SUMA 52
Junio 2006, pp. 101-109

De cabeza

El problema de Arno Peters, un problema cartográfico

¿A qué se parece la Tierra sobre todo?
[...]: a un ser unicelular

Lewis Thomas.
The Lives of a Cell,
1974

Se acerca el verano y con él las vacaciones y los viajes a los sitios más dispares del planeta. Viajemos cerca o lejos, en coche, en tren o en avión, hay un objeto que no puede faltar en nuestro equipaje: un buen mapa.

Desde los tiempos de Ptolomeo y aún antes, los geógrafos, cartógrafos y matemáticos se han empeñado en la dura tarea de crear mapas cada vez más precisos de nuestro planeta o de alguna de sus partes. Es otro de los sueños de la Humanidad: conseguir el mapa perfecto.

Para ayudarnos a elegir el mapa más correcto, contamos en este número con la impagable ayuda de un especialista en geometría y en cartografía, Raúl Ibáñez Torres, profesor de la Universidad del País Vasco y divulgador incansable de las Matemáticas, en libros, artículos, conferencias, exposiciones y hasta programas de radio. No es un accidente casual que sea el presidente de la Comisión de divulgación de la RSME y el presidente y el motor, de cuatro o cinco tiempos, del portal de divulgación matemática más popular en castellano DivulgaMAT (*http://www.divulgamat.net*).

Pronto podremos gozar de sus desvelos por acercar las matemáticas a todos los públicos, pues es el comisario de las exposiciones *¿Por qué las Matemáticas...?, Arte fractal: belleza y matemáticas y Demoscene: Matemáticas en movimiento* que se llevarán a cabo, con motivo del ICM 2006, en el Centro Cultural Conde Duque de Madrid desde el 17 de agosto al 29 de octubre próximos.

Antonio Pérez Sanz

Presentación de los problemas

Cuando Antonio Pérez me llamó para sugerirme que escribiera un pequeño texto sobre algún problema geométrico para esta sección de la revista SUMA, me encontraba yo releyendo algunas partes del libro de Arno Peters *La nueva cartografía*. Esta es una lectura que suelo practicar cuando voy a impartir una conferencia sobre mapas, o cuando en Internet, en la prensa o en algún otro medio de comunicación vuelven a atacar con titulares como *El mapa del futuro, por un mundo más solidario* o frases como *Comprometido* [Peters] *siempre con la causa de la justicia, tomó el camino de la cartografía para restituir una imagen del mundo en la que cada pueblo tenga el lugar que le corresponde, tanto geográfica como políticamente.* Momento que suelo aprovechar para explicar que los argumentos falaces y supuestamente solidarios de Peters

> *Lejos de ser el mapa de Peters y sus argumentos realmente solidarios, se aprovechó del desconocimiento general de cartografía, para engañar y conseguir que su mapa fuera declarado* el único mapa solidario.

Raúl Ibáñez Torres,
Universidad del País Vasco
Presidente de DivulgaMAT y de la Comisión de divulgación de la RSME.
raul.ibanez@ehu.es

no eran más que una manera, a la postre exitosa para sus objetivos personales, de vender su mapa; y por vender entiéndase no solamente el obtener un beneficio económico, sino conseguir pasar a la Historia como el autor de un mapa reconocido internacionalmente. Lejos de ser su mapa y sus argumentos realmente solidarios, se aprovechó de la buena fe de las personas y de la solidaridad de estas, así como de su desconocimiento de unas mínimas nociones de cartografía, para engañarles y conseguir que su mapa fuera declarado "el único mapa solidario", y lo que es peor desde un punto de vista matemático y cartográfico, "el único mapa correcto".

De una forma esquemática su falaz argumento es el siguiente: antes sólo estaba el mapa de Mercator, que es un mapa insolidario y erróneo, mientras que su nuevo mapa es un mapa solidario y la única alternativa correcta al mapa de Mercator. Se escuchan frases como *el mapa de Peters corrige los errores del de Mercator* [...] *es más riguroso desde el punto de vista científico*. Sin embargo, cuando empiezas explicando a la gente que durante los últimos cuatrocientos años se han diseñado más de 250 tipos diferentes de mapas y que cada uno tiene sus propias propiedades (incluso que muchos de ellos comparten propiedades con el mapa de Gall-Peters[1]), y que además no existen mapas correctos, todos tienen que sacrificar algunas propiedades para preservar otras, esto hace que las personas empiecen a cuestionarse la veracidad de lo que les habían contado.

Tras mi conversación con Antonio empecé a pensar en problemas de tipo geométrico que podían ser de interés para una sección como esta. Problemas clásicos de geometría diferencial, que es el área en la que trabajo. Sin embargo, yo seguía releyendo el libro de Peters al mismo tiempo que trabajaba algunas ideas para el artículo. En ello estaba cuando llegué a uno de mis párrafos preferidos, la demostración que hace Arno Peters de que *la proyección de Mercator no preserva los ángulos*, pero no se queda ahí ya que incluso unos párrafos más adelante llega a afirmar que ningún mapa puede preservar los ángulos (por lo tanto, es una propiedad que no debe de preocuparnos). Veamos su argumento:

> Examinemos ahora mediante algunos ejemplos si realmente concuerdan el modelo original (la superficie terrestre, el globo) y la red de coordenadas geográficas (la del mapa de Mercator):
>
> a) La línea de mínima curvatura entre Ciudad del Cabo y El Cairo, así como la que va desde el archipiélago de Nueva Liberia hasta el Cairo, se encuentran en esa ciudad formando un ángulo, tanto en el mapa como en el globo terrestre. En el globo terrestre, ambas líneas de insignificante curvatura (grandes círculos) forman un ángulo de 170 grados; en el mapa de Mercator, las mismas líneas de mínima curvatura (que aparecen rectas) forman un ángulo de 135 grados.
> b) La línea de mínima curvatura entre Reikiavik (Islandia) y Nueva York corta la también línea de mínima curvatura entre Río de Janeiro y Nueva York, formando un ángulo de 120 grados en el globo terrestre y de 105 grados en el mapa de Mercator.
> c) Las líneas de mínima curvatura entre España e Islandia y entre Islandia y Alaska se encuentran en Islandia, de manera que el ángulo en el globo es de 170 grados, y en la proyección de Mercator de 105 grados.
>
> ...
>
> En consecuencia, el ángulo formado por dos líneas de mínima curvatura entre tres lugares cualesquiera de la proyección de Mercator no concuerda con el ángulo real que las mismas líneas configuran en la superficie de la Tierra. Por lo tanto, la proyección de Mercator carece de fidelidad angular.

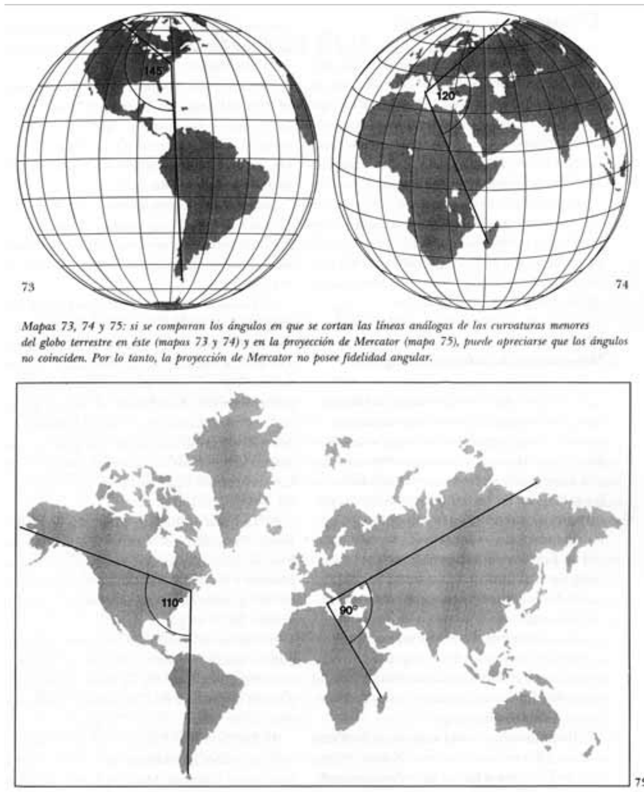


Figura 1: Imágenes del libro *La nueva cartografía* (pág. 65)

Entonces, pensé que el problema de estudiar si el argumento de Peters es correcto o no es un problema muy interesante y apropiado para esta sección. Por una parte, es un problema que se enmarca dentro del problema clásico y más general, que ha atormentado a matemáticos y cartógrafos a lo largo de la Historia: ¿cómo dibujar correctamente un mapa de la Tierra? Este es además un tema multidisciplinar muy interesante para utilizar en el aula, relacionado con cuestiones históricas, matemáticas y científicas, filosóficas, artísticas... y además puede adaptarse a varios niveles de reflexión: ESO, bachillerato o universidad. Por otra parte, este problema refleja un aspecto importante dentro de la propia actividad de la investigación matemática, en el que no solemos incidir demasiado en nuestras clases, la revisión de una demostración, ya sea esta propia o de otro matemático. ¿La demostración que tenemos delante es correcta? ¿Estará utilizando algún argumento falaz? ¿Tendrá algún error en su desarrollo? ¿Se estará asumiendo como correcto algo que no lo es? La prueba de un resultado matemático o de un problema (por ejemplo, un ejercicio de clase) necesita de sucesivas lecturas para su comprobación, primero por parte del matemático que la ha escrito y luego de sus colegas para verificarla (o si pensamos en un problema de clase, primero la revisará el propio estudiante y posteriormente la corregirá el profesor). En la investigación matemática la comprobación de si una demostración no contiene errores es una tarea imprescindible, tanto para la comunidad científica que tiene necesidad de asegurarse de que el argumento de la demostración es correcto, como para el propio matemático, quien puede apoyarse en las conclusiones de su revisión para tratar de desarrollar una nueva prueba en caso de encontrar algún error o que, en caso de no ser así, puede seguir avanzando en los argumentos matemáticos para llegar más lejos. En ocasiones el avance de nuestra ciencia pasa por probar la falsedad de un argumento o resultado considerado verdadero hasta ese momento.

Problema 1: *¿Cómo dibujar correctamente un mapa de la Tierra?*
Problema 2: *¿Es correcta la demostración de Peters sobre la no conformalidad de la proyección de Mercator?*

Mis argumentos me parecieron interesantes y me dejé convencer para plantear los siguientes problemas en este artículo:

Problema 1: ¿Cómo dibujar correctamente un mapa de la Tierra?

Problema 2: ¿Es correcta la demostración de Peters sobre la no conformalidad de la proyección de Mercator?

Pero me gustaría volver al libro *La nueva cartografía*, de A. Peters, para terminar estar presentación. Aunque es un libro de lectura poco aconsejable para el público en general, sí es una lectura que recomiendo para profesores y otras personas interesadas en estos temas. Es una lectura inquietante por la historia que tiene detrás, pero a su vez motivadora, ya que acabamos teniendo un mayor conocimiento del tema al descubrir los argumentos falaces, observar las omisiones, cómo se manipula la información histórica, en qué lugar se pone a la matemática en relación a la cartografía, cómo los titulares no suelen corresponderse con lo que luego dice el texto, cómo se enmascaran mentiras con argumentos aparentemente lógicos, con nomenclaturas engañosas, mostrando solo parte de la información, etc. Un ejemplo: cuando se citan las propiedades del mapa de Peters se menciona que tiene Fidelidad de Superficie (propiedad 1) y más adelante Fidelidad de Escala (propiedad 4), pero luego en la explicación habla de que realmente se refiere en ambos casos a la Fidelidad de Superficie, ya que la Fidelidad de Escala es imposible de obtener para ningún mapa.

Problema 1: ¿Cómo dibujar correctamente un mapa de la Tierra?

Con el objetivo de simplificar el estudio de los problemas considerados, pensaremos en la Tierra como una esfera de radio 1 y utilizaremos sencillos argumentos de geometría clásica en nuestro estudio (estos llevados al límite se convertirán en argumentos de geometría diferencial, que es el área de las matemáticas en el que se desarrolla realmente el estudio planteado).

Una cuestión previa sería: **¿qué significa correctamente?** Cuando utilizamos un mapa, estamos interesados en poder medir el área de un terreno, en elegir un rumbo para navegar, en tomar el camino más corto entre nuestro lugar de origen y nuestro destino, y medir la distancia entre ellos, en que las formas de los territorios se mantengan si estamos analizando distribuciones geográficas (niveles de vida, contaminación, población...), etc. En concreto, estamos interesados en que las proyecciones de la esfera en el plano que utilizamos para realizar los mapas preserven conceptos métricos como: las distancias, los caminos más cortos entre dos puntos (las geodésicas), las longitudes de los caminos, las direcciones (es decir, los ángulos), las áreas, las formas...

Proyecciones que preservan las distancias

La propiedad de que se preserven las distancias es, sin lugar a dudas, la propiedad más importante, ya que si tenemos una proyección de la esfera en el plano que preserve las distancias (llamada isometría [2]) también preservará las demás propiedades mencionadas: geodésicas (los caminos más cortos), áreas, ángulos…

Distancias ⇒ Caminos más cortos (geodésicas)

Supongamos que tenemos una proyección de la esfera en el plano que preserva las distancias y veamos que también preservará los caminos más cortos entre cualesquiera dos puntos. Si nuestra proyección no preservase los caminos más cortos, entonces existirían dos puntos A y B sobre la esfera y otro punto C sobre el camino más corto entre los anteriores, que como sabemos es el círculo máximo que los une, tal que la imagen de C en el plano, C', no está en la recta que une las imágenes, A' y B', de los puntos A y B respectivamente (véase la figura 2). En consecuencia, tenemos la siguiente situación. Por un lado, la distancia entre los puntos A' y B' (que denotamos $A'B'$) es igual a la distancia AB, puesto que la proyección preserva las distancias, y esta a su vez es igual a la suma de las distancias AC y CB, por estar C sobre el camino más corto. Sin embargo, como C' no está en la recta que une A' y B', entonces la suma de las distancias $A'C'$ y $C'B'$, que por preservarse las distancias es igual a la suma de las distancias AC y CB, es estrictamente mayor que la distancia $A'B'$, obteniéndose así una contradicción.

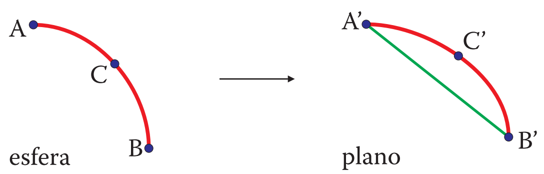


Figura 2

$$AC+CB=AB=A'B'<A'C'+C'B'=AC+CB$$

Distancias ⇔ Longitudes de curvas

Por el párrafo anterior, una aplicación que preserva las distancias, también preserva los caminos más cortos y en consecuencia, preservará las longitudes de las curvas. La razón es que toda curva de la esfera puede ser aproximada mediante un número finito (suficientemente grande) de arcos de círculos máximos, luego aproximamos su longitud mediante la suma de las longitudes de estos (que son las distancias entre los puntos extremos), de igual forma la curva imagen se aproxima por las rectas imagen de los arcos anteriores y su longitud por la suma de las longitudes de estos segmentos (véase la figura 3). El recíproco también es cierto porque la distancia entre dos puntos es el ínfimo de las longitudes de las curvas que los unen, o equivalentemente, la longitud del camino más corto entre ellos, la curva geodésica.

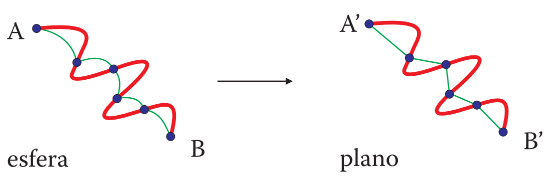


Figura 3

Distancias ⇒ Ángulos

Dados dos círculos máximos de la esfera que se cortan en un punto, si tomamos una circunferencia centrada en dicho punto, de radio suficientemente pequeño, entonces podemos considerar que el ángulo θ entre los dos círculos máximos (que es el ángulo entre sus vectores tangentes) es el cociente entre la longitud del arco de circunferencia determinado por los dos círculos máximos y 2π veces el radio (véase la figura 4). Es decir, podemos aproximar la medida de los ángulos mediante medidas de longitudes.

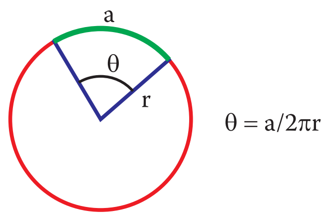


Figura 4

Por lo tanto, si tomamos la imagen mediante una aplicación que preserva las distancias, obtenemos dos rectas y una circunferencia centrada en el punto de corte. Por preservarse las distancias y ser la fórmula de la figura 4 válida para el plano, se deduce que dicha proyección preserva el ángulo. Este mismo argumento es válido para el ángulo entre dos curvas cualesquiera de la esfera que se corten en un punto, sin más que utilizar los círculos máximos que pasan por el punto de corte y con vectores tangentes iguales en dicho punto a los de las curvas. Es decir, si tenemos una proyección que preserva las distancias y dadas dos curvas sobre la esfera que se cortan en un punto formando un cierto ángulo, éste coincide con el ángulo que forman las dos curvas sobre el plano que son las imágenes de las curvas dadas sobre la esfera.

Distancias ⇒ Áreas

La idea de esta afirmación reside en que dada una región acotada de la esfera la podemos cubrir con una familia finita (suficientemente grande) de regiones delimitadas por meridianos y paralelos, que podemos considerar regiones rectangulares (cuando el número sea suficientemente grande y por tanto estas regiones suficientemente pequeñas) y el área es la suma de las áreas de estos rectángulos (base por altura). En el plano obtendremos la región imagen, cubierta por la familia de rectángulos imágenes, y como la aplicación preserva las distancias, tendrá el mismo área.

Sin embargo, la preservación de geodésicas, áreas o ángulos son propiedades que cada una de ellas por sí misma no implica que se preserven las demás propiedades, como observaremos en los tres ejemplos de mapamundis que a continuación se describen.

Proyecciones que preservan las áreas (proyección de Arquímedes o cilíndrica isoareal de Lambert)

Se conoce como la aplicación de Arquímedes aquella entre la esfera y un cilindro tangente a la misma, tal que la imagen de un punto cualquiera A de la esfera es el punto A' del cilindro que es la intersección de este con la recta que pasa por A y corta perpendicularmente al eje del cilindro, como muestra la figura 5.

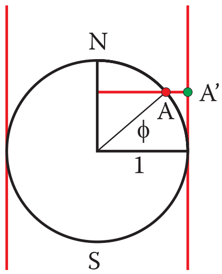


Figura 5: Proyección de Arquímedes

Si consideramos que la Tierra es nuestra esfera unidad y que el cilindro es el tangente a la esfera en el ecuador (por lo tanto, su eje pasa por los polos norte y sur), entonces una vez obtenida la imagen de la esfera en el cilindro, se despliega este en el plano. Este mapamundi, véase la figura 6, fue diseñado por J. H. Lambert en 1772.

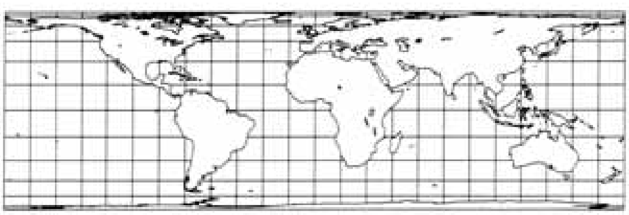


Figura 6: Mapa realizado a partir de la proyección cilíndrica isoareal de Lambert (1772)

Algunas propiedades del mapa basado en la proyección cilíndrica isoareal de Lambert:

i) es de forma rectangular, como todas las proyecciones cilíndricas;
ii) los meridianos y los paralelos son rectas que se intersecan ortogonalmente;
iii) preserva las áreas, pero no preserva ni los ángulos ni las geodésicas;
iv) la distorsión en las formas, ángulos y distancias, es muy pequeña cerca del ecuador (más aún, la escala es real en el ecuador), pero mayor según nos acercamos a los polos.

Teniendo en cuenta el comentario del apartado anterior relativo a las áreas, para demostrar que la aplicación de Arquímedes preserva el área, es suficiente probarlo para regiones *rectangulares* (suficientemente pequeñas) cuyos lados son meridianos y paralelos. Como se muestra en la figura 7, dado un punto sobre la esfera de latitud ϕ, la imagen de un meridiano (suficientemente pequeño) de longitud l es un segmento de recta en el cilindro, de longitud $l' = l \cos \phi$, mientras que la imagen de un paralelo (suficientemente pequeño) de longitud k es un arco de circunferencia en el cilindro de longitud $k' = k / \cos \phi$. Por lo tanto, dado un pequeño *rectángulo* de base k y altura l sobre la esfera, luego de área $l \cdot k$, se transforma en un *rectángulo* de base $k' = k / \cos \phi$ y altura $l' = l \cos \phi$, cuyo área será también $l \cdot k$. En conclusión, la proyección de Arquímedes es una aplicación que preserva el área.

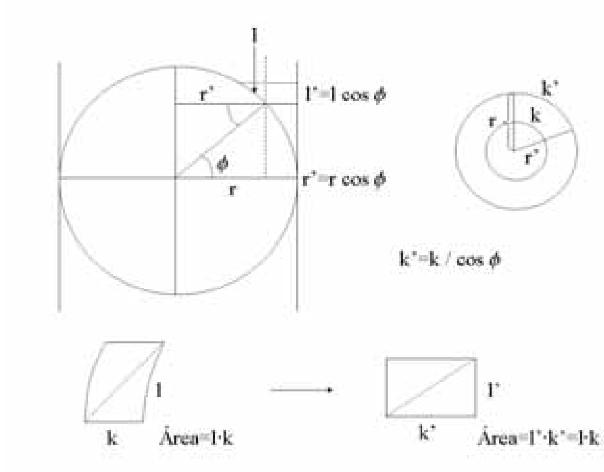


Figura 7: La proyección de Arquímedes es isoareal

Sin embargo, en este mapa de Lambert no se preservan los ángulos. Volviendo a la figura 7, vemos que por la distorsión que se produce en los meridianos (se contraen) y en los paralelos (se dilatan), el ángulo entre la base y la diagonal del rectángulo sobre la esfera es mayor que el mismo ángulo pero del rectángulo imagen sobre el plano. Aunque el ángulo entre los meridianos y los paralelos sí es preservado. En general, del comentario anterior podemos extraer la conclusión de que para que se preserven los ángulos tienen que ocurrir dos cosas:

- que se preserven los ángulos entre los meridianos y los paralelos (que son ángulos rectos, es decir, de 90 grados);
- que la distorsión en la dirección de los meridianos μ sea igual a la distorsión en la dirección de los paralelos λ.

Si se cumplen ambas propiedades podemos concluir además que la distorsión en cualquier dirección es siempre la misma. En particular, para la proyección cilíndrica isoareal de Lambert hemos visto que $\mu = \cos \phi$ y $\lambda = 1 / \cos \phi$. Finalmente, es obvio que esta aplicación no preserva la geodésicas, solamente los meridianos y el ecuador.

La propiedad de preservación de las áreas es normalmente la propiedad prioritaria para mapas con información basada en áreas de territorios y también en mapas de interés general, ya que los mapas son un instrumento para transmitir información *de un vistazo*, de forma más rápida y precisa que una tabla de números. En general, nos encontramos este tipo de mapas en divulgación científica, en la educación o en los medios de comunicación, aunque desafortunadamente en muchas ocasiones se utilizan los mapas sin ningún criterio objetivo. Además, sería también deseable que la deformación en las formas fuese la menor posible. En la actualidad la proyección utilizada por el National Geographic (hasta hace poco fue la proyección de Mercator) para crear sus mapas temáticos de la Tierra es la proyección de Winkel-Tripel, que tiene una distorsión moderada en el área y en la forma, excepto en los polos. Otras proyecciones isoareales son la cónica isoareal de Albers, la de Mollweide, la ortográfica de Gall-Peters, la de Eckert IV, la proyección azimutal isoareal de Lambert o la proyección sinusoidal (o de Sanson-Flamsteed).

Proyecciones que preservan las geodésicas (proyección central o gnómica)

Consideramos una esfera y un plano tangente a ella, entonces la imagen de un punto A de la esfera mediante la aplicación central o gnómica, es el punto A' del plano que se obtiene al intersecar éste con la recta que pasa por A y el centro de la esfera (figura 8).

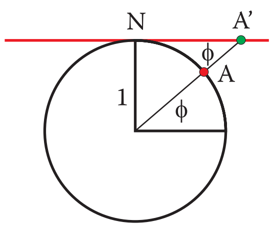


Figura 8: Proyección central

En la figura 9 podemos ver un mapa realizado haciendo uso de la proyección central (en su versión ecuatorial).

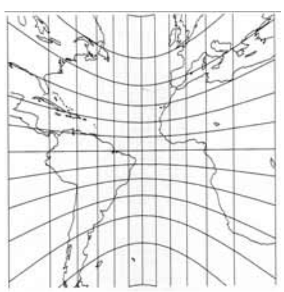


Figura 9: Mapa realizado con una de las proyecciones centrales ecuatoriales

Algunas propiedades:

i) su imagen es circular y solamente cubre una parte de uno de los hemisferios;
ii) la distorsión de meridianos y paralelos es $\mu = 1 / \text{sen}^2\,\phi$; $\lambda = 1 / \text{sen}\,\phi$;
iii) esta proyección preserva las geodésicas, pero no distancias, ángulos o áreas;
iv) la distorsión de áreas, formas y ángulos, aunque menor cerca del centro, el punto de tangencia, es muy pronunciada según nos alejamos de dicho punto.

Teniendo en cuenta que las geodésicas de la esfera son los círculos máximos y que estos se obtienen como la intersección de la esfera con un plano que pasa por el centro de la misma, es trivial observar que la imagen de un círculo máximo mediante la proyección central es la recta intersección del plano que genera el círculo máximo y el plano de tangencia (ver figura 10). En consecuencia, nuestra aplicación envía geodésicas de la esfera (círculos máximos) en geodésicas del plano (rectas). Además, esta es la única carta que satisface esta propiedad.

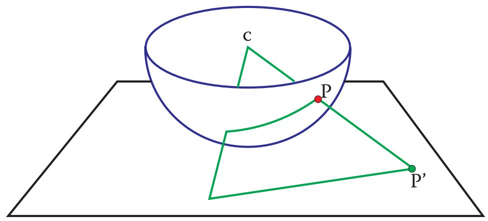


Figura 10: La proyección central preserva las geodésicas

Esta proyección es claramente útil en navegación, aérea o marítima, y suele usarse en combinación con la proyección de Mercator. También, es útil en meteorología o cristalografía. La proyección central ha sido utilizada para diseñar mapas tipo estrella y también mapas sobre superficies poliédricas.

Proyecciones que preservan los ángulos (proyección de Mercator)

El estudio realizado sobre la proyección de Lambert nos muestra que esta proyección cilíndrica no preserva los ángulos debido a que la distorsión que se produce en los meridianos cos ϕ no es igual a la que se produce en los paralelos $1/\cos\phi$. Esta misma discusión nos da una idea de cómo construir una representación conforme (es decir, que preserva los ángulos), "estirando" el mapa de Lambert (figura 6) en la dirección norte-sur de forma que la distorsión en los meridianos pase a ser $1/\cos\phi$. El mapa isogonal que se genera con esta técnica es el mapa de Mercator (véase la figura 11). El mapa de Mercator es sin lugar a dudas el mapa más familiar para todos nosotros e incluso podemos decir que ha sido *el mapa* durante prácticamente cuatro siglos. Este fue diseñado por el cartógrafo flamenco Gerhardus Mercator, 1512-1594, y publicado en 1569 bajo el título "Una nueva disposición de los meridianos con referencia a los paralelos". El mérito de Mercator fue construir un mapa útil en la navegación marítima (en parte heredero de los antiguos portulanos) donde los instrumentos utilizados eran el compás, el semicírculo graduado, la regla y, por supuesto, la brújula. No hemos de olvidar que era una época de grandes viajes, de descubrimientos, y los navegantes y viajeros necesitaban mapas para sus desplazamientos. Los mapas medievales, realizados por los propios navegantes y por otras gentes sin formación matemática, ni científica, no tenían ninguna utilidad en lo que se refiere a la navegación y, en general, para realizar ningún tipo de medición sobre ellos. Como consecuencia, en muchas ocasiones los barcos llegaban a zonas muy alejadas del destino marcado o incluso a lugares desconocidos.

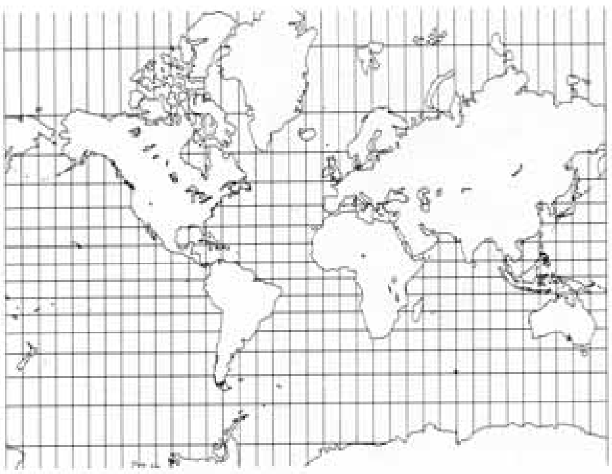


Figura 11. Mapa de Mercator

Sin embargo, Mercator, Ortelius y otros cartógrafos de la época tenían cierta formación científica, matemática y astronómica, y dieron paso a lo que se ha dado en llamar *la nueva cartografía*[3]. Mercator además de cartógrafo, tenía un negocio en el que se dedicaba a realizar trabajos de campo, a fabricar instrumentos, a producir globos y mapas y, por supuesto, a venderlos. Por lo tanto, su interés por producir un buen mapa para la navegación no era sólo científico, sino también comercial. Como ya hemos comentado, la solución de Mercator al problema de construir un mapa útil para los navegantes fue construir una *rejilla* de meridianos y paralelos representados por rectas, para posteriormente espaciar los paralelos para compensar la distorsión que se produce en los meridianos y obtener así que la distorsión en meridianos y paralelos es la misma. Una idea intuitiva de esta proyección es la siguiente: imaginemos que nuestra esfera/tierra es un balón contenido en un cilindro tangente a la esfera en el ecuador, entonces empezamos a dar aire al balón y este se va aplastando contra el cilindro, así vamos obteniendo la imagen de la esfera sobre el cilindro.

Pero volvamos al mapa de Mercator y sus propiedades:

i) es un mapa de forma rectangular;
ii) los meridianos y los paralelos son rectas que se cortan en ángulo recto;
iii) es una aplicación conforme, por su propia construcción, que no preserva distancias, áreas, geodésicas o formas;
iv) las loxodrómicas o líneas de rumbo fijo se transforman en rectas (en la figura 12 se muestran las imágenes de algunos círculos máximos y loxodrómicas);
v) la distorsión de áreas, formas y distancias es pequeña cerca del ecuador (la escala es real en el ecuador), pero muy fuerte según nos acercamos a los polos. Esta propiedad la hace muy conveniente para regiones cercanas al ecuador;
vi) la proyección de Mercator es la base de la UTM. (mapa Universal Transverso de Mercator), que es el sistema de mapas que se utilizan en todo el mundo para la realización de los mapas de nuestro entorno.

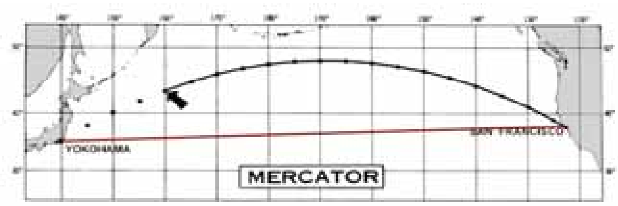


Figura 12: Loxodrómica versus geodésica para el mapa de Mercator

Como se afirma en la propiedad iv) las curvas de rumbo fijo de la esfera se transforman en rectas en el plano de Mercator. Por consiguiente, si un navegante quiere ir de un punto A a un punto B de la Tierra, sólo necesita trazar en el plano la recta que une ambos puntos y tomar el rumbo marcado por la misma. Sin embargo, las loxodrómicas no son geodésicas y por lo tanto, no nos dan el camino más corto entre esos dos puntos, aunque sí el más sencillo de seguir, por ser de rumbo constante. Cualquier otra curva entre esos puntos requiere de continuos cambios de rumbo. Normalmente en la navegación se toma una solución intermedia:

a) trazar una geodésica (recta) en un mapa central (o azimutal equidistante);
b) romper la geodésica en fragmentos;
c) trasladar los extremos de los fragmentos al mapa de

Mercator y unirlos mediante rectas (las loxodrómicas de rumbo constante).

Figura 13: Utilización mixta del mapa de Mercator

Para realizar su travesía del Atlántico, en 1927, el aviador Charles Lindbergh decidió cambiar de rumbo cada 1000 kilómetros y seguir una sucesión de curvas loxodrómicas que se aproxima al círculo máximo ideal.

Proyecciones que preservan ángulos y áreas

Volvamos al tema central de este artículo, ¿existen mapas correctos? ¿cómo construir correctamente un mapa de la tierra? En una primera aproximación a este problema hemos visto que no es suficiente que la proyección preserve una de las propiedades métricas (áreas, ángulos o geodésicas), sino que se hace necesaria más información para poder asegurar que la proyección es isométrica, es decir, que *representa correctamente la superficie terrestre*. Por este motivo iniciamos esta sección con el estudio de proyecciones de la esfera en el plano que preserven a un mismo tiempo dos de las propiedades métricas que estamos considerando.

En primer lugar, consideremos una proyección de la esfera en el plano para la que se mantienen los ángulos y las áreas. Por lo comentado en un apartado anterior, si la proyección es conforme entonces la distorsión no varía con la dirección, y en particular, la distorsión que se produce en los meridianos μ es igual a la que se produce en los paralelos λ. En esa misma sección hemos observado que si la proyección es isoareal, entonces $\mu=1/\lambda$. Ahora, teniendo en cuenta ambas propiedades se concluye que $\mu=\lambda=1$, es decir, la aplicación que preserva ángulos y áreas no produce ninguna distorsión, es una isometría. Luego, un método para la construcción de mapas correctos de la esfera-tierra podría ser el diseño de mapas que preserven ángulos y áreas al mismo tiempo. Lo cual no es ninguna trivialidad, ya que al ser isometría preservaría todas las propiedades métricas, ángulos y áreas, pero también geodésicas, formas, longitudes de las curvas y distancias.

Proyecciones que preservan ángulos y geodésicas

Continuemos con nuestro estudio y consideremos ahora una proyección de la esfera en el plano que conserve los ángulos y las geodésicas. En tal caso, tomemos un triángulo geodésico en la esfera formado por un arco de círculo máximo entre el norte y el ecuador, otro arco similar formando un ángulo de 90º con el anterior y el arco del ecuador que conecta los dos anteriores, que forma con cada uno de ellos un ángulo de 90º, como muestra la figura 14.

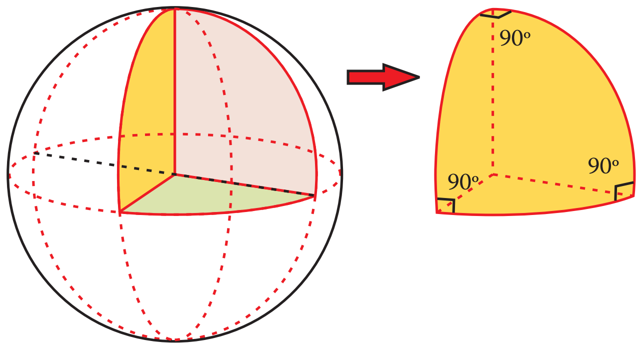


Figura 14: Un triángulo geodésico sobre la esfera

Entonces, la imagen de dicho triángulo geodésico de la esfera será un triángulo sobre el plano (ya que se preservan las geodésicas) con ángulos de 90º (ya que se preservan los ángulos), pero esto es absurdo porque, como bien sabemos de la geometría clásica, la suma de los ángulos de un triángulo en el plano es de 180º y no de 270º. Por lo tanto, no existen proyecciones de la esfera en el plano que preserven a un mismo tiempo los ángulos y las geodésicas. Pero esto tiene una consecuencia muy importante, ya que nos permite concluir que no existen isometrías de la esfera en el plano, es decir,

NO EXISTEN MAPAS PERFECTOS

todos los mapas son falaces en algún sentido. Este resultado es realmente local, el mismo argumento nos lleva a que no es posible construir isometrías locales de la esfera en el plano, es decir, tampoco es posible construir mapas perfectos de una parte pequeña de la Tierra.

Aunque a lo largo de la historia los cartógrafos no pudieron construir mapas ideales de la tierra, tampoco pudieron demostrar que no fuese posible, hasta que Leonhard Euler (1707-1783) lo probó en su trabajo *De repraesentatione superficiei sphaericae super plano*. Un par de experimentos que ponen de manifiesto el resultado de Euler son los siguientes.

Consideremos una pelota de plástico, cortémosla por la mitad e intentemos colocarla completamente plana sobre la mesa. Podemos comprobar que en nuestro intento de aplanar la pelota, esta se deformará o se rasgará, modificándose así las distancias entre los diferentes puntos de la superficie. Incluso si realizamos algunos cortes radiales para facilitar el aplanamiento seguiremos teniendo el mismo problema. Lo mismo ocurre en sentido contrario: al pegar un sello de grandes dimensiones en la naranja, se formará un gran número de pliegues.

El resultado de Euler pone de manifiesto que lo importante a la hora de utilizar mapas, realizados con diferentes proyecciones, de diferentes regiones de la tierra o también mapamundis, es considerar para cada situación concreta los mapas que se ajusten lo más posible a nuestras necesidades. A la hora de utilizar un mapa en nuestro trabajo o en nuestra vida cotidiana no debemos dejarnos guiar por la fama de un mapa, su nombre o por ser el mapa oficial de alguna agencia internacional, sino que la elección debe ser consecuencia de una reflexión inicial sobre las propiedades que necesitamos que se preserven en el mapa y una posterior elección dentro de la gran variedad de mapas existentes.

Problema 2: ¿Es correcta la demostración de Peters sobre la no conformalidad de la proyección de Mercator?

Si lo comentado hasta el momento es correcto eso querría decir que el argumento de Peters sobre la no conformalidad de la proyección de Mercator debe de ser erróneo. ¿Es realmente erróneo? ¿Dónde está el fallo en el argumento? Este es un problema que queda para que lo penséis y disfrutéis del mismo. Para cualquier consulta o para comentar el problema podéis contar conmigo. Hasta pronto.

NOTAS

[1] La proyección de Peters es esencialmente idéntica a la proyección (isoareal) ortográfica de Gall, publicada por el pastor J. Gall en 1855 en la *Scottish Geographical Magazine*.

[2] Este concepto coincide con el que Arno Peters llama *fidelidad de escala*.

[3] Obsérvese que este es precisamente el nombre que utiliza Arno Peters para su libro.

REFERENCIAS BIBLIOGÁFICAS

Libros y artículos

FEEMAN, Timothy G. (2002): “Portraits of the Earth, A Mathematician Looks at Maps”, *Mathematical World 18,* AMS.

IBÁÑEZ, Raúl (2005): “Lo que Euler le dijo al cartógrafo”, *Revista de Matemáticas SIGMA*, nº 27, 81-106.

Pearson, Frederick (1990): *Map projections: Theory and Applications*, CRC Press.

PETERS, Arno (1992): *La nueva cartografía*, Vicens Vives.

SNYDER, John P. y VOXLAND, Philip M. (1989): “An album of map projections”, *U. S. Geological Survey, Professional Paper* 1453.

SNYDER, John P. (1983): “Map projections: A Working Manual”, *U. S. Geological Survey, Professional Paper*1395.

SNYDER, John P. (1993): *Flattening the Earth, Two Thousand Years of Map Projections*, The University of Chicago Press.

Páginas web

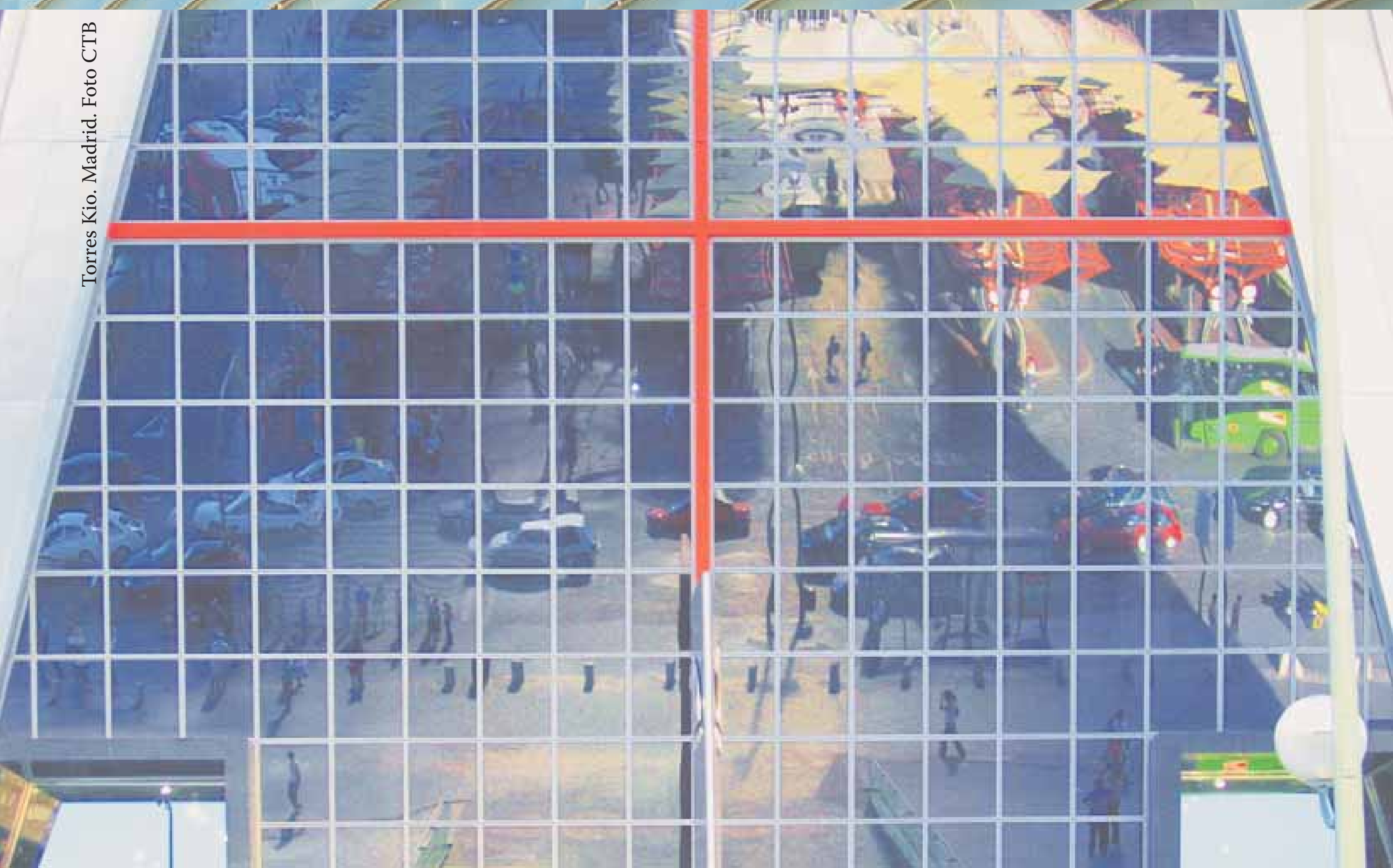
C. A. Furuti, Universidad de Campiñas, Brasil.
http://www.progonos.com/furuti/MapProj/CartIndex/cartIndex.html

J. C. Polking, Mapping the Sphere, Rice University.
http://math.rice.edu/~polking/cartography/
http://www.3dsoftware.com/Cartography/

Map Projections by Paul B. Anderson
http://www.ilstu.edu/microcam/map_projections/index.html

Mapa del mundo con la proyección de Gall-Peters

Kursaal. San Sebstián. Foto CTB



Torres Kio. Madrid. Foto CTB