, 1821; Avendaño, 1859; Llinares y Sánchez, 1988). La inclusión de los números racionales dentro del currículo de matemáticas de la Educación Obligatoria queda plenamente justificada por su interés fenomenológico y conceptual (Giménez, 1991; Sowder, 1995), y permite desarrollar una diversidad de competencias cognitivas en los sujetos en edad escolar (Streefland, 1991; Thompson, 1995).
- Buena parte de la responsabilidad del proceso de enseñanza-aprendizaje de este tópico matemático recae en los maestros de Educación Primaria, cuya preparación demanda un incremento de sus conocimientos matemáticos sobre una estructura como la de los Números Racionales, estructura que plantea problemas de comprensión y de aprendizaje (Rico y Saenz, 1982; Kerslake, 1986; Bezuck y Bieck, 1993; Mack, 1993; Kieren, 1993). Los estudiantes para maestro, durante su periodo formativo, han de realizar una construcción del concepto de número racional cognitivamente efectiva, lo que implica un proceso de dominio e integración de

los diferentes significados del número racional; la incorporación de nuevas especificidades simbólicas, operatorias, estructurales, relacionales y de representación; la elaboración y conexión de distintos sistemas de representación; la caracterización algebráica como grupo multiplicativo; y la significación topológica de la densidad respecto del orden. Paralelamente, y desde la reflexión personal sobre sus experiencias como aprendices, los estudiantes para maestro han de revisar sus conocimientos sobre la naturaleza de la ciencia matemática, sobre su enseñanza y sobre su aprendizaje; así como el sentido del término comprensión del conocimiento matemático y el papel que juegan en el mismo los modelos de aprendizaje y los sistemas de representación.

- Resultados de investigaciones recientes han puesto de manifiesto que muchos de los problemas de comprensión sobre números racionales no se superan durante el periodo de la educación obligatoria; de hecho, se localizan igualmente en los maestros durante el periodo de su formación como docentes (Graeber, Tirosh y Glover, 1989; Llinares y Sánchez, 1991; Post, Harel, Behr y Lesh, 1988; Sánchez y Llinares, 1992; Sowder, Bezuk y Sowder, 1993). Los conocimientos de estos estudiantes reflejan un proceso instructivo preuniversitario que podemos caracterizar analizando los textos de una de las colecciones publicadas por la editorial Anaya[2]: las ideas sobre fracciones se asientan inicialmente en la utilización de modelos de aprendizaje; estos modelos van desapareciendo a lo largo de los cursos siguientes para dar paso a un tratamiento progresivamente formalizado para la construcción de Q; se presentan los números decimales como convenciones que permiten simbolizar las fracciones decimales; y se establecen relaciones de tipo procedimental entre las notaciones fraccionaria y decimal.
- El cuerpo ordenado de los números racionales, resultado de la simetrización para la ley producto del dominio de integridad de los números enteros, se presenta en los textos de matemáticas como un conocimiento explícito y bien delimitado, formalmente estructurado, coherente en su fundamentación lógica y necesario para dar solución a determinados problemas numéricos, geométricos y algebraicos (Feferman, 1989). Esta construcción formal sintetiza una historia de más de 7.000 años y un proceso dialéctico de ensayos, interpretaciones, errores, desarrollos conceptuales y formalizaciones que han llevado a la configuración actual del concepto matemático de Número Racional (Benoit et al., 1992). Queda así configurado un concepto sin duda complejo porque recoge y sintetiza todos los aspectos considerados a lo largo de su proceso constructivo (Cajori, 1985; Flegg, 1989; Kieren, 1993), porque engloba a los diferentes constructos y a sus correspondientes sistemas de representación (Giménez, 1991; Streefland, 1991; Behr, Harel, Post y Lesh, 1993), y porque comprende una multiplicidad de fenómenos, problemas y situaciones de la vida real que se modelizan mediante este campo numérico (Freudenthal, 1983; Behr, Lesh, Post y Silver, 1983; Rico y otros, 1984).
- La revisión bibliográfica sobre los procesos de enseñanza-aprendizaje de la estructura de los Números Racionales, aporta datos de interés para nuestra investigación sobre las concepciones y errores de los escolares, sobre propuestas de enseñanza en la etapa de educación obligatoria; y sobre los conocimientos, creencias y concepciones de los maestros en formación y en ejercicio. Pero no hemos localizado ningún trabajo relacionado con la formación de futuros maestros que incida en las

2. Gómez, M. y Muñoz, J. A., (1985).

conexiones entre los dos sistemas de representación habituales: las notaciones fraccionaria y decimal.

De este modo, también quedan enunciados algunos de los problemas que se presentan en el proceso de enseñanza-aprendizaje del conjunto de los números racionales, y que se pretenden abordar en esta tesis doctoral. Para ello, situamos nuestro trabajo en la línea de investigación denominada Pensamiento Numérico; línea de trabajo que articula el desarrollo de la investigación en Didáctica de la Matemática en España, y que se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de los conceptos numéricos en el sistema educativo y en el medio social.

En la mencionada linea de trabajo, nuestra investigación se enmarca en la estructura numérica denominada Campo Conceptual de los Números Racionales (González, 1995); y, en consecuencia, esta investigación se aborda desde una triple vertiente analítica: el conjunto de conceptos, procedimientos y relaciones que constituyen la estructura matemática de los Números Racionales; las actividades y funciones cognitivas que caracterizan los usos de los conceptos, procedimientos y relaciones propios de ese sistema numérico; y los fenómenos y situaciones que pueden estudiarse con ese sistema numérico, así como de los problemas que discho sistema numérico pueden abordarse y resolverse.

## 3. Objetivos de la investigación

Recientes investigaciones en Didáctica de la Matemática (Carpenter et al., 1993; Behr et al., 1993), han puesto de manifiesto la complejidad de conceptos, relaciones, operaciones y propiedades que conforman el aprendizaje y comprensión de los números racionales. En este sentido, y situados en el campo de investigación denominado Pensamiento Numérico, abordamos el estudio sobre la preparación de los futuros maestros, en su dimensión formativa, desde distintas reflexiones:

- Para incrementar la comprensión de los números racionales, los maestros en formación deben fortalecer sus conocimientos sobre los diferentes significados de la fracción y establecer conexiones entre los mismos (Kerslake,1986). En consecuencia, estos maestros tienen que ampliar los significados de la fracción, y no limitarse al de relación parte-todo que priorizan desde su formación preuniversitaria.
- También deben fortalecerse las conexiones conceptuales entre las notaciones fraccionaria y decimal (Sowder, 1995); hay que poner de manifiesto a los estudiantes que dichas notaciones tienen el mismo significado y una estructura numérica muy similar.
- Para que el proceso de construcción del conocimiento sea efectivo es preciso disponer de un medio físico y natural que posibilite la formación de conceptos y la aplicación de los mismos. Así, a partir de la imagen y combinando pensamiento con experiencia, la formación de ideas sobre los números racionales positivos aparece conectada.
- Para que los estudiantes incrementen sus conocimientos es necesario que los esfuerzos se centren en la resolución de situaciones problemáticas (Vergnaud, 1990, pág. 135). Estas situaciones problemáticas deben tener sentido para dichos estudiantes y ser generadoras de conflictos que favorezcan el sentido del número y no que potencien el uso de habilidades rutinarias y de reglas para su aplicación.

- Si estos estudiantes deben reflexionar sobre la adquisición de sus conocimientos, es necesario fomentar un aprendizaje intencionado (Scardamalia et al., 1989), o aprendizaje en el que la construcción del conocimiento sea un proceso abierto y que los estudiantes tomen responsabilidades sobre el mismo. Hay que favorecer un clima de trabajo en el que los estudiantes puedan examinar sus propios errores, que tengan oportunidades para el diálogo, y que acepten que la comprensión de los Números Racionales exige de un esfuerzo personal importante y de un tiempo amplio para la acomodar los nuevos conocimientos y los que ya tenían (Sowder et al, 1993).
- En la formación de los futuros maestros hay que tener presente su preparación para el desempeño de tareas profesionales, hay que ofrecer oportunidades para que proyecten sus conocimientos matemáticos y didácticos en procesos instructivos con escolares.

En base a todas las consideraciones anteriores concretamos los siguientes objetivos para nuestro trabajo de investigación en los términos siguientes:

***Objetivo 1.*** *Explorar dificultades y potencialidades que presenta el trabajo en los Números Racionales positivos para estudiantes de Maestros, en la especialidad de Educación Primaria, utilizando una propuesta didáctica caracterizada por:*

*1.1. Contemplar los siguientes objetivos específicos: caracterizar un modelo para el aprendizaje; priorizar la fracción como cociente de números naturales; construir los sistemas de representación polinómicos unitario y decimal; y explicitar las características sintácticas y semánticas de estos dos sistemas.*

*1.2. Reelaborar los conocimientos de los estudiantes sobre las relaciones y sobre las operaciones entre números racionales positivos, redefiniendo los conceptos a partir de los dos sistemas simbólicos de representación construidos.*

*1.3. Potenciar las conexiones de estos dos sistemas de representación con las notaciones fraccionaria y decimal de los números racionales, poniendo de manifiesto que las fracciones admiten una representación polinómica similar a la que subyace en nuestro sistema de numeración decimal.*

*1.4. Emplear una metodología que prioriza el trabajo personal de los estudiantes y que potencia el aula como espacio natural para la construcción del conocimiento.*

***Objetivo 2.*** *Establecer relaciones entre los conocimientos de los futuros profesores sobre la propuesta didáctica y el desempeño de determinadas tareas como profesionales, a través de:*

*2.1. El cumplimiento de los objetivos específicos siguientes: detección y valoración de los errores producidos por los escolares; explicaciones que ofrecen a dichos escolares; y elaboración de tareas para el aprendizaje.*

*2.2. El uso de los modelos sobre los que construir el conocimiento matemático de los escolares.*

*2.3. El tratamiento de las relaciones sintácticas y semánticas de los sistemas de representación utilizados por los escolares.*

Con la explicitación de estos objetivos se formulan las dos Hipótesis que quieren contrastarse en nuestra investigación:

Hipótesis Uno: *Es viable una propuesta didáctica, con las condiciones enunciadas, que permita incrementar el conocimiento del conjunto de los Números Racionales de un grupo de estudiantes de la Diplomatura de Maestro de la especialidad de*

*Educación Primaria. Además, el desarrollo en el aula de la mencionada propuesta didáctica permitirá recoger información relevante de la comprensión de estos estudiantes sobre el conjunto de los Números Racionales.*

Hipótesis Dos: *Existen relaciones entre los conocimientos sobre los Números Racionales de los estudiantes para maestros y el conocimiento profesional de esos mismos estudiantes, que se expresan en las decisiones y orientaciones que adoptan ante determinadas tareas escolares.*

## 4. Análisis y caracterización de modelos

A lo largo de nuestro trabajo hacemos uso de tres herramientas conceptuales de gran trascendencia para el mismo: modelo de aprendizaje (Gagatsis y Patronis, 1990; Lesh et al., 1987), sistema de representación (Kaput, 1987; Duval, 1993; Rico, Castro y Romero, 1996) y comprensión del conocimiento matemático (Wittrock, 1990; Hiebert y Carpenter, 1992). El uso de estas herramientas viene determinado porque, en los estudios sobre las nociones de representación, hay resultados señalando que para alcanzar la comprensión de un concepto es necesario el dominio coordinado de dos o más sistemas de representación (Kaput, 1992; Romero, 1995), y que las dificultades de comprensión de un concepto se detectan en la falta de coordinación entre los sistemas de representación utilizados (Castro, 1994; Duval, 1995); aunque ello no implica que para la comprender un concepto baste el dominio coordinado de dos o más sistemas de representación, ni que todas las dificultades de comprensión se limiten a la falta de coordinación entre distintos sistemas (Hitt, 1998).

### 4.1. *Noción de modelo*

La naturaleza de la mente humana permite que pensemos mejor con lo familiar, perceptible y manipulable, que con lo abstracto, no representable y desconocido (Castro, 1994, pág. 13). Resulta, por tanto, razonable que en el proceso de enseñanza-aprendizaje de los conceptos matemáticos, las ideas abstractas se presenten asociadas a objetos físicos. Por tanto, la instrucción sobre los conceptos matemáticos está ligada a la noción de **modelo**; noción que admitimos con el significado genérico de "*réplica a pequeña escala de un determinado sistema*", (Real Academia de Ciencias, 1990, p. 470).

Reelaborando esta idea para nuestros propósitos, en lo sucesivo nos referiremos al término modelo para designar *un material tangible o un conjunto de relaciones en un entorno físico con los cuales se esquematiza y recrea una parte del mundo real, con variables bien definidas, estable frente a interacciones con el mundo exterior, y sobre el que actúan sujetos*. En esta noción de modelo tienen cabida ideas similares que reciben distintas denominaciones como los Modelos Concretos (Gagatsis y Patronis, 1990), o las Experiencias Básicas (Lesh et al., 1987).

Desde la posición del aprendiz, el empleo de modelos tienen gran utilidad en la construcción del conocimiento matemático por cuanto facilitan la aprehensión sensorial de hechos y relaciones matemáticas mediante la manipulación de objetos; la creación e interpretación de sistemas que representan ideas matemáticas; el análisis de las relaciones sintácticas y semánticas de los sistemas de representación; la verificación de la certeza o falsedad de las relaciones simbólicas; y la resolución de situaciones problemáticas.

Desde la posición del profesor, el modelo constituye el recurso didáctico que se ofrece al aprendiz con la clara intencionalidad de facilitar la comprensión del concepto matemático cuyo aprendizaje se promueve. Y ello obliga al profesor a tomar, cuando menos, dos cautelas en la elección del modelo: determinar previamente los aspectos del concepto que explicita el modelo y los que oculta u obstaculiza; y transmitir al alumno el uso correcto que debe hacer del modelo: los aspectos de los objetos que se consideran, las acciones que se pueden realizar, y las características del resultado que se han de considerar.

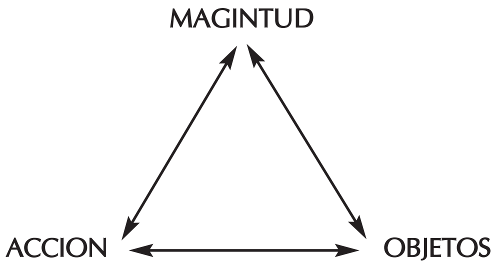
Al concretar estas ideas en nuestro problema de investigación, se trata de crear un modelo desde el que dotar de significado a los números racionales positivos; y ello equivale a dotar de sentido a pares de números naturales por medio de la manipulación de magnitudes medibles. En consecuencia, los modelos para la instrucción sobre estos números vendrán determinados por tres variables diferenciadas:

**una magnitud medible** cuyas cantidades se expresen de forma numérica,

**unos objetos** en los que resulten perceptibles cantidades de dicha magnitud,

**unas acciones** que alteren las cantidades de la mencionada magnitud.

Al esquematizar nuestra idea de modelo para la enseñanza de las fracciones como sistema de tres variables interrelacionadas, recurrimos a un triángulo equilátero cuyos vértices simbolizan cada una de las variables, y cuyos lados representan las conexiones entre cada par de variables:




A partir de este esquema, y dando valores a las variables se obtienen diferentes modelos para la instrucción sobre los números racionales positivos. Cada uno de estos modelos posibilita la instrucción sobre un determinado significado de número racional, por lo que cada uno de estos modelos no puede abarcar la totalidad de significados, relaciones y propiedades de dicho concepto. Por tanto, cualquier propuesta didáctica sobre los números racionales en la que se hace uso de un modelo, tiene que contemplar un estudio previo sobre aquellos aspectos del concepto que se potencian con dicho modelo, y aquellos aspectos del concepto que son ignorados u obstaculizados por el propio modelo.

### 4.2. *Sistemas de representación*

Las matemáticas son el estudio de las estructuras y, en particular, el estudio de estructuras numéricas, entendiendo éstas como conjunto de entes numéricos expresados simbólicamente, y dotados de unas operaciones y de unas relaciones. Las ideas matemáticas que sustentan estas estructuras numéricas pueden aparecen trabajando con modelos, mediante la manipulación de los objetos, la observación del resultado de sus acciones, y la comunicación de los resultados obtenidos. De este modo, las ideas que aparecen, y que ya no se refieren a los propios objetos, se conforman como entidades abstractas sostenidas por un sistema simbólico con el que se formulan enunciados y demostraciones. Por tanto, y de acuerdo con Lesh (1997), el aprendizaje de las estructuras matemáticas no solamente consiste en la manipulación de símbolos, implica además interpretar situaciones matemáticamente; también implica cuantificar, visualizar o coordinar sistemas estructuralmente interesantes; y, por supuesto, implica utilizar un lenguaje especializado, símbolos, esquemas, gráficos y otros sistemas de representación.

Surge así la idea de sistema de representación como lenguaje utilizado para expresar estructuras numéricas mediante unos signos, unas reglas y unos enunciados (Castro, Rico, Romero, 1997). Idea que desempeña un papel central en la comprensión de los conceptos matemáticos, pues el diseño y manejo de sistemas de representación exigen el profundo conocimiento de sus características sintácticas y semánticas, y este aspecto es esencial en la comunicación de las ideas matemáticas.

### 4.3. *La comprensión de las ideas matemáticas*

Desde la perspectiva particular de este trabajo asumimos la siguiente idea sobre la comprensión: "*las matemáticas son comprendidas si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de comprensión viene determinado por el número y la fuerza de las conexiones. Una idea, procedimiento o hecho matemático es comprendido a fondo si se liga a redes existentes con conexiones más numerosas o más fuertes*" (Hiebert y Carpenter, 1992, p. 67)

Bajo el término representación tienen cabida dos ideas diferenciadas: la representación interna de ideas matemáticas, que resultan inobservables; y la representación externa, que tienen forma de lenguaje oral, símbolos escritos, dibujos u objetos. Nuestro interés se centra en el estudio de las representaciones externas, en los modos de representación empleados, y en los significados que se asignan a estas representaciones; a través de estas representaciones externas podremos aproximar el conocimiento de las representaciones internas. Los sistemas de representación, por tanto, son esenciales para conocer y caracterizar el grado de comprensión de los estudiantes:

- Los objetos matemáticos no deben confundirse con la representación que se hace de ellos. Aunque las representaciones son indispensables y no pueden suprimirse, lo que importa conceptualmente es el objeto matemático. (Duval, 1993, 1995)
- Las representaciones de algo por algo no se presentan de forma aislada, sino que tienen un carácter sistémico (Gunttenplan, 1994, pág. 536). En el caso más concreto de las matemáticas la noción de sistema de representación la identificamos con un conjunto de símbolos evaluables semánticamente y dotados de unas normas sintácticas.
- No hay representaciones de las ideas matemáticas que tengan carácter universal; cualquiera de ellas destaca algunos aspectos del concepto, mientras que oscurece otros (Figueras, 1988; Ball, 1993).
- La comprensión de un concepto matemático conlleva el dominio coordinado de dos o más sistemas de representación (Kaput, 1992; Duval, 1993; Romero, 1995); mientras que la falta de coordinación entre diferentes sistemas provoca dificultades de comprensión (Castro, 1994; Duval, 1995).

Desde estas consideraciones, nuestra intención de mejorar la comprensión de los futuros profesores sobre el campo de los números racionales se concreta en incrementar y fortalecer las conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal de los números racionales positivos (Marshall, 1993; Owens y Super, 1993), a través de dos sistemas simbólicos, que denominamos *polinómico unitario* y *polinómico decimal*. La construcción y manejo de estos sistemas permitirán evidenciar ante los estudiantes aspectos esenciales en educación matemática:

- Un mismo sistema simbólico de representación admite diferentes significados del objeto representado. Así, con la notación fraccionaria habitual, a/b, se puede simbolizar una relación entre la parte y el todo, o el cociente de dos números enteros, o una relación funcional,...
- Desde un significado concreto se potencian o dificultan determinados aspectos del concepto matemático: el significado de la fracción como relación parte-todo dificulta la comprensión de las fracciones mayores que la unidad, mientras que el significado de la fracción como razón dificulta la comprensión de la suma de fracciones.
- Un sistema de representación destaca u oscurece aspectos de un mismo concepto: la comparación de las fracciones 3/5 y 4/7 no es inmediata; mientras que sus expresiones polinómicas unitarias, 1/2+1/10 y 1/2+ 1/14, son fácilmente comparables.

## 5. Interpretación de resultados

El diseño de la investigación en las dos etapas, comentadas anteriormente, lleva asociadas unas medotologias claramente diferenciadas:

- En la Primera Etapa utilizamos un esquema de Investigación-Acción construido a partir del esquema propuesto propuesto por Elliot (citado por McNiff, 1988), y al que incorporamos la posibilidad de dar cuenta de episodios espontáneos añadiendo una espiral adyacente que corresponde a la valoración de la Primera Etapa y la toma de decisiones para afrontar la Segunda Etapa.
- En la Segunda Etapa, y en consonancia con los objetivos perseguidos, se utiliza una metodología de entrevista estructurada en seis pasos (Cohen y Manion, 1990).

El gráfico de la página siguiente recoge los aspectos esenciales de cada una de las metodologias de investigación que se utilizan en esta investigación, y cuyos rasgos esenciales se desarrollan en los apartados 5 y 7.

### 5.1. *Metodología de la primera etapa*

En esta Etapa de nuestra investigación se ha optado por la metodología de Investigación-Acción por dos razones principales:

1) Porque la idea fundamental que encontramos en este método de investigación es la de reflexionar sobre la práctica en general y la práctica educativa en particular; su intencionalidad es la de mejorar la calidad educativa a través de una indagación introspectiva colectiva (McNiff, 1992, Kemmis y McTaggart, 1988).
2) Porque en esta metodología el investigador actúa como un componente más del equipo investigador y no como un observador externo (Lewin, 1990).

Ahora bien, como el término Investigación-Acción admite múltiples interpretaciones, precisamos las características de la metodología ytilizada: es una investigación-acción

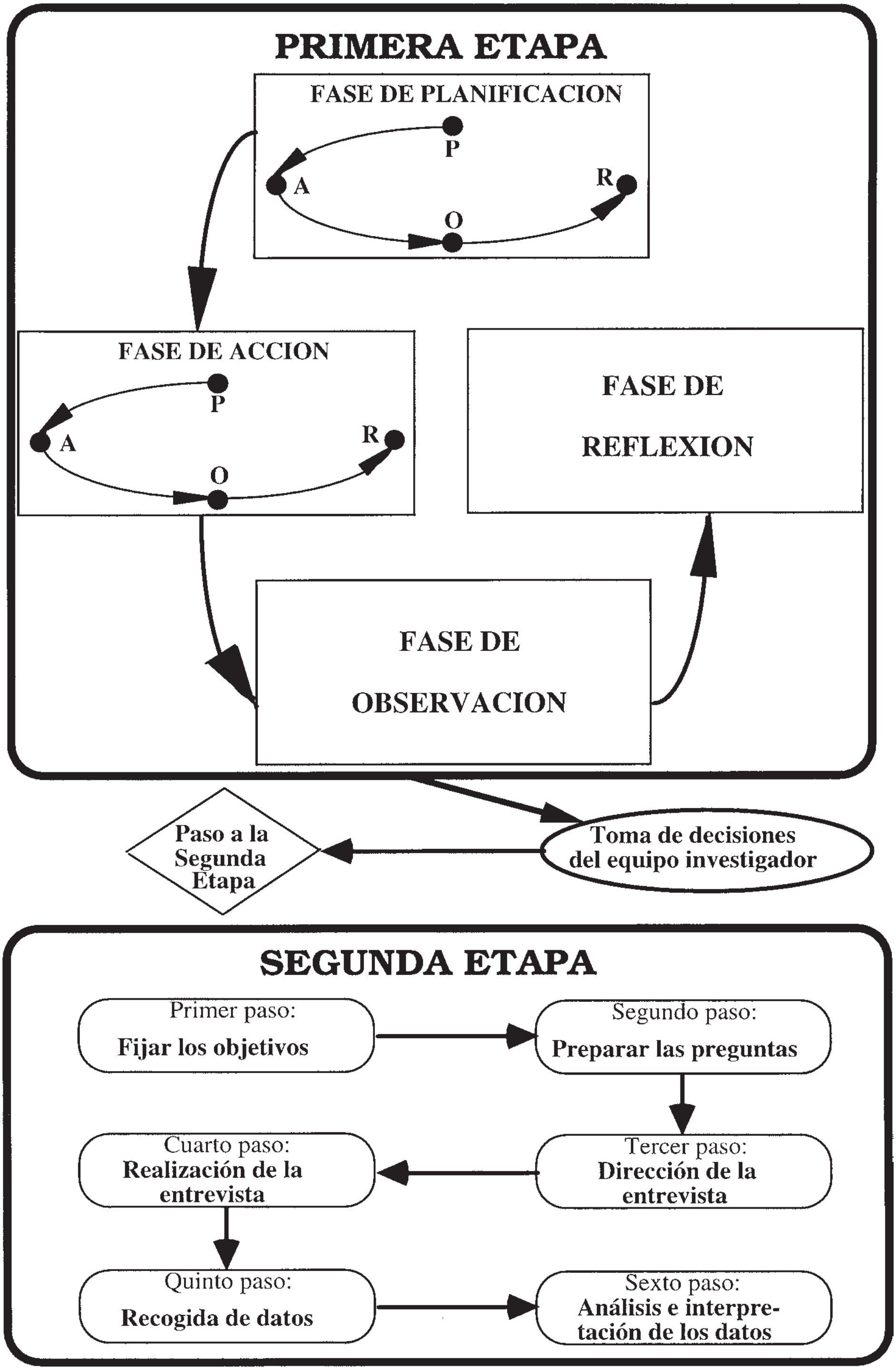



Gráfico 1. *Esquema de la metodología de investigación utilizada*

diagnóstica por cuanto está enfocada a la recogida de datos, a la interpretación de los mismos, a realizar un diagnóstico y a enunciar unas medidas de acción; y es una investigación-acción empírica porque estudia un problema social mediante una acción que supone un cambio, y porque trata de valorar de forma sistemática los efectos producidos. Además (Arnal et al., 1992), es una investigación aplicada por su finalidad; es un estudio longitudinal por su alcance temporal; y es una investigación descriptiva por sus objetivos.

Asimismo hay que destacar que, en esta Primera Etapa, el investigador se sitúa como miembro pleno de la situación que analiza, pues el investigador es el profesor responsable de la asignatura en la que se implementa la propuesta didáctica; esta asignatura, *El currículum de matemáticas en Educación Primaria*, tiene carácter de asignatura obligatoria para los estudiantes de la Diplomatura de Maestro de la especialidad de Educación Primaria. Esta posición del investigador permite: sistematizar la planificación del proceso de enseñanza-aprendizaje, enriquecer el proceso de recogida de información, y observar qué avances y qué transformaciones se producen en la adquisición de los conocimientos de los futuros maestros (Richardson, 1994). Pero, si el investigador asume asume el doble papel de investigador experto en Didáctica de las Matemáticas y de profesor de un grupo natural de estudiantes, hay que tomar medidas que garanticen la fiabilidad y validez de la investigación.

La **fiabilidad** del trabajo, y de acuerdo con Goetz y Lecompte (1988), viene avalada por las siguientes actuaciones:

- Mejorar la *fiabilidad interna* utilizando descriptores de bajo nivel inferencial y facilitando la revisión del trabajo por otros investigadores.
- Mejorar la *fiabilidad externa* proporcionando toda la información relativa a los constructos y premisas analíticos sobre los que se asienta este trabajo; al status de investigador; a los métodos de recogida y análisis de datos; a la selección de los informantes; y a la situación en que se desarrolla la experiencia.

Para garantizar la **validez** de esta investigación se han tomado las siguientes cautelas (Goetz y Lecompte,1988):

- Incrementar la *validez interna* mediante el el análisis y comparación permanente de los datos; desarrollar la investigación en un escenario natural; y cuestionar permanentemente la actuación del investigador.
- Mejorar la *validez externa* mediante una descripción lo más rica, profunda y detallada posible de todo el proceso.

### 5.2. *Fases de la primera etapa*

Esta Etapa tiene la clara intencionalidad formativa de incrementar la comprensión de los futuros maestros sobre los números racionales, y reflexionar sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje seguido. Seguidamente incluimos una breve descripción de los aspectos más relevantes de esta Etapa, organizando la información en torno a las cuatro fases que contempla la metodología de Investigación-Acción:

#### 5.2.1. *Fase de planificación*

Como resultado de las observaciones y reflexiones realizadas y de la correspondiente evaluación de las intervenciones curriculares previas surge la propuesta didáctica definitiva; dicha propuesta se estructura según modelo curricular en: objetivos, contenidos, metodología, evaluación, y criterios para la actuación en el aula

Los *objetivos* que se persiguen con esta propuesta didáctica se sintetizan en: concretar un modelo de aprendizaje, significar a la fracción como cociente partitivo, construir dos sistemas de representación, significar a las expresiones decimales como cantidades de magnitud, y establecer conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal de las fracciones a través de los sistemas de representación estudiados.

Los *contenidos* se agrupan en los cinco temas siguientes:

Tema 1.- Concreción del modelo

Se define el modelo de aprendizaje caracterizado por: unos objetos (tortillas españolas de igual radio), una magnitud medible acompañada de la unidad de medida (superficie, la unidad de medida es la superficie de una tortilla), y unas acciones (repartir de forma igualitaria). En este modelo se pueden significar las relaciones de equivalencia y de orden, así como las operaciones y el cálculo del resultado de suma, resta, producto y cociente por un número natural; no se pueden significar el producto ni el cociente.

Tema 2.- Sistema de representación polinómico unitario

Al cuantificar el resultado de un reparto, realizado por fases y aplicando el criterio de la mayor parte, surge este sistema de representación en el que todo par de números naturales (a,b), b ¹ 0, admite una representación única de la forma:

0 si a = 0;

c + **¡Error!** + **¡Error!** + ... + **¡Error!** si a $\neq$ 0

El conocimiento y cumplimiento de las normas sintácticas, y la evaluación semántica de estas expresiones en el modelo propuesto permiten significar y caracterizar las relaciones de orden. También se pueden significar operaciones entre estas expresiones, aunque el cálculo del resultado de dichas operaciones no sea algoritmizable.

Tema 3.- Expresiones polinómicas unitarias y fracciones,

Al expresar el resultado de un reparto en una sola fase aparece la fracción con significado de cociente partitivo; y al hacerlo en varias fases aparece la expresión polinómica unitaria. La certeza de que la cantidad resultante de una reparto es invariable permite identificar las expresiones fraccionarias y polinómicas unitarias, permite conceptualizar la fracción como recuento de partes de unidad de igual tamaño, y como suma de partes de partes de unidad de tamaños diferentes.

El hecho de significar la fracción como cociente partitivo posibilita que los estudiantes reelaboren su mapa conceptual sobre las fracciones, dotando de significado a las relaciones y operaciones a través del modelo, y justificando las técnicas de cálculo del resultado de las operaciones desde el mismo modelo.

Tema 4.- Sistema de representación polinómico decimal

Al modificar la técnica de reparto, en el sentido de hacer repartos igualitarios por fases, con el procedimiento de la mayor parte, y con fraccionamientos únicamente en 10 partes iguales, aparece el sistema polinómico decimal: a todo par de números naturales (a,b), a π 0 y b π 0, se le asocia, de forma única, una de estas dos expresiones:

$c+a_1$ **¡Error!**+$a_2$**¡Error!**+$a_3$**¡Error!**+...+$a_s$**¡Error!**; a**¡Error!** $\in$ N,,0 $\leqq a_1 .., a_s \leqq 9$

$c+a_1$ **¡Error!**+$a_2$**¡Error!**+...+$a_s$**¡Error!**+(a,b)**¡Error!** a**¡Error!** $\in$ N,,0 $\leqq a_1 .., a_s \leqq 9$

Las normas sintácticas y la evaluación semántica presentan diferencias sustanciales respecto a las del sistema polinómico unitario. Pero, de forma similar, a través del modelo propuesto se pueden significar y caracterizar las relaciones de orden; asimismo, se pueden significar operaciones entre estas expresiones, siendo algoritmizable el cálculo del resultado de dichas operaciones solamente si se operan expresiones polinómicas decimales con un número finito de sumandos.

Tema 5.- Notación decimal

Al economizar la escritura de expresiones polinómicas decimales aparece la notación decimal, con significado de resultado de un reparto igualitario; notación que utiliza el principio del valor posicional para evitar la escritura del tamaño de las partes. Y con este significado se reelaboran los conocimientos de los estudiantes sobre las relaciones y operaciones entre notaciones decimales positivas.

En cuanto a la *metodología* destacamos que se priorizan el trabajo individual y la discusión en pequeño y gran grupo. Las intervenciones del profesor quedan limitadas a la presentación de la tareas, a la participación en las discusiones y a la formulación de conclusiones; además, atenderá individualmente las preguntas de los estudiantes o dará respuestas públicas cuando varios estudiantes formulen la misma pregunta.

5.2.2. *Fase de acción*

o Se implementa la programación diseñada, introduciendo las modificaciones surgidas de las observaciones de aula, y de acuerdo con las decisiones del equipo investigador. La implementación se realiza con un grupo natural de estudiantes de Maestro, matriculados en la asignatura "*El currículum de matemáticas en Educación Primaria*", asignatura de 8 créditos y obligatoria en la especialidad de Educación Primaria; se imparte en la Escuela Universitaria de Profesorado de E.G.B. de Zaragoza y el investigador es profesor responsable de la misma.

· Los estudiantes tienen que dar respuestas a las tareas que se les presentan, en hojas separadas, siendo las respuestas individuales. Las tareas propuestas son de dos tipos:

# *Cuestiones de investigación*: su intencionalidad es la de enfatizar el significado de las ideas matemáticas; son trabajos cuya resolución exige atender prioritariamente a aspectos conceptuales. Se presentan a los estudiantes en forma de tareas y algunas de ellas exigen que en su resolución se expliciten los significados de ideas nuevas o de ideas ya conocidas pero presentadas desde una perspectiva diferente; en otras tareas el estudiante tiene que formular resultados generales a partir de observaciones particulares; mientras que en otras tareas se demanda del estudiante un análisis sobre aspectos estructurales.

Tarea 1. ¿Puede haber repartos equivalentes? Justifica tu respuesta.

Tarea 2. ¿Cómo se interpreta, en el modelo de trabajo, la expresión (a:b)+(c:d)? ¿Cómo se obtiene el resultado de esa suma,

Tarea 3. Justifica, en el modelo, la expresión n x (c : d), siendo n un número natural. Calcula el resultado.

Una vez que que los estudiantes han finalizado las tareas propuestas, hay una reflexión colectiva sobre los resultados obtenidos que concluye con la institucionalización de las ideas matemáticas puestas de manifiesto en la sesión.

# *Fichas de trabajo*: su finalidad es la de consolidar la utilización de técnicas; por tanto, este tipo de trabajos incide en los aspectos procedimentales. Se presen-

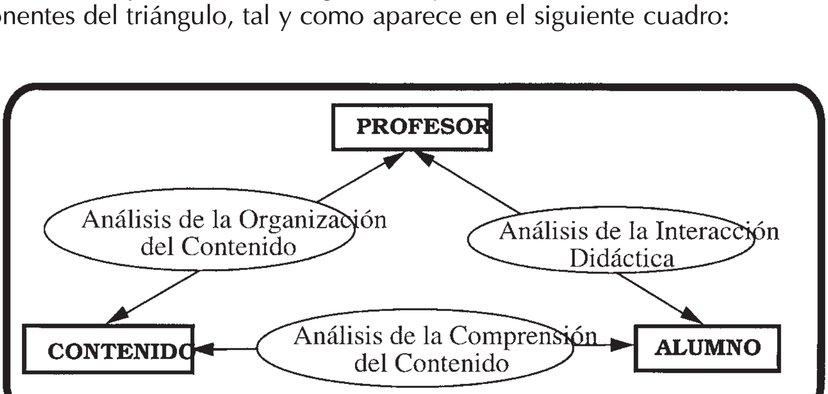
tan, en general, después de que el profesor haya caracterizado públicamente la técnica de trabajo que se utilizará en las sesiones siguientes.

| |
|---|
| Actividad 1: Repartir de forma igualitaria 5 tortillas entre 11 personas. Expresa el resultado mediante una representación gráfica y una representación simbólica |

Estas actividades se proponen después de que el profesor haya caracterizado públicamente la técnica de trabajo que se utilizará en esa sesión de clase.

5.2.3. *Fase de observación*

- Una buena parte de los datos de la experimentación se obtienen de las producciones escritas de los estudiantes, y de las grabaciones en audio y en video de algunas de las sesiones. El profesor, en su calidad de participante, también aporta datos sobre la experimentación de la propuesta didáctica; datos que figuran en el Diario de Clase, documento que refleja y valora todas las incidencias que ocurren en cada una de las sesiones de la fase experimental.
- La implementación de nuestra propuesta didáctica se desarrolla con unos estudiantes determinados y en un contexto concreto y esta consideración es determinante para la organización de los datos. La inserción en el marco curricular es obligada, puesto que nuestro trabajo se encuentra delimitado por el entorno sociocultural de las personas cuya formación estudia; el tipo de formación que se propone; las peculiaridades de las personas, medios y recursos que configuran la institución social en la que se produce esta formación; las necesidades formativas que se quieren cubrir y el control que se realiza de la formación alcanzada (Rico, 1990a).
- En la planificación del currículum se consideran al profesor, los alumnos, el contenido y la institución como componentes o dimensiones del sistema curricular (Rico, 1990b; Romberg, 1992). En esta investigación nos situamos dentro de ese nivel de reflexión para centrarnos en el análisis de las componentes del triángulo didáctico, de las interacciones que se presentan en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Considerando al aula como el marco en que se desarrolla la investigación, se identifican tres componentes interrelacionadas: contenido, alumnos y profesor. La información que vamos a recoger corresponde a las relaciones entre las tres componentes del triángulo, tal y como aparece en el siguiente cuadro:




Cuadro 2. *Relaciones entre las tres componentes del triángulo didáctico*

- Para realizar el análisis de los datos son necesarias unas categorías o unidades de análisis, que sistematicen la información sobre las relaciones entre el contenido, el profesor y los alumnos. Estas unidades son de tres tipos y se sustentan en las ya establecidas por Romero (1995) que, a su vez, eran una adaptación de las que elaboró Castro (1994):
    - Unidades de Análisis para la Organización del Contenido: permiten estudiar la organización y secuenciación de los contenidos que se tratan en el proceso didáctico.
    - Unidades de Análisis para la Comprensión del Contenido: permiten sistematizar los fenómenos de comprensión del contenido matemático por parte de los estudiantes, caracterizando los factores que facilitan o dificultan tal comprensión.
    - Unidades de Análisis de la Interacción Didáctica: permiten abordar el estudio de las interacciones que han tenido lugar entre el profesor y los futuros maestros a lo largo del proceso didáctico y su relación con la construcción del conocimiento.

5.2.4. *Fase de reflexión*

- En la fase de observación se han recogido y organizado los datos de las fases anteriores. El trabajo último será el de analizar dichos datos, valorarlos, extraer conclusiones y tomar las decisiones oportunas que se deriven.
- La reflexión debe encaminarse a determinar aquellos aspectos de la organización del contenido que deben mejorarse; a determinar los grados de comprensión alcanzados por los estudiantes y el modo de superarlos; y a determinar aquellos aspectos de la interacción didáctica que han de mantenerse o modificarse. Es un proceso de análisis y evaluación.

5.3. *Metodología de la segunda etapa*

La preparación de futuros profesores de matemáticas tiene una doble dimensión: la formación en matemáticas y la formación para su trabajo como docentes. En esta Etapa queremos hacer indagaciones acerca de la utilidad profesional que los maestros en formación han obtenido de la propuesta de enseñanza sobre expresiones fraccionarias y decimales. Estas indagaciones giran en torno a dos componentes principales: proponer tareas que permitan analizar cómo los futuros maestros resuelven trabajos profesionales de detección de errores y concepciones inadecuadas (Chappell y Thompson, 1994); y analizar si la experiencia adquirida en la Primera Etapa permite a los estudiantes construir un repertorio de estrategias educativas Watson (1995).

Con el fin de alcanzar nuestros propósitos se realiza un estudio de casos exploratorio siguiendo la técnica de entrevistas (Cohen y Manion, 1990), y cuyos aspectos más relevantes reseñamos a continuación:

Primer paso: **establecer el objetivo de la investigación**.

La finalidad de esta Segunda Etapa es hacer indagaciones sobre las relaciones que se pueden detectar, respecto al tópico matemáticos fracciones y decimales, entre:

- Los conocimientos manifestados en las sesiones de clase por los estudiantes sobre la propuesta didáctica, y

- las reflexiones de estos mismos estudiantes al proponerles tareas relacionadas con la instrucción de escolares.

Segundo paso: **preparar el programa de la entrevista**.

Las entrevistas que se realizan con los estudiantes seleccionados responde a las siguientes características (Martorell, 1997): según los aspectos formales, es semiestructurada; según el tipo de preguntas, es abierta y cerrada; según el tipo de respuesta, es mixta; según la finalidad, es prospectiva; y según el marco teórico de referencia es directiva.

Las entrevistas se articulan en torno a 5 tareas supuestamente realizadas por escolares para que los entrevistados valoren los resultados de las mismas, ofrezcan explicaciones a los escolares, y diseñen actividades para proseguir la instrucción. Estas tareas abordan los siguientes contenidos matemáticos: relaciones de orden entre repartos; justificación del algoritmo de la suma de fracciones; simbolización del resultado del reparto mediante expresiones polinómicas unitarias; paso de la notación fraccionaria a la decimal mediante el algoritmo de la división; y obtención del resultado del cociente entre un número periódico y un número natural.

Tercer paso: **establecimiento y dirección de la entrevista**.

- En primer lugar se seleccionaron 3 estudiantes de acuerdo con dos criterios: asistencia de, al menos, el 75%, las sesiones de clase; y grado de comprensión de la acción de repartir de forma igualitaria. Los seleccionados son:

  Estudiante A: muestra una correcta interpretación del modelo, lo que le permite analizar adecuadamente las expresiones simbólicas. Es el número 34 de la lista de clase.

  Estudiante B: interpreta correctamente la acción, por lo que no utiliza con seguridad el modelo propuesto. Es el alumno número 10 de la lista de clase.

  Estudiante C: interpreta de forma incorrecta la acción de reparto, por lo que no analiza adecuadamente las expresiones simbólicas. Es el alumno nº 24.

- En segundo lugar, se concretan las actuaciones que se llevan a cabo en las cuatro fases clásicas que comprende el desarrollo de la entrevista:

  * En la fase de preparación se habilita una de las aulas-seminario existentes en el centro, y que conocen los alumnos.

  * En el inicio de la entrevista se reducirá la incertidumbre del futuro maestro en relación a los objetivos, el proceso y el contenido de la entrevista.

  * El entrevistador, además de las preguntas preestablecidas, realizará aquellas otras que considere oportunas.

  * El final de la entrevista servirá para agradecer al estudiante su colaboración, presentarle un resumen de lo realizado y permitirle que aclare dudas o que realice comentarios sobre el trabajo efectuado.

  · En tercer lugar, y teniendo en cuenta que la entrevista es prospectiva, el entrevistador ha de recabar toda la información del entrevistado para llegar al conocimiento más objetivo posible de la situación, por lo que tendrá en cuenta que: todas las respuestas del entrevistado estarán debidamente razonadas; debe eludir los juicios de valor sobre las respuestas del entrevistado; tiene que reducir la incertidumbre inicial del entrevistado; y tiene que hacer indagaciones para lograr la dentificación y naturaleza de las ideas erróneas surgidas en la entrevista.

Cuarto paso: **realización de las entrevistas.**

Las tres entrevistas se realizaron en sesiones de, aproximadamente, 1 hora y 45 minutos. Aunque a los estudiantes se les ofreció hacer un descanso intermedio todos mostraron sus deseos de no interrumpir la sesión; y todos ellos mostraron gran interés y deseos de colaborar en el desarrollo de la entervista.

Quinto paso: **recogida de datos.**

Los datos se obtienen del diario del profesor, de las producciones escritas de los entrevistados y de las grabaciones realizadas en las sesiones de clase; estos datos servirán para informar de las conexiones existentes entre la comprensión mostrada por estos estudiantes y la realización de las tareas sobre trabajos de escolares que se proponen.

Para estudiar los datos se han elaborado 15 Unidades de Análisis, unidades que fueron elaboradas antes de la celebración de las entrevistas y son fruto de la experiencia del investigador y del análisis y observaciones en la Primera Etapa de nuestra investigación. Estas unidades estudian, para cada una de las 5 tareas propuestas, los argumentos sobre la veracidad o incorrección de las respuestas de los escolares, las justificaciones sobre las explicaciones que ofrecen a los escolares, y los razonamientos sobre las actividades que proponen para proseguir la instrucción.

Sexto paso: **análisis e interpretación de los datos.**

I. Sobre la revisión de las tareas de los escolares

Cuanto más débil es la comprensión del modelo por parte de estos estudiantes, más deficiente es la detección de los errores cometidos por los escolares.

II. Sobre las explicaciones que ofrecen a los escolares.

Cuanto más robusta es la comprensión del modelo más se opta por explicaciones que incidan en el origen del error; mientras que cuanto más débil es esa comprensión, más se actúa en función de los conocimientos de los futuros profesores.

III. Sobre las actividades que proponen a los escolares

Los futuros maestros tiene pocos recursos para elaborar propuestas de trabajo para los escolares; su propia experiencia como aprendices es el único referente que utilizan para la secuenciación del aprendizaje.

## 6. Conclusiones de la primera etapa de la investigación

Los resultados de nuestro trabajo confirman la primera de las hipótesis sobre la viabilidad de una Propuesta Didáctica que incremente las conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal de los Números Racionales positivos de los estudiantes para maestros, con las precisiones siguientes:

**A) Potencialidades más importantes detectadas.**

- A lo largo de la implementación los futuros profesores van admitiendo el modelo como recurso didáctico adecuado para construir significados y para validar relaciones simbólicas. Este proceso de aceptación es lento y costoso porque los estudiantes están más habituados a la aplicación de técnicas de cálculo, que a la evaluación semántica de las expresiones que manipulan.
- La cuantificación del reparto igualitario realizado por fases y aplicando el criterio de la mayor parte, permite que los estudiantes construyan sistemas de representa-

ción ante la necesidad de simbolizar las acciones realizadas en el modelo y, en consecuencia, cómo tal simbolización sólo es posible desde el estricto cumplimiento de las normas sintácticas. El trabajo resulta especialmente interesante para mostrar que la comprensión de las ideas matemáticas se facilita con la manipulación de los objetos del modelo utilizado.

- La propuesta didáctica resulta adecuada para dotar de significado a las relaciones y operaciones entre expresiones polinómicas unitarias mediante la visulaización de acciones realizadas en el modelo propuesto. Igualmente resulta adecuada para justificar, mediante razonamientos lógicos, las expresiones simbólicas que caracterizan las relaciones entre estas expresiones; así como para evidenciar que las operaciones pueden tener sentido y no existir algoritmos de cálculo del resultado.
- El modelo se mostró útil para dotar de significado a las expresiones fraccionarias como resultados de repartos de una sola fase, aun cuando los conocimientos previos de los estudiantes sobre la fracción como relación parte-todo obstaculizan este significado.
- Los estudiantes han podido constatar que variar las acciones producen nuevos sistemas de representación; sistemas que presentan características propias, tanto en la sintaxis como en la evaluación semántica.
- Aquellos estudiantes que han conectado la notación decimal con la expresión polinómica decimal han sido capaces de trasladar los resultados ya obtenidos respecto del los números periódicos y de los números decimales. Sin embargo, hay otros estudiantes que, al aparecer la notación decimal, prefieren trabajar con entes numéricos abstractos, sin referencia al modelo propuesto, lo que provoca que den respuestas inadecuadas porque recurren a las relaciones numéricas que recuerdan y de las que no tienen certeza de su validez.
- Los estudiantes son capaces de dar significado, dentro del modelo, a operaciones entre notaciones decimales. La operación que presenta mayores dificultades es la multiplicación, tanto de números decimales como de números periódicos, porque deben superar el obstáculo del significado de la multiplicación de números naturales.

**B) Dificultades más importantes detectadas.**

- Las tareas propuestas sobre el reparto de unidades no fraccionables refuerzan la asociación de las nociones de repartir y dividir en partes iguales (fraccionar), hecho que obstaculiza la interpretación del reparto como cantidad de magnitud recibida por uno cualquiera de los intervinientes en el reparto, y cuya medida se efectúa por la adición de las partes de unidad resultantes del fraccionamiento de la unidad o de partes de la unidad.
- Existen más dificultades de las inicialmente previstas en la simbolización del resultado del reparto por medio de una expresión polinómica unitaria; dificultades provocadas por las peculiaridades de elementos intervinientes: un proceso de reparto que es complejo, una medida de partes de partes de la unidad que es poco usual, una simbolización de las acciones que debe atender a múltiples aspectos,... Para superar estas dificultades se arbitraron sesiones de debate, no contempladas en la propuesta didáctica, con la intención objetivo de combatir los errores detectados.
- Los conocimientos previos de los estudiantes de la fracción como relación parte-todo obstaculiza el propósito de establecer conexiones entre dos significados para

una misma representación simbólica; conexiones que impliquen ampliación de significados y no superposición de unos sobre otros.

- Los conocimientos previos de los estudiantes sobre la noción de infinitésimo obstaculizan la comprensión de los procesos de reparto en infinitas fases. Si bien admiten la existencia de entes numéricos muy pequeños, tal situación se desvanece cuando hace su aparición el número-medida, cuando tales entes numéricos se asocian a cantidades de magnitud continua; en estos casos los estudiantes se limitan a aceptar resultados "teóricos".
- La utilización de números con infinitas cifras provoca la aparición de ideas erróneas sobre la constitución de dichos entes numéricos, como la existencia de cifras más allá de la "posición infinito".
- La utilización de las calculadoras en el trabajo con números periódicos abre un nuevo terreno de trabajo con peculiaridades específicas: escribir como números decimales los datos expresados como números periódicos, obtener el resultado de una operación con números decimales, y traducir el resultado de la calculadora al contexto del problema. Todo ello provoca dudas en el alumno: ¿cómo se determina el periodo?, ¿por qué el resultado es difstinto en diferentes calculadoras?, si no aparecen cifras repetidas ¿el resultado es periódico o decimal?,...
- Las ideas erróneas sobre el significado del 0 no se han erradicado totalmente con ninguno de los sistemas de representación utilizados. Sería necesario, por tanto, abordar el problema desde otra perspectiva para que el 0 se interprete como medida de cantidad de magnitud, y no como expresión de la imposibilidad de realizar las acciones.

## 7. Conclusiones de la segunda etapa de la investigación

El análisis de las informaciones obtenidas en la Segunda Etapa nos permiten confirmar las relaciones entre los conocimientos personales de los futuros maestros y su actuación profesional (Hipótesis Dos), en el sentido de que en un mayor y mejor dominio conceptual se corresponde con una mayor competencia en determinadas tareas profesionales, con las precisiones que reseñamos a continuación:

**Sobre la revisión de las tareas de los escolares.**

La actuación profesional de los estudiantes para maestro condiciona la revisión de las tareas escolares; cuanto más débil es la comprensión del modelo por parte de estos estudiantes, más deficiente es la detección de los errores cometidos por los escolares:

- Si el estudiante para maestro demostró una buena comprensión del modelo intenta interpretar la respuesta del escolar desde un modelo distinto del que utiliza dicho escolar, pero en el que este estudiante se desenvuelve con seguridad.
- Si el estudiante mostró algunas deficiencias en la comprensión del modelo intenta trabajar en el mismo modelo que el escolar, pero actúa con inseguridad.
- Si el estudiante para maestro mostró grandes deficiencias en la comprensión del modelo acepta los errores del escolar como resultados correctos.

**Sobre las explicaciones que ofrecen a los escolares.**

Si los estudiantes tiene que elegir entre las tres posibles explicaciones que le ofrece el entrevistador, actúan del siguiente modo:

- Si el estudiante para maestro demostró una buena comprensión del modelo elige una explicación que se sustente en objetos físicos.
- Si el estudiante mostró deficiencias en la comprensión del modelo elige una explicación con objetos manipulables si él mismo entiende dicha explicación.
- Si el estudiante para maestro mostró grandes deficiencias en la comprensión del modelo elige explicaciones sustentadas en la manipulación de símbolos.

Y si son los entrevistados los que construyen una explicación para que el escolar supere el error deetectado, sus actuaciones son distintas: se incide más en el origen del error cuanto mayor es la comprensión del modelo; mientras que una débil comprensión del modelo lleva a la simple exposición de los resultados correctos.

**Sobre las actividades que proponen a los escolares.**

En nuestro trabajo de indagación no obtuvimos datos suficientes por cuanto los futuros maestros primaron la detección y corrección de errores frente al diseño de actividades para proseguir el proceso instructivo. Las informaciones disponibles tan solo permiten aseverar que los futuros maestros tienden a reproducir la secuenciación del aprendizaje con la que ellos aprendieron.

## 8. Referencias Bibliográficas

ABRAIRA, C. F. y FRANCISCO, M. A. (coord.), (1997). *II Simposio. El curriculum en la formación inicial de los profesores de Primaria en el Area de Matemáticas*. León: Facultad de Educación..

ARNAL, J., RINCÓN, D. DEL y LATORRE, A. (1992). *Investigación educativa. Fundamentos y metodología*. Barcelona: Labor.

BENOIT, P., CHEMLA, K y RITTER, J. (Ed.) (1992). *Histoire de fractions, fractions d'historie*. Berlin: Birkhäusen Verlag.

BLANCO, L. y CRUZ, M. C. (coord.), (1997). *Aportaciones al curriculum en la formación inicial de los profesores de Primaria en el Area de Matemáticas*. I.C.E., Universidad de Leon.

BOYD, B. (1992). *The relationship between mathematics subject matter knowledge and instruction: a case study*. (Tesis no publicada). California: San Diego State University.

BROUSSEAU, G. y BROUSSEAU, N. (1987). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatorie*. I.R.E.M. de Bordeaux I

CALDWELL, J. H. (1995). Communicating About Fractions with Pattern Blocks. *Teaching Children Mathematics*, (2), 3 pp.156-161.

CARPENTER, T. P.; FENNEMA, E. y ROMBERG, T. A. (edit.) (1993). *Rational Numbers. An Integration of Research*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers

CASELL, C. y SYMON G. (Eds.) (1994). *Qualitative methods in organizacional research*. Londres: Sage.

CASTRO, E. (1994). *Exploración de Patrones Numéricos mediante Configuraciones Puntuales. Estudio con escolares de Primer Ciclo de Secundaria* (12-14 años). Tesis Doctoral, Universidad de Granada.

CASTRO, E., RICO, L. y ROMERO, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias*, (15), 3, pp. 361-371.

CENTENO, J. (1988). *Números decimales ¿Por qué? ¿Para qué?* Madrid: Síntesis.

CHAPELL, M. F. y THOMPSON, D. R. (1994). Modeling the NCTM Standars: Ideas for Initial Teacher Preparation Programs. En Aichele, D. B. y Coxford, A. F., *Professional Development for Teachers of Mathematics*. Reston (Virginia): N. C.T.M., pp. 186-199.

COHEN, L. y MANION, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.

DENZIN, N. y LINCOLN, Y. (edit). (1994). *Handbook of Qualitative Research*. California: Sage Publications.

DUVAL, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine*. Berna: Peter Lang, S.A.

ELLIOT, J. (1990). *La Investigación-Acción en Educación*. Madrid: Morata.

FEFERMAN (1989). *The number systems. Foundations of Algebra and Analysis*. New York: Chelsea Publishing Company.

FLORES, P. (1996). Creencias y concepciones de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje. *Uno, revista de didáctica de las matemáticas*, (8), pp. 103-111.

GAIRÍN, J. (1987). *Las actitudes en educación. Un estudio sobre educación matemática*. Barcelona: PPU.

GIMÉNEZ, J. (1991). *Innovación metodológica de la didáctica especial del número racional positivo. Diagnosis cognitiva y desarrollo metodológico*. Tesis doctoral, Universidad Autónoma de Barcelona.

GROFF, P. (1996). Is Teaching Fractions a Waste of Time? *The Clearing House. A Journal for middle schools, junior and senior schools*. (69), 3, pp. 177-179.

HITT, F. (1988). Systemes Sémiotiques de Représentation liés au Concept de Fonction. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol 6, pág 7-26.

HUNTING, R. P. y KORBOSKY, R. K., (1990). Context and process in fraction learning. *International Journal of Mathematics Education Science and Technology*, (21), 6, pág. 929-948.

JANVIER, C. (edi.) (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, (New Jersey): Lawrence Erlbaum Associates.

LESH, R. (1997). Matematización: La necesidad "real" de la fluidez en las representaciones. *Enseñanza de las Ciencias*, (15), 3, pp. 377-391.

LLINARES, S. y SÁNCHEZ, M. A., (1988). *Fracciones*. Madrid: Síntesis.

MARCK, N. K. (1995). Confounding Whole-Number and Fraction Concepts When Building on Informal Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, (26), 5, pp. 422-441.

MARTORELL, M. C. y GONZÁLES, R. (Ed.), (1997). *Entrevista y consejo psicológico*. Madrid, Síntesis.

MCNERNEY, C. (1994). A model preservice program for the praparation of Mathematics Specialist in the Elementary School. En Aichele, D. B. y Coxford, A. F., *Professional Development for Teachers of Mathematics*. Reston (Virginia): N.C.T.M, pp, 144-151.

National Council of Teachers of Mathematics, (1991). *Professional standars for teaching mathematics*. Reston, Virginia.

OTT J. M. et al, (1991). Understanding Partitive Division of Fractions. *Arithmetic Teacher*, (39), 2, pp. 7-11

OWENS, D. T. (edit), (1993). *Research ideas for the classroom. High school mathematics*. New York: Macmillan Publishing Company.

PITKENTHLY, A. y HUNTING, R. (1996). A review of recent research in the area of initial fraction concepts. *Educational Studies in Mathematics*. (30), 1, pp. 5-38.

PUIG, L. y CALDERÓN, J. (1996). *Investigación y Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia-CIDE.

RICO, L. (1995). *Conocimiento numérico y formación del profesorado*. Universidad de Granada.

ROCKE, J. (1995). A Common-Cents Approach to Fractions. *Teaching Children Mathematics*, (2), 4, pp. 234-236.

ROMERO, I. M. (1995). *Introducción del Número Real en Educación Secundaria*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada

SÁNCHEZ, M. V. (1995). La formación de los profesores y las matemáticas. Algunas implicaciones prácticas de las investigaciones teóricas. *Revista de educación*. (306), pp. 397-426.

STREEFLAND, L. (1991). *Fractions in realist mathematics education. A paradigm of developmental research*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

THOMPSON, C. y WALKER, V. (1996). Connecting Decimals and Other Mathematical Content. *Teaching Children Mathematics*, (2), 8, pág. 496-502.

VAN LUIT, J. E. V. (edit.) (1994). *Research on learning and instruction of mathematics in kindergarten and primary school*. Doetinchem, Holanda: Graviant Publishing Company.