Aula Abierta 2012, Vol. 40, núm. 3, pp. 23-32
ICE. Universidad de Oviedo
ISSN: 0210-2773

Resolución de problemas aritméticos: Conocimiento conceptual y nivel de competencia en matemáticas

Josetxu Orrantia, David Múñez, María Fernández y Laura Matilla
Universidad de Salamanca (España)

Antes de la enseñanza formal se resuelven muchos problemas aritméticos con estrategias informales que modelan directamente el enunciado. Cuando los problemas no permiten el uso de tales estrategias, los niños necesitan desarrollar cierto conocimiento conceptual (conmutatividad, relación inversa entre operaciones,..) para resolver los problemas. En el presente trabajo diseñamos problemas con la misma estructura (aditiva) que bien permitían el modelado directo de la Situación (problemas SI) o bien requerían hacer uso del Conocimiento Conceptual (problemas CC) para su resolución. Los problemas fueron aplicados a estudiantes de primer ciclo de ESO (12 y 13 años) con y sin dificultades en matemáticas y a estudiantes universitarios. Los resultados mostraron que los problemas SI fueron más sencillos de resolver que los problemas CC para todos los participantes. Además, este efecto fue mucho más pronunciado para los estudiantes de ESO con dificultades. Estos resultados sugieren dos conclusiones. Por un lado, después de años de experiencia resolviendo problemas, los estudiantes (incluso los adultos) evitan utilizar su conocimiento conceptual si pueden utilizar una estrategia que modele directamente el enunciado. Por otro lado, los estudiantes menos competentes en matemáticas muestran un uso poco flexible e ineficiente del conocimiento conceptual necesario para resolver los problemas aritméticos.
Palabras clave: Resolución de problemas aritméticos, conocimiento conceptual, dificultades en matemáticas.

Word problem solving: conceptual knowledge and differences in mathematical ability. Before formal schooling, children solve word problems with informal strategies modeling directly the situation described in the text of the problem. When problems do not allow to use such strategies, children need to apply the conceptual knowledge (commutativity, inversion...) needed to solve the problem. In the current study, students of secondary education (12 to 13 years old) with/without mathematical difficulties and undergraduate students (19 to 21 years old) solved word problems in two versions involving the same wording. The first version could be solved by modeling the situation described (SI problems), and in the second version children needed to use their conceptual knowledge (CC problems). Results indicated that, despite the reduced difficulty of the problems, SI problems were easier to solve than CC problems for all the participants. Furthermore, this effect was even much more pronounced for secondary education students with mathematical difficulties. These findings suggest two conclusions. First, after years of experience solving problems, students (even adults) avoid using their conceptual knowledge if they can use a strategy that models directly the situation. Secondly, less proficient students show a rigid and inefficient use of the conceptual knowledge needed to solve arithmetic problems even when procedural knowledge is available.
Keywords: Word problem solving, conceptual knowledge, mathematical disabilities.

La resolución de problemas aritméticos es una actividad compleja en la que se construyen diferentes niveles de representación, tanto matemáticos como no matemáticos. En el presente estudio pretendemos analizar el rol

Fecha de recepción: 14/06/2012 • Fecha de aceptación: 17/08/2012
Correspondencia: Josetxu Orrantia Rodríguez
Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación.
Facultad de Educación. Universidad de Salamanca.
Pso. Canalejas, 169. C.P. 37008, Salamanca (España).
Correo-e: orrantia@usal.es

que el nivel representacional menos matemático y más cualitativo juega en el proceso de resolución de un problema. Dicho nivel se relaciona con la comprensión de la situación denotada por el enunciado, el llamado modelo de la situación de problema (e.g., Kintsch y Greeno, 1985).

Antes de la enseñanza formal de la aritmética, los niños desarrollan numerosas estrategias informales para resolver exitosamente diferentes situaciones problemáticas. Para ello, los niños representan o modelan directamente la situación reflejada en el enunciado. Así, y aunque muchos niños sean incapaces de resolver tareas como "3 + 2 = ?" o "cuántas son tres más dos", cuando dichas operaciones se presentan en el contexto de un problema como "si tenías tres caramelos y te dan dos caramelos más, ¿cuántos caramelos tienes ahora?" seguramente que esos mismos niños tendrán pocas dificultades en resolverlo por modelado directo, esto es, a partir de modelar directamente la situación del problema con objetos físicos, como cubos, los dedos o simplemente dibujando sobre el papel. Los objetos son utilizados para representar la situación y los números de las cantidades dadas en la misma, así como para ayudar al niños a llevar a cabo el procedimiento para llegar a la solución (e.g., hacen un conjunto de 1, 2, 3, objetos, entonces añaden, 1, 2, objetos, y entonces cuentan el total -cinco). Con el tiempo, y especialmente con el desarrollo conceptual del conteo, los niños van descubriendo, bien espontáneamente o bien desde la inducción, estrategias de conteo más sofisticadas, abstractas y eficientes que les permiten llegar más rápidamente a la resolución de la situación problemática. Además, hay una transición desde la utilización de materiales concretos o dedos al conteo verbal o mental, por lo que los niños comienzan también a desarrollar procedimientos que les permitan llevar la cuenta de los elementos contados (e.g., tres; cuatro (que es uno más), cinco (que es dos más -cinco). La utilización de estrategias de conteo para resolver operaciones y situaciones problemáticas permite a los niños ir creando representaciones de *hechos numéricos* en la memoria. Una vez formadas, estas representaciones apoyan la recuperación del resultado de una operación desde la memoria (siete más nueve son dieciséis).

Sin embargo, existen situaciones problemáticas en las que no es factible apelar a estrategias que modelan directamente la situación del problema. En estos casos es necesario construir una representación alternativa que incluye utilizar, cuando los problemas son de estructura aditiva, cierto conocimiento conceptual relacionado con las propiedades aditivas básicas. Este conocimiento conceptual refleja la comprensión de principios o propiedades tales como la propiedad conmutativa o el principio de inversión. Por ejemplo, en el caso de la suma, conmutatividad se refiere a la propiedad de que las operaciones que contienen los mismos términos en un orden diferente tienen la misma respuesta (e.g., si a + b = c, entonces b + a = c), y el principio de inversión se refiere a la relación complementaria entre la suma y la resta (e.g., si a + b = c, entonces c – b = a); este principio de inversión subyace a la estrategia más ampliamente utilizada para restar (por ejemplo, para 13 – 6 = 7, "Yo sé que 13 es 6 + 7), no solo en niños (e.g., Carpenter y Moser, 1984) sino también en adultos (e.g., Orrantia, Rodríguez, Múñes, y Vicente, 2012).

Así, ante problemas como "Si Pedro ha ganado 3 canicas en una partida, y al final de la partida tiene 8 canicas, ¿cuántas canicas tenía antes de la partida", la estructura semántica no permite modelar directamente la situación, ya que no se puede ejercer la acción de añadir una cantidad a otra cantidad que es desconocida. En este caso, la resolución implica hacer uso del principio de inversión que permite razonar que si a una cantidad le añadimos tres para dar lugar a la cantidad ocho, si a esta cantidad (ocho) le quitamos tres da lugar a la cantidad inicial (Orrantia, 2003). Más interesante es el hecho de que hay situaciones problemáticas que aun permitiendo modelar la situación, dicho modelado supone tal incremento del costo cognitivo que la resolución requiere la construcción de una representación alternativa que permita el uso de una estrategia eficaz. Por ejemplo, ante el problema "Si María tenía 3 canicas, y ganó 39 canicas más, ¿cuántas canicas tiene ahora?", los números implicados suponen que una estrategia que modele directamente el enunciado (un conteo de 39 pasos) es larga y difícil de controlar (e.g., 3, 4(1), 5(2), 6(3),…41(38), 42(39)) y por lo tanto poco efectiva. En este caso, utilizando la propiedad conmutativa se llega fácilmente al resultado (39 + 3).

En este contexto, es fácil imaginar que incluso problemas con la misma estructura semántica bien se puedan modelar o requieran el uso de conocimiento conceptual. En la Tabla 1 aparecen ejemplos de estos problemas, los cuales han sido utilizados en el presente estudio. Siguiendo a Brissiaud y Sander (2010), para cada tipo de problema (con la misma estructura) distinguimos entre problemas que con el modelado directo de la *SI*tuación (problemas SI) se pueden resolver fácilmente, y problemas en los que obtener una respuesta es difícil con una estrategia basada en la situación, pero fácil de obtener con el uso del *C*onocimiento *C*onceptual necesario para su resolución (problemas CC).

Una cuestión que se deriva de esta clasificación es que los problemas CC serán más difíciles de resolver que los problemas SI, especialmente para aquellos niños que aún no cuenten con el conocimiento conceptual necesario. Sin embargo, Brissiaud y Sander (2010) encontraron que incluso niños que han sido instruidos en el conocimiento aritmético y que tienen cierta experiencia resolviendo problemas (niños de 2º y 3º curso de Educación Primaria para los problemas de la Tabla 1) resolvieron los problemas SI más fácilmente que los problemas CC, lo que sugiere que ambos tipos de problemas no son resueltos de la misma manera, y que las estrategias basadas en la situación del problema se siguen utilizando incluso después de dos años de enseñanza en este tipo de problemas.

A la luz de estas consideraciones, el objetivo del presente estudio fue analizar hasta qué punto estas estrategias basadas en la situación se siguen utilizando en niños mayores y adultos, quienes muestran una ejecución casi perfecta en este tipo de problemas y cuentan con la experiencia necesaria para hacer un uso flexible y eficiente del conocimiento conceptual implicado en los mismos. Además, un segundo objetivo fue analizar la ejecución en estos problemas de alumnos que muestran dificultades en la aritmética.

Para ello, desarrollamos dos experimentos. En el *Experimento 1*, dos versiones (SI versus CC) de tres tipos de problemas que se resuelven con una suma o una resta (ver Tabla 1) se presentaron a alumnos del primer ciclo de Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) con distinto nivel de competencia matemática (alta versus baja) en función de si estaban incluidos o no en clases de apoyo educativo. Para que las estrategias basadas en la situación o en el conocimiento conceptual pudieran distinguirse, se leyeron los problemas a los participantes y se permitió solamente 5 segundos para dar la respuesta; de esta forma, los problemas CC solo se podían resolver accediendo rápidamente al conocimiento conceptual implicado en el problema. En el *Experimento 2*, los mismos problemas se presentaron a adultos (estudiantes universitarios). En este caso, los problemas se aplicaron a través de ordenador para analizar los tiempos de respuesta a cada tipo de problema.

Experimento 1

Participantes

Treinta y ocho alumnos (25 varones y 13 mujeres) con edades comprendidas entre los 12 y 15 años, y pertenecientes a una muestra total de 119 alumnos de cuatro clases de 1º y 2º de ESO, participaron en el presente experimento. La mitad de los participantes recibían apoyo educativo en el área de matemáticas y la otra mitad no recibía apoyo alguno.

Materiales

Veinticuatro problemas experimentales pertenecientes a las categorías de Cambio 1, Cambio 2, y Cambio 3 (según el esquema de clasificación de Riley, Greeno, y Heller, 1983), fueron incluidos en el presente estudio (ver Tabla 1).

Dentro de cada tipo de problema, los problemas fueron equivalentes y sólo difirieron en la situación planteada, el nombre de los protagonistas, la naturaleza de los objetos y el tipo

Tabla 1. *Ejemplo de estímulos utilizados en Experimento 1 y 2*

Orden	Problema	Formato	Ejemplo	Estrategias hipotéticas
Natural	Cambio 1	SI	¿Cuántas canicas tiene ahora Pedro, si al principio de la partida tenía 39 y luego ganó 3? ***39 + 3 = _***	39, 40 (1), 41 (2), 42 (3). Bajo coste cognitivo
		CC	¿Cuántas canicas tiene ahora Pedro, si al principio de la partida tenía 3 y luego ganó 39? ***3 + 39 = _***	Necesario aplicar la Propiedad Conmutativa.
	Cambio 2	SI	¿Cuántas canicas tiene ahora Pedro, si al principio de la partida tenía 42 y luego perdió 3? ***42 – 3 = _***	42, 41 (1), 40 (2), 39 (3). Bajo coste cognitivo
		CC	¿Cuántas canicas tiene ahora Pedro, si al principio de la partida tenía 42 y luego perdió 39? ***42 – 39 = _***	Necesario aplicar la Referencia a la Inversa.
	Cambio 3	SI	¿Cuántas canicas ganó Pedro en una partida, si al principio tenía 39 y al final tenía 42? ***39 + _ = 42***	39, 40 (1), 41 (2), 42 (3). Bajo coste cognitivo
		CC	¿Cuántas canicas ganó Pedro en una partida, si al principio tenía 3 y al final tenía 42? ***3 + _ = 42***	Necesario aplicar la Referencia a la Inversa.
Alterado	Cambio 1	SI	¿Cuántas canicas tiene ahora Pedro, si ganó 3 en una partida y al principio tenía 39? ***39 + 3 = _***	
		CC	¿Cuántas canicas tiene ahora Pedro, si ganó 39 en una partida y al principio tenía 3? ***3 + 39 = _***	
	Cambio 2	SI	¿Cuántas canicas tiene ahora Pedro, si perdió 3 en una partida y al principio tenía 42? ***42 – 3 = _***	
		CC	¿Cuántas canicas tiene ahora Pedro, si perdió 39 en una partida y al principio tenía 42? ***42 – 39 = _***	
	Cambio 3	SI	¿Cuántas canicas ganó Pedro en una partida, si al final tenía 42 y al principio tenía 39? ***39 + _ = 42***	
		CC	¿Cuántas canicas ganó Pedro en una partida, si al final tenía 42 y al principio tenía 3? ***3 + _ = 42***	

de verbos utilizados para representar la acción de añadir o quitar. Los problemas fueron presentados con la pregunta al inicio, ya que hay evidencias que apoyan que esto favorece la construcción del modelo de la situación (Thevenot, Devidal, Barrouillet, y Farol, 2007). La mitad de los problemas permitían un modelado directo de la situación descrita en el enunciado (problemas SI). La otra mitad no permitía ese modelado directo y demandaban del uso del conocimiento conceptual para ser resueltos (problemas CC). Las cantidades incluidas en los problemas fueron las siguientes. Para los problemas de Cambio 1, uno de los sumandos fue siempre 3 o 4, apareciendo en segundo lugar para problemas SI y en primer lugar para problemas CC. El otro sumando fue siempre mayor que 30 y menos que 70 y la suma implicaba cambio de decena (e.g. 39 + 3) evitando dos números pares (e.g., 48 + 4). Para los problemas de Cambio 2 y 3 (ambos teóricamente implican restar) bien el sustraendo o la diferencia fueron 3 o 4 y el minuendo mayor que 30 y menor que 70, y también hubo cambio de decena.

La mitad de los problemas se presentaron en un orden natural, como aparecen habitualmente en los libros de texto, mientras que la otra mitad se presentaron de forma alterada manipulando el orden en el que se proporcionaban los datos del problema. Esta alteración en el orden pretendía analizar hasta qué punto dificultando la construcción del modelo de la situación influía en el uso de estrategias.

Los participantes recibieron 2 bloques de 12 problemas experimentales. Dos problemas de prueba fueron resueltos conjuntamente al comienzo de cada uno de los bloques. Cada uno de los bloques incluyó problemas presentados en un determinado orden, bien natural, o bien alterado. El orden de los problemas dentro de cada bloque fue previamente aleatorizado. El orden de presentación de los dos bloques de problemas fue contrabalanceado.

Procedimiento

Los problemas fueron resueltos en una única sesión grupal. Cada uno de los grupos estaba formado por 10-12 participantes. Al inicio de la sesión el alumno recibía un cuadernillo donde se le requería poner el nombre, edad, curso y grupo al que pertenecía. Dentro del cuadernillo aparecían un total de 24 hojas de respuesta donde se señalaba el número de problema al que habían de dar respuesta y un recuadro con la palabra resultado en el que los alumnos debían escribir la solución numérica al problema. Cada uno de los problemas se leyó en voz alta dos veces. El experimentador pedía a los participantes que buscasen la página en la que aparecía escrito el problema (e.g., "Problema 1") y recordaba las instrucciones (i.e., "Voy a leer en alto un problema dos veces y cuando acabe tendréis que escribir la solución en el espacio que podéis ver al lado de la palabra *resultado*. Vais a tener muy poco tiempo para escribir la solución por lo que os pedimos que lo hagáis lo más rápido posible intentando dar siempre la solución correcta. Lo único que nos interesa es el número de la solución del problema. No tenéis que escribir la operación con el signo de igual; sólo la solución al problema"). Después de cinco segundos se les pedía a los participantes que pasasen la hoja para resolver el siguiente problema.

Resultados

Hubo un 26.9 % de respuestas incorrectas. Las medias de proporción de errores aparecen en la Tabla 2.

Los porcentajes de error fueron analizados en un 3 (problema: Cambio 1, Cambio 2, Cambio 3) X 2 (orden: natural, alterado) X 2 (formato: problema CC, problema SI) ANOVA de medidas repetidas con un factor intersujetos (apoyo: si, no). Como era esperable, los sujetos con apoyo cometieron más errores que aquellos que no recibían apoyo (.37 vs. .09, respectivamente) [$F(1, 36) = 17.89$, $MSE = .510$, $p < .0001$, partial $\eta^2 = .33$]. El efecto principal de problema fue significativo [F(2,

Tabla 2. *Medias de proporción de errores y Error Típico*

APOYO	ORDEN	PROBLEMA	FORMATO	MEDIA	ERROR TÍPICO
SI	natural	Cambio 1	CC	0.289	0.073
			SI	0.158	0.054
		Cambio 2	CC	0.474	0.075
			SI	0.368	0.074
		Cambio 3	CC	0.579	0.092
			SI	0.316	0.074
	alterado	Cambio 1	CC	0.526	0.073
			SI	0.237	0.059
		Cambio 2	CC	0.368	0.077
			SI	0.289	0.064
		Cambio 3	CC	0.526	0.085
			SI	0.368	0.074
NO	natural	Cambio 1	CC	0.000	0.073
			SI	0.053	0.054
		Cambio 2	CC	0.079	0.075
			SI	0.105	0.074
		Cambio 3	CC	0.237	0.092
			SI	0.079	0.074
	alterado	Cambio 1	CC	0.053	0.073
			SI	0.026	0.059
		Cambio 2	CC	0.079	0.077
			SI	0.079	0.064
		Cambio 3	CC	0.211	0.085
			SI	0.105	0.074

72) = 7.45, MSE = .093, $p < .001$, partial $\eta^2 = .17$]; como se esperaba, los problemas de Cambio 3 fueron más difíciles que los problemas de Cambio 1 y 2 (.30 Cambio3 vs. .23 Cambio2, vs. .16 Cambio1). El efecto principal de orden no alcanzó los estándares de significatividad (F < 1). Por otro lado, y más importante para este estudio, el efecto principal de formato fue significativo [F(1, 36) = 28.44, MSE = .043, $p < .0001$, partial $\eta^2 = .44$]; los participantes cometieron menos errores en los problemas SI que en los problemas CC (.18 vs .28, respectivamente). Este efecto fue cualificado por una interacción entre formato y apoyo [F(1, 36) = 12.37, MSE = .043, $p < .001$, partial $\eta^2 = .25$]. Comparaciones por pares indicaron que los participantes con apoyo fueron más sensibles a las diferencias entre problemas SI y CC (F = 39.16, $p < .0001$) que aquellos que no tenían apoyo (F = 1.64, $p > .05$).

Discusión

Los resultados muestran que los problemas SI son más fáciles de resolver que los problemas CC, lo que sugiere que a los participantes les resulta más fácil generar una estrategia que modela directamente la situación del problema que apelar al conocimiento conceptual necesario para resolverlo. Estos resultados replican y son consistentes con los obtenidos por Brissiaud y Sander (2010), y los amplían al mostrar que este efecto se generaliza a estudiantes con una larga experiencia resolviendo problemas de este tipo. No obstante, el efecto fue mucho más evidente para los estudiantes con dificultades en matemáticas, lo cual sugiere que estos estudiantes tienen dificultades para acceder al conocimiento conceptual necesario para resolver este tipo de problemas. Aunque el conocimiento conceptual de las propiedades aditivas no fue evaluado, dada la edad de los estudiantes, es difícil imaginar que no cuenten con este tipo de conocimiento que se desarrolla en los primeros años de la escolaridad. Más factible sería que, dadas las condiciones experimentales (tienen que dar una respuesta lo más rápidamente posible) en realidad no hacen un uso flexible y eficiente de este conocimiento.

Un resultado interesante encontrado fue la no influencia del orden de presentación de la información del enunciado. Sería esperable que el orden alterado redujera las diferencias entre problemas SI y CC, ya que una estrategia basada en la situación sería menos efectiva cuando se altera la situación natural. De hecho, los problemas de Cambio tienen un orden natural basado en la secuencia temporal de su estructura semántica (hay un conjunto inicial sobre el que se ejerce una acción para dar lugar a un resultado). Sin embargo este no fue el caso. Los problemas SI siguieron siendo más fáciles de resolver que los problemas CC en la condición orden alterado, lo cual sugiere que los participantes de alguna manera reorganizaron la información del enunciado para poner en marcha una estrategia basada en la situación cuando esta era factible.

También es interesante notar que a pesar de que los problemas de Cambio 3 presentaron el mayor porcentaje de errores -lo cual es acorde con estudios previos (Riley *et al.*, 1983)-, dicho porcentaje se redujo e igualó con el obtenido en los demás problemas cuando se consideraron problemas SI ($p < .05$). En otras palabras, los problemas de Cambio 3 reducen considerablemente su dificultad cuando se presentan en un formato situacional. Además, este efecto se produce tanto para los participantes que tienen apoyo como para los que no. Esto apoya la eficacia de las estrategias basadas en la situación.

Experimento 2

Participantes

Veinticuatro estudiantes universitarios (4 varones y 20 mujeres) participaron en el estudio. Las edades de los participantes estaban comprendidas entre los 19 y 24 años.

Materiales

Se crearon 72 problemas experimentales que pertenecían a las categorías de Cambio 1, Cambio 2 y Cambio 3. Los problemas y variables manipuladas fueron las mismas que en el Experimento 1, con la excepción de que las cantidades menores incluyeron 3, 4 y 5. Los participantes recibieron 2 bloques de 36 problemas experimentales. Cuatro problemas de prueba fueron incluidos al comienzo de cada uno de los bloques. Los bloques incluyeron problemas presentados en un determinado orden (natural y alterado). El orden de los problemas dentro de cada bloque fue previamente aleatorizado y el orden de presentación de los bloques fue contrabalanceado.

Procedimiento

Los estímulos fueron presentados en la pantalla de un ordenador, mediante el software "SuperLab", en una cabina insonorizada. Los problemas fueron presentados palabra por palabra, a un ritmo fijo, usando RSVP (*Rapid Serial Visual Presentation*). Cada palabra fue expuesta durante 300 ms, habiendo un intervalo de 50 ms entre cada palabra y un intervalo de 750 ms entre la frase de la pregunta y el resto de palabras del problema. Cada uno de los estímulos comenzaba cuando los participantes presionaban la barra espaciadora del ordenador y aparecía en el centro de la pantalla una señal (***) durante 1000 ms. Las palabras del problema fueron presentadas una por una en el centro de la pantalla del ordenador. La última palabra que aparecía era la segunda cantidad de la operación, que se mantuvo en la pantalla del ordenador hasta que el participante emitía una respuesta oral. Se instruyó a los participantes a resolver los problemas de la manera más rápida posible intentando que la respuesta fuera correcta. La respuesta de los sujetos se registró mediante un micrófono conectado a al ordenador, activado con voz, que registró la latencia de las respuestas. El tiempo de respuesta comenzaba cuando el segundo número de la operación aparecía y acababa cuando el micrófono detectaba la respuesta oral. La prueba se pasó de forma individual y tuvo una duración aproximada de veinte minutos.

Resultados

Hubo un 6.88 % de respuestas incorrectas. De los tiempos de respuesta restantes, el 5.96 % fueron excluidos al considerarse valores atípicos desviándose más de 2.5 DS de las medias por tipo de problema en cada uno de los participantes, o debido a errores de micrófono, sin existir diferencias significativas entre las distintas condiciones.

Las medias de los tiempos de respuesta (ver Tabla 3) fueron analizadas en un 3 (problema: Cambio 1, Cambio 2, Cambio 3) X 2 (orden: natural, alterado) X 2 (formato: problemas CC, problemas SI) ANOVA de medidas repetidas. El efecto principal de problema fue significativo [$F(2, 46) = 11.09$, $MSE = 182305$, $p < .0001$, partial $\eta^2 = .32$]; los participantes resolvieron problemas de cambio 1 (2.102 ms.) más rápido que problemas de cambio 2 (2.328 ms., $p < .01$) y que los problemas de cambio 3 (2.372 ms., $p < .001$). El efecto principal de formato fue significativo [$F(1,23) = 15.31$, $MSE = 3941107$, $p < .001$, partial η^2

Tabla 3. *Medias de TR y Error Típico*

ORDEN	PROBLEMA	FORMATO	MEDIA	ERROR TÍPICO
Natural	Cambio 1	CC	2087.219	163.126
		SI	1866.339	110.136
	Cambio 2	CC	2381.529	186.414
		SI	2258.074	131.434
	Cambio 3	CC	2598.018	191.433
		SI	1974.304	141.974
Alterado	Cambio 1	CC	2118.169	204.628
		SI	2336.680	191.123
	Cambio 2	CC	2487.130	277.260
		SI	2185.397	189.259
	Cambio 3	CC	2802.655	227.932
		SI	2116.925	185.216

= .40]; los problemas SI fueron resueltos más rápidamente que los problemas CC (2.122 ms. vs 2.412 ms.). El efecto principal de orden se aproximó a la significatividad [$F(1, 23) = 3.36$, $MSE = 462761$, $p = .08$, partial $\eta^2 = .13$]; los problemas presentados en orden natural fueron resueltos más rápidos que los problemas alterados (2.194 ms. vs 2.341 ms.). El análisis mostró una interacción significativa entre problema y formato [$F(2, 46) = 10.29$, MSE = 259356, $p < .0001$, partial $\eta^2 = .31$]. Comparaciones por pares indicaron que las diferencias entre problemas SI y problemas CC aumentaron en función del tipo de problema [$F < 1$; $F(1, 23) = 4.33$, $p < .05$, partial $\eta^2 = .16$; $F(1, 23) = 49.91$, $p < .0001$, partial $\eta^2 = .68$, respectivamente para Cambio 1, Cambio 2, y Cambio 3]. Esta interacción fue cualificada por la interacción de segundo orden problema por formato por orden, debido a que la interacción entre problema y formato fue más evidente en el orden alterado que en el orden natural.

Discusión

Los resultados obtenidos con participantes adultos confirman una mayor eficacia en los problemas SI que en los problemas CC. A pesar de la escasa dificultad de los problemas utilizados y del más que presumible uso flexible del conocimiento conceptual esperado en esta muestra de participantes, los problemas que permiten el uso de estrategias basadas en la situación son más fáciles de resolver que los problemas en los que hay que hacer uso del conocimiento conceptual de la propiedad conmutativa y la inversa. Además, aunque los problemas presentados en orden alterado fueron resueltos más lentamente que en orden natural, el efecto del formato fue similar independientemente del orden. Este resultado, junto al obtenido en el Experimento 1 respecto al orden, sugiere que los participantes reorganizan la información del enunciado a un orden natural. No obstante, en el caso de los adultos, los problemas de Cambio 1 parecen no requerir tal proceso. Como se observa en la Tabla 3, los problemas de Cambio 1 presentados en orden natural fueron resueltos más rápido en el formato SI que en el formato CC, mientras que el efecto fue al contrario en el orden alterado. Una posible explicación sería que el uso de la conmutativa está más automatizado que el uso de la inversa. Dado que la conmutativa es aplicable a los problemas de Cambio 1 al ser intercambiables los sumandos, quizás los participantes adultos solo fueron influenciados por el orden de presentación de los sumandos, de tal forma que cuando el sumando mayor aparece entes en el enunciado (orden natural y problema SI, y orden alterado y problema CC) los problemas fueron resueltos más rápidamente. En línea con este argumento, Orrantia *et al.*, (2012) encontraron que los tiempos de respuesta a problemas de Cambio 1 presentados también en orden natural y alterado fueron similares. En ese estudio los sumandos eran números de un dígito (e.g., 5 + 3), los cuales se resuelven recuperando directamente la respuesta desde la memoria, y por lo tanto no hay un efecto del sumando mayor apareciendo antes o después. Lógicamente, asumimos que las operaciones implicadas en los problemas utilizados en el presente estudio no están representadas en la memoria, y por lo tanto no se pueden recuperar directamente.

En el resto de los problemas los operandos no se pueden intercambiar, por lo que el uso de la inversa requiere cierto coste de procesamiento. Esto es lo que explicaría que los problemas CC sean resueltos más lentamente que los problemas SI. Ante problemas CC (e.g., 42 – 39 = _, y 3 + _ = 42) los participantes necesitan utilizar la inversa para reorganizar los operandos en un formato que permita ejecutar los cálculos (e.g., 39 + _ = 42, y 42 – 3 = _) justo como en los problemas SI.

En comparación con los resultados obtenidos con los alumnos sin dificultades del Experimento 1, el efecto del formato (SI versus CC) fue mayor en el presente experimento con participantes adultos. Este resultado se explica por la metodología utilizada en ambos experimentos. Posiblemente, los cinco segundos permitidos a los alumnos fueron suficientes para poner desencadenar el conocimiento conceptual y aplicar los cálculos necesarios. Con una metodología basada en tiempos de respuesta posiblemente encontraríamos resultados similares a los encontrados con participantes adultos.

Conclusiones

A pesar de que la enseñanza formal en el proceso de resolución de problemas se orienta a la elección de una operación aritmética para llegar al resultado (e.g., ante el problema "Si Pedro comienza una partida con 35 canicas y termina con 48 canicas, ¿cuántas canicas a ganado?" se pide la operación 48 – 35 = _), alumnos con años de experiencia y e incluso adultos apelan a estrategias basadas en la situación para obtener la solución. Sólo cuando estas estrategias no son eficientes se desencadenan los conocimientos aritméticos necesarios para resolver los problemas. En este contexto, Brissiaud y Sander (2010) proponen un marco que denominan *Situation Strategy First*, según el cual ante un problema se construye un modelo de la situación que activaría estrategias basadas en la situación. En el caso de problemas SI, estas estrategias proporcionan la solución numérica directamente. Cuando esto no es posible (caso de los problemas CC) se modifica la representación inicial del problema, lo que supone recursos cognitivos adicionales: hay que utilizar el conocimientos aritméticos adicional, bien haciendo uso del conocimiento conceptual adecuado, o evocando explícitamente una operación aritmética; nosotros añadiríamos que tal evocación requiere también conocimiento conceptuales (Orrantia, 2003). En este sentido, la distinción entre problemas SI y CC proporciona un claro poder explicativo de la dificultad de los problemas, independientemente de otras variables como el tipo de problema, las operaciones implicadas o el tamaño de los números. Esto tiene claras implicaciones educativas, especialmente considerando el diseño de los problemas que se presentan a los alumnos.

Por otro lado, los resultados obtenidos con los alumnos con dificultades sugieren que muestran un uso poco eficiente y flexible de conocimientos aritméticos básicos, tales como aquellos relacionados con las propiedades aditivas. Estos conocimientos son básicos, especialmente porque son necesarios para resolver ciertas situaciones problemáticas, y su uso debe ser promovido en estos alumnos. No obstante, y como ya hemos planteado en otro lugar (Orrantia, 2003), no se trata de que tales conocimientos sean enseñados directa y explícitamente, sino favorecer su uso en contextos en los que este conocimiento es significativo, como en la resolución de problemas aritméticos.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado gracias al proyecto PSI2011-27737 del Ministerio de Ciencia e Innovación dirigido por el primer autor.

Referencias

Brissiaud, R., y Sander, E. (2005). Arithmetic word problem solving: a Situation Strategy First framework. *Developmental Science, 13*, 92-107.

Carpenter, T. P., y Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education, 13*, 179–202.

Kintsch, W., y Greeno, J. (1985). Undertanding and solving word arirmetic problem. *Psychological Rewiev, 92*, 109-129.

Orrantia, J. (2003). El rol del conocimiento conceptual en la resolución de problemas aritméticos con estructura aritmética. *Infancia y Aprendizaje, 26*, 451-468.

Orrantia, J., Rodríguez, L., Múñez, D., y Vicente, S. (2012). Inversereference in subtraction performance: An analysis from arithmetic word problems. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology, 65*, 725-738.

Riley, M. S., Greeno, J. G., y Heller, J. I. (1983). Development of children's problem solving ability in arithmetic. In H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 153–196). New York: Academic Press.

Thevenot, C., Devidal, M., Barrouillet, P., y Fayol, M. (2007). Why does placing the question before an arithmetic Word problem improve performance? A situation model account. *Quarterly Journal of Experimental Psychology, 60*, 43–56.