SUMA 25
junio 1997, pp. 91-96

Medios electrónicos: gráficas y sonido en las funciones periódicas

Luis C. Cachafeiro Chamosa
Francisco M. Rodríguez Mayo

In memoriam

En este trabajo se presentan una serie de actividades realizadas para el 2.° ciclo de ESO, BUP y Bachillerato LOGSE, en las que se quiere resaltar la conexión entre las funciones periódicas y diversos ejemplos de ondas. Aprovechando algunos equipos electrónicos se consigue hacer evidente el significado de algunas operaciones sobre funciones como la suma, el producto por un número, la composición de una funcion lineal con una función sinusoidal.

HOMENAJE A GONZALO SÁNCHEZ VÁZQUEZ

LAS FUNCIONES sinusoidales suelen plantearse, en la asignatura de Matemáticas, de una forma teórica, esto es, sin relacionarlas directamente con una serie de fenómenos periódicos que pueden matematizarse fácilmente y relacionadas con experiencias de los alumnos.

Aquí queremos mostrar una experiencia llevada a cabo en nuestros respectivos centros, donde queremos darle un contenido real a las funciones periódicas, relacionándolas con los movimientos ondulatorios y más concretamente con el sonido en general y el habla humana en particular. Conceptos como amplitud y frecuencia están prácticamente ignorados en el currículo y, sin embargo, son precisamente dos aspectos fundamentales que se deben considerar en los fenómenos periódicos. El estudio de los fenómenos periódicos proporciona una herramienta ideal para observar a nivel experimental el significado de otros conceptos matemáticos como la suma de funciones, el producto por constantes o la proporcionalidad inversa. Evidentemente, al tratar los fenómenos ondulatorios se solapan contenidos de Física, Tecnología y Matemáticas. Creemos que, por resultar muy atractiva para los alumnos y muy rica en situaciones matemáticas, es conveniente incluir algunas o todas las actividades que se presentan, directamente en el aula de Matemáticas.

Nuestros objetivos en la experiencia son los de, por una parte, trabajar en lo que se ha dado en llamar «Aplicación de las matemáticas a la vida cotidiana» (Corbalán, 1996) y, por otra, experimentar con materiales en el aula utilizándolos tanto como sustitutos de la pizarra, como materiales que permitan investigar sobre una situación que se les propone (Barba y Esteve, 1996). Uno de los instrumentos que utilizan nuestros alumnos es la calculadora gráfica que tiene unas ventajas de rapidez y portabilidad francamente interesantes. El uso que se le da en este trabajo a la calculadora gráfica es el de trazado de gráficas funcionales. Otros usos de la calculadora gráfica en Análisis en nivel de bachillerato pueden verse en Salinas (1996).

Para comenzar la descripción de nuestra experiencia, podemos ver los principales conceptos matemáticos presentados, si bien no se hace un uso explícito de todos ellos. Entre éstos:

- Función periódica: período y amplitud. Continuidad de una función.
- Suma de dos funciones y producto de una función por un número.
- Representación de funciones: extremos, crecimiento, escalas, etc.
- Composición de una función lineal con una función periódica.

En el currículo de Matemáticas de secundaria se hace hincapié en los procesos de matematización de los resultados obtenidos por observación y experimentación de la realidad (DCB). Esto exige o bien el uso de instrumentos que nos proporcionen esos datos o su conocimiento indirecto. Evidentemente, siempre que sea posible, es preferible presentarlos directamente tanto por la calidad intrínseca de la experiencia, como por la mayor motivación que produce en el alumnado.

En los laboratorios de Física y de Tecnología se dispone habitualmente de algún osciloscopio y de generadores de ondas, que van a ser especialmente aprovechados en esta experiencia. El uso de estos instrumentos es más simple de lo que cabría esperar. Con unas pocas instrucciones de alguien que ya lo haya utilizado, podemos manejarlo por nosotros mismos.

Además del osciloscopio hemos utilizado la calculadora gráfica y un ordenador con tarjeta de sonido.

Introducción a las funciones periódicas

En una primera fase se consideran algunos fenómenos periódicos. Cada fenómeno periódico da lugar a una serie de distintas funciones periódicas que en algunos casos los alumnos deben inventar o describir. Entre estos fenómenos periódicos están:

Cada fenómeno periódico da lugar a una serie de distintas funciones periódicas que en algunos casos los alumnos deben inventar o describir.

- Los ciclos astronómicos (movimientos de la Luna, Tierra, Sol, etc.).
- Procesos biológicos (ciclo menstrual, latido cardíaco).
- Movimiento oscilatorio (péndulo, agujas del reloj).

Estudio de funciones periódicas sencillas

En estas actividades nos centramos en aquellos aspectos que pueden destacarse directamente a partir de la gráfica: amplitud, período, extremos, continuidad. A continuación se muestran ejemplos de algunas funciones periódicas y de distintas formas de introducirlas:

a) Funciones cuadradas:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [2i, 2i+1] \\ 0 & \text{si} \quad x \in [2i+1, 2i+2] \end{cases}$$

b) Funciones dadas directamente a partir de gráficas:

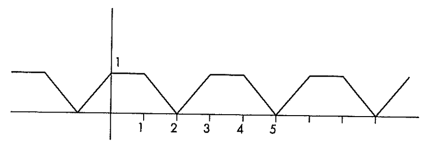


Figura 1

c) Funciones dadas mediante alguna descripción del fenómeno periódico:

Función que proporciona el número de horas en las que está el sol por encima del horizonte.

Para este último tipo, un instrumento que nos parece especialmente útil es un simple reloj de agujas que proporciona ejemplos de funciones continuas y no continuas. Sorprendentemente, no se suele considerar en los libros de texto ninguna de las funciones que se pueden estudiar directamente en un reloj y de las que a continuación mostramos un pequeño ejemplo:

1.°) Función y_1 que proporciona los minutos marcados en la aguja a partir de los minutos trascurridos desde las 0 horas. La gráfica de esta función no difiere de la figura 2 más que en la magnitud de la ordenada. Su fórmula es:

$$y_1 = 60 \cdot \mathrm{Dec}\left(\frac{x}{60}\right)$$

2.°) Función y_2 que proporciona los grados que forma la aguja de los minutos con la direccion y sentido 6h→12h. La fórmula para esta función es:

$$y_2 = 6 \cdot 60 \cdot \mathrm{Dec}\left(\frac{x}{60}\right)$$

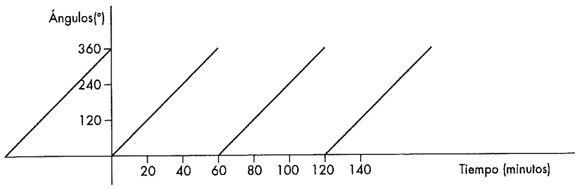


Figura 2

3.°) Función y_3 que proporciona la distancia del extremo del minutero a la posición de éste en las horas. Su fórmula es:

$$y_3 = \sqrt{\mathrm{sen}^2(6x) + (1 - \cos(6x))^2} = \sqrt{2 - 2\cos(6x)}$$

Ver figuras 3 y 4.

[Recordemos que la ecuación anterior utiliza los grados sexagesimales. Para la medida en radianes la fórmula es

$$d = \sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{2\pi x}{60}\right)}$$

El paso de una a otra forma es un ejemplo de proporcionalidad directa y es interesante su repaso].

Ondas sinusoidales y osciloscopio

El osciloscopio (ver figura 5) nos permite visualizar las ondas de diferentes forma producidas mediante un generador de ondas. Este último instrumento proporciona una corriente eléctrica de voltaje variable y de forma o sinusoidal o cuadrada o triangular, pudiendo variarse la frecuencia y la amplitud a voluntad. De esta forma, los alumnos observan la relación inversamente proporcional entre la frecuencia y el período de la función.

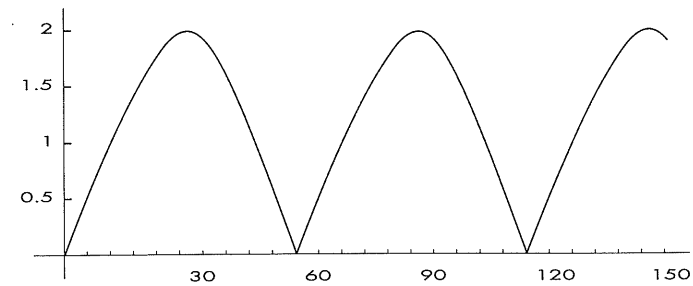


Figura 3

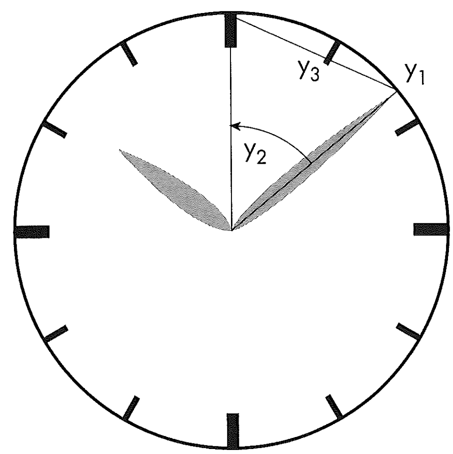


Figura 4. Un reloj permite definir varias funciones periódicas

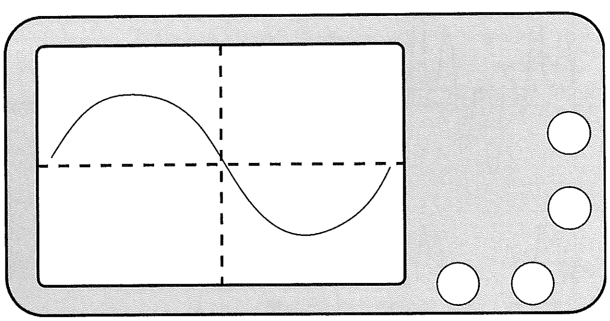


Figura 5

Una actividad particularmente interesante es la búsqueda, con ayuda de la calculadora gráfica, de la fórmula de la función sinusoidal que corresponde a las imágenes del osciloscopio, y que toma la forma general y = a·sen(b·x). Los alumnos tienen que averiguar los coeficientes *a* y *b* que aparecen en esa fórmula y cuya gráfica se corresponde con la que están visualizando en el osciloscopio. De esta forma la relación entre la *amplitud* y el *coeficiente a* y sobre todo la relación inversa entre *período* ↔ *coeficiente b* y la relación de proporcionalidad directa *coeficiente b* ↔ *frecuencia* aparecen nítidamente. Esta relación de proporcionalidad inversa es una de las mayores dificultades que se plantean en el proceso de matematización de las funciones periódicas.

Suma de funciones periódicas

El osciloscopio admite la entrada de dos ondas diferentes que pueden verse por separado o bien observarse como una única onda resultante de realizar la suma de ambas. Esto justifica el estudio de nuevas funciones periódicas: todas aquellas que pueden escribirse como

$$y = \mathrm{sen}(x) + a\cdot\mathrm{sen}(b\cdot x)$$

Se comprobará que este nuevo modelo matemático nos permite generar muchísimas funciones de formas aparentemente bien diferentes. Si bien este modelo sólo representa a una parte de las funciones periódicas, son similares a muchas de las que aparecen frecuentemente en los ejemplos y permitirá intuir cómo se pueden proporcionar, mediante nuevos sumandos, todas las funciones periódicas, en una forma simplificada del teorema de Fourier (Calus y Fairley, 1973).

Nuevamente, con la ayuda de la calculadora gráfica, los alumnos deben encontrar los coeficientes *a* y *b*, de la función y = sen(x) + a·sen(b·x). Para simplificar el problema, se introducen algunas restricciones:

$$0 < a < 1 \,,\ a \in \mathbb{R}$$

$$1 < b < 10,\ b \in \mathbb{Z}$$

El osciloscopio admite la entrada de dos ondas diferentes que pueden verse por separado o bien observarse como una única onda resultante de realizar la suma de ambas.

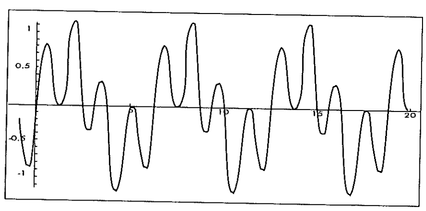
La calculadora gráfica permite obtener la gráfica de muchas funciones de este tipo, de forma que por tanteo, los alumnos suelen encontrar en poco tiempo los coeficientes. De hecho, aun con esta simplificación, observamos que prácticamente llegaron a generar intuitivamente un procedimiento de obtención de los coeficientes que era de aplicación en nuevos problemas no sujetos a esas restricciones.

A continuación, observamos que estas funciones aparecen en algunas funciones periódicas como movimientos de mareas, astronómicos, ciclos biológicos, etcétera.

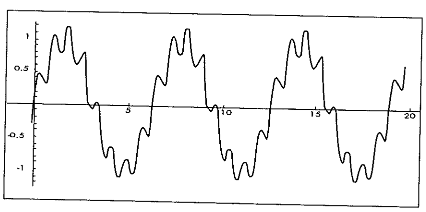
El sonido y el osciloscopio

Conectando un micrófono al osciloscopio, podemos estudiar una nueva fuente de generación de ondas periódicas: *la voz humana*. Esta actividad aparece en un breve trabajo presentado en esta misma revista por uno de los autores (Cachafeiro, 1989).

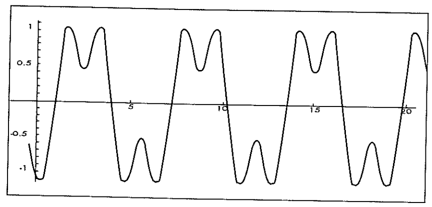
De forma natural se observa que la amplitud se corresponde con la intensidad y la frecuencia con el tono utilizado. Comprobamos que los sonidos que corresponden a una onda más simple son los de las vocales, en especial las vocales cerradas. De hecho, un «iiii...» cerrado lo vamos a ver en el esciloscopio como una onda sinusoidal. La forma de un «aaaa...» típico es muy parecida a la de la figura 6 (con a= 0,2, b= 8).



a=0,9
b=4



a=0,2
b=8



a=0,5
b=3

Figura 6

Existen diferencias notables en la frecuencia de los alumnos y de las alumnas así como entre la del profesor y del alumnado (por una cuestión de edad esencialmente).

Una onda curiosa se obtiene si se silba delante del micrófono pues su frecuencia es mucho más alta que la de la voz. Además si en esta onda se realiza una entonación, puede apreciarse claramente la existencia de una onda portadora similar a la de la emisión de ondas de radio de Modulación de Amplitud (AM). Por otra parte, éste es el ejemplo más claro de una función periódica que es exactamente suma de otras dos (silbido y entonación).

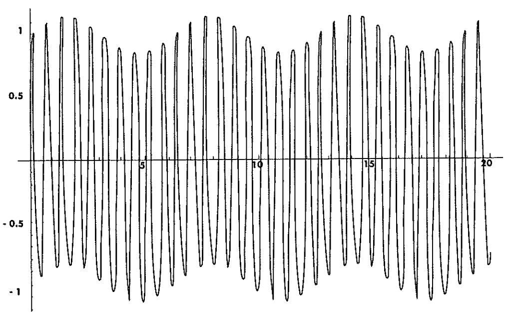


Figura 7

El ordenador: Sonido digitalizado

En esta actividad empleamos un ordenador con una tarjeta de sonido. Mediante software (proporcionado con la tarjeta) la corriente recibida del micrófono es dirigida por una parte al altavoz y por otra es enviada a una ventana similar a la del osciloscopio. Dadas las posibilidades del tratamiento digital, podemos:

- Ver la voz (como en el osciloscopio).
- Aumentar o reducir el volumen así como su frecuencia.
- Escuchar el sonido pero invertido (del final hacia atrás).
- Mezclarlo con otros sonidos almacenados por diversos métodos (CD, etc.).

El ordenador nos permite cerrar el proceso transformando una función matemática en un sonido con la ayuda de un programa apropiado...

Esta actividad permite recoger y ampliar algunas de las actividades anteriores e introducir nuevas actividades estimulantes como:

- Grabar en disquete el propio sonido del alumno.
- Medir la frecuencia de su habla y compararla con la de otros compañeros y compañeras, clasificando las frecuencias por sexo, edad, etc.
- Aclarar la diferencia entre reproducción digital y reproducción analógica.

En todo este proceso, empezamos convirtiendo el sonido en una onda que va a ser descrita a partir de una ecuación matemática. El ordenador nos permite cerrar el proceso transformando una función matemática en un sonido con la ayuda de un programa apropiado (por ejemplo, MATHEMATICA, MATLAB).

Otras actividades y conclusiones

En este trabajo hemos descrito una serie de actividades realizadas en varios cursos (BUP, ESO, Bachillerato LOGSE) pero aquí no están expuestas con el detalle y material escrito que reciben nuestros alumnos. Además, hemos pasado por encima de algunos de los problemas que el profesorado debe considerar en el aula (uso de distintas unidades de medida de ángulos, principales valores de las funciones trigonométricas elementales, etc.). Además hay actividades que consideramos pueden plantearse en un curso (3.° BUP, 1.° Bachillerato LOGSE) que no es posible hacerlo en otros. Entre éstas están:

Demostración de que la suma de funciones periódicas de períodos inconmensurables no es una función periódica.

Para ello, empleamos las funciones:

$$f(x) = \cos(x)$$

$$g(x) = \cos\left(\sqrt{2}x\right)$$

La primera vale 1 para $x = 0$ y para valores de la forma $x = 2\pi n$ ($n \in Z$) mientras que g(x) toma el valor 0 para $x = 0$ y para los valores de x de la forma:

$$\frac{2\pi}{\sqrt{2}}m \quad (m \in Z)$$

En consecuencia, si f+g es periódica existirá otro valor de x_0 para el que f+g que valga 2 y por lo tanto

$$x_0 = 2\pi n = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}m$$

de donde

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

contradicción debido a la irracionalidad de $\sqrt{2}$

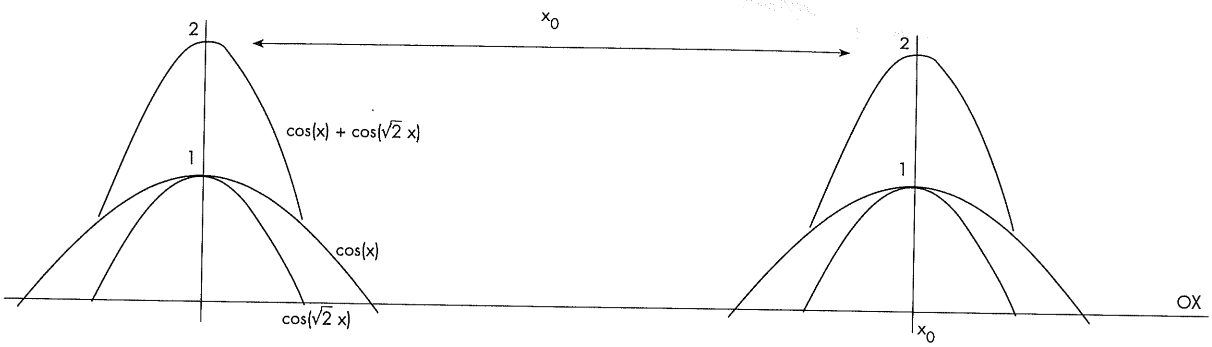


Figura 8

En ocasiones, también hemos empleado una función cuadrada de período 2 y otra de período $2\sqrt{2}$.

Esta actividad nos demuestra que no siempre la suma de dos funciones periódicas es una función periódica. Pero para el caso de la función $y = \mathrm{sen}(x) + \mathrm{sen}(3x/2)$, ¿es una función periódica? Al representarla en la calculadora parece que, efectivamente, sí lo es. ¿Cual es su período? En una forma un tanto parecida a la actividad anterior, se comprueba que su período es 6π.

En resumen, en esta experiencia se ha planteado una forma de matematización de una serie de situaciones periódicas. Se pone énfasis en las operaciones sobre las funciones, mostrando que estas operaciones tienen un contenido fuertemente asociado a las propiedades de los fenómenos que se desea matematizar.

Luis C. Cachafeiro
Francisco M. Rodríguez
Sociedad de Ensinantes de Ciencia de Galicia (ENCIGA)
Sección de Matemáticas

Bibliografía

CALU, I. M. y J. A. FAIRLEY (Eds.) (1973): *Series de Fourier y ecuaciones en derivadas parciales*, Paraninfo, Madrid.

BARBA, D. y J. ESTEVE (1996): «Cómo cambiar la opinión impartiendo un curso: materiales para la enseñanza de las matemáticas», *Uno, Revista de Didáctica de las matemáticas,* n.° 7, 61-70.

CACHAFEIRO, L. C. (1989): «Buscando recursos para el aula», *Suma,* n.° 4, 43-45.

CORBALÁN, F. (1995): *La Matemática aplicada a la vida cotidiana*, Graó, Barcelona.

SALINAS, E. (1996): «La calculadora gráfica en análisis», *Suma,* n.° 22, 59-62.