

En este trabajo presentamos un estudio sobre la memoria y su relación con la adquisición del conocimiento matemático. El objetivo principal es analizar e interpretar el funcionamiento de la memoria y los procesos asociados sobre los que se fundamentan las demostraciones de proposiciones, lemas y teoremas de la teoría matemática. Del mismo modo, se ha establecido la correspondencia entre estructura orgánica del conocimiento matemático y las diferentes categorías de conocimiento (declarativo, procedimental y condicional). Además incidimos sobre las redes proposicionales, pensamiento transversal, reticular y complejo en matemáticas como características esenciales a tomar en cuenta durante la instrucción. Al objeto de ejemplificar cuál es la función de la memoria en el procesamiento de la información matemática, se ha seleccionado como ejemplo el Teorema de Euclides. Más investigación en esta línea es necesaria para la comprensión de los procesos de adquisición de los conceptos matemáticos y para mejorar la instrucción.

**PALABRAS CLAVE:** *Memoria; Teorema de Euclides; Aprendizaje matemático; Redes proposicionales; Instrucción.*

# Memoria y adquisición del conocimiento matemático

pp. 59-71

59

## Las proposiciones como conjunto de secuencias condicionales

Ricardo López  
Ana B. Sánchez

Universidad de Salamanca\*

### Introducción

Con independencia de las corrientes a favor o en contra de la teoría que afirma que el procesamiento de la información en la mente humana opera de manera similar a como se realiza en un

ordenador, lo cierto es que la metáfora aplicada al funcionamiento del procesamiento humano se ha demostrado, metodológicamente, y a efectos interpretativos, como un instrumento eficaz.

Un modelo de procesamiento de la información es el establecido por Atkinson y Shif-

\* Departamento de Didáctica de las Matemáticas y Ciencias Experimentales, Universidad de Salamanca.  
E-mail: rciclop@usal.es

\*\* Departamento de Didáctica, Organización y Métodos de Investigación. Universidad de Salamanca.  
E-mail: asg@usal.es

✉ Artículo recibido el 12 de julio de 2014 y aceptado el 17 de noviembre de 2014.

frin (1968). Este modelo es conocido como el modelo de la *memoria dual* e interpreta el proceso de adquisición de la información, como un proceso que se inicia con un estímulo insu- mo (visual, auditivo,..etc), que impresiona uno o más sentidos hasta que el registro sensorial recibe la entrada del estímulo y la conserva en formato sensorial. En este compartimento del esquema se concede significado al estímulo que es transferido a la memoria de trabajo (en adelante MT).

La MT que es limitada en duración y capacidad de contenidos (Baddeley, 1986; Baddeley y Hitch, 1974) activa el conocimiento relacionado que se ubica en la memoria a largo plazo (en adelante MLP). El conocimiento relacionado de la MLP y la información nueva se integran, en donde se almacena el nuevo conocimiento en relación con el conocimiento previo almacenado. Los procesos de control y ejecución regulan el flujo de información, la organizan, utilizan estrategias de recuperación y monitorizan el nivel de comprensión de la información.

No obstante, el modelo no explica cómo se efectúan estas funciones de control y regulación de la transferencia de información, lo que constituye una limitación operativa. Lo mismo que su falta de explicación de ciertos automatismos o el difícil encaje que tiene los aspectos cognitivos referentes a la motivación y en general, los referentes a las manifestaciones y operaciones del sistema afecto - emocional.

Otro modelo teórico con la pretensión de superar los inconvenientes del anterior es el llamado de los “niveles de procesamiento”. En este modelo, la memoria se explica en función de su tipología y no en términos de lugar ( Craik & Lockhart, 1972). Está compuesto por tres niveles dimensionales que se relacionan entre sí, desde el más superficial –primer nivel de procesamiento físico–, hasta el más profundo –tercer nivel de procesamiento semántico–, pasando por el segundo nivel de procesamiento acústico.

En cierta manera, el modelo de niveles tiene semejanzas con el anterior. De hecho estos niveles se pueden hacer corresponder con el registro sensorial, la MT y la MLP anteriores. Sin

embargo, hay diferencias entre ambos modelos. Resumiendo estas diferencias diríamos que:

- En el modelo de registros el procesamiento sigue una secuencia. El modelo de niveles no es secuencial; puesto que no es necesario pasar por los niveles de superficie para ir al semántico.
- En cuanto a la relación entre el procesamiento y memoria, en el primer modelo, la memoria mejora con más procesamiento. En el modelo de niveles, procesamientos adicionales en un determinado punto no mejoran la memoria. La mejora del procesamiento viene determinada por criterios sobre el tipo de nivel más que por criterios de adicionalidad del proceso.

Sin embargo, si las aportaciones entre un modelo y otro guardan complementariedad, también tienen defectos comunes. En el modelo de niveles, la falta de elementos que clarifiquen los niveles en cuanto a su naturaleza y su “modus operandi”, a la postre significa que no podemos comprender en su totalidad los mecanismos asociados de memorización y aprendizaje del conocimiento.

Otro modelo es el desarrollado por Anderson (1990), conocido por ACT (*Adaptative Control of Thought*). En este modelo la idea clave está en la activación del estado de memoria. No existen varias memorias, sino una sola con diferentes estados de activación. La concepción *binario-digital* impregna el modelo, en la medida en que indica que la información puede encontrarse en dos estados básicos: Activo e Inactivo.

En todo caso la información activa puede ser de dos tipos: la información que ingresa en el sistema de procesamiento y la información que se recupera del almacén de la memoria.

La mayor ventaja de este modelo radica en su potencialidad para explicar la recuperación de la información de la memoria. Prescindiendo de la idea de los almacenes de memoria y del flujo de información entre ellos, el modelo pone énfasis en la activación, por estímulo de la información almacenada y en los mecanismos de recuperación.

Aspecto central de la teoría es el llamado proceso de difusión de la activación (Anderson, 1990), por el cual un módulo activado puede activar otra información asociada por algún tipo de conexión.

## Características y funciones de la memoria dual, las redes de información y el procesamiento del conocimiento matemático

El modelo de procesamiento basado en las dos estructuras de memoria, MT y MLP, probablemente es el que aporta una perspectiva más construida sobre los mecanismos funcionales en la adquisición del conocimiento. Si a dicho modelo, le incorporamos la teoría de Anderson sobre los estados binarios de activación-desactivación, contamos con una teoría que nos permite avanzar en la comprensión del procesamiento del conocimiento matemático.

La memoria de trabajo (MT) ó como la llama Baddeley (1992), memoria a corto plazo, es la memoria de la conciencia inmediata. Recibe, almacena momentáneamente y conecta la información con la información activada de la MLP. Las investigaciones sobre la MT han aportado cierta luz sobre sus características.

Así sabemos que, su duración es limitada y la información almacenada decae rápidamente (Baddeley, 1986, 2000). Esta limitación es notoria en cuanto a la capacidad de información que puede almacenar.

Muy importantes, en relación con el aprendizaje, son las funciones de control y/o ejecución que se desarrollan en la memoria corta ó de trabajo (Baddeley, Eysenck y Anderson, 2009). Parece contrastado que estas funciones son el repaso, predicción, verificación y funciones metacognitivas asociadas.

En este sentido, y en aplicación de dichas funciones, la MT desarrolla diversas acciones sobre los registros sensoriales que aportan los “inputs” de información, en particular:

- *Selecciona la información.*
- *Controla el tiempo de permanencia de la información mediante el mecanismo del repaso.*
- *Codifica la información, realizando una representación de esta.*
- *Compara la información representada con la información activa de la MLP, estableciendo relaciones y conexiones adecuadas.*

La MLP se caracteriza, por ser teóricamente ilimitada, con una duración amplia y en ella, la información se almacena siguiendo criterios de atribución de claves. La organización de la información en el almacén MLP, se establece sobre la base de criterios de semejanza de contenidos.

El criterio es un buen criterio de clasificación en la medida en que establece una relación entre informaciones que cumple las tres condiciones para obtener una buena clasificación: la reflexividad, la simetría y la transitividad.

En este sentido aportamos una conjetura *“La capacidad para almacenar con mayor permanencia y significatividad en la MLP, depende de la capacidad de la MT para establecer criterios orgánicos que conduzcan a una buena clasificación, en el sentido matemático del término, de la información suministrada”.*

Evidentemente, esta destreza de la MT debe de estar relacionada con una buena estructura del pensamiento, y por ello, con las aptitudes características del aprendizaje efectivo. Las investigaciones al respecto, incluso algunas ya históricas, refuerzan esta tesis (Katona, 1940).

Nótese, como esta característica relacional del sistema de procesamiento de la información del hombre se diferencia del sistema de organización por ubicación del ordenador, el cual necesita la ubicación y la ruta de acceso para seleccionar una carpeta ó archivo. La mente humana solicita y busca en el proceso de recuperación criterios relacionales, *criterios clasificadorios.*

Por ello, la analogía más utilizada sobre el almacenaje en la MLP es la de la biblioteca. La biblioteca es un sistema de organización basado en criterios clasificadorios. El criterio “dos

libros están en la misma clase, si se refieren de manera predominante a la misma disciplina es *reflexivo, simétrico y transitivo*, y por ello, un buen criterio de clasificación.

No obstante, hay diferentes niveles de memorización (Tulving, 1983). Probablemente es la parte más acertada del modelo de niveles y su aportación más interesante, desde una perspectiva sintética, al modelo dual. En este sentido, existe la llamada memoria episódica y la memoria semántica. La memoria episódica está asociada a categorías espacio-temporales, como el momento en que ocurrió o el lugar en el que sucedió. La memoria semántica, recoge los conocimientos que afectan a conceptos y procedimientos generales, sin referencias espacio - temporales. La recuperación de los registros almacenados en la memoria semántica, se rigen por principios asociativos adecuados a un sistema de archivos establecidos por criterios clasificatorios. En la práctica ambos tipos se combinan en el propio proceso de aprendizaje (por ej.: “En 1º de secundaria aprendí el teorema de Pitágoras”).

Otro aspecto importante está en la forma de codificación de los “inputs” de información. Esta forma de codificación determina la forma en la que la información es finalmente alojada en la MLP.

Algunos autores (Paivio, 1971) indicaron las dos formas básicas de almacenaje de la información: *verbal e icónica*. La primera es el procedimiento de codificación común en el caso de la información apoyada en formas lingüísticas. Para objetos concretos, la forma más habitual es la icónica. En todo caso, la combinación de ambos modos refuerza el proceso de recuperación de la información (Clark y Paivio, 1991).

No obstante, otros autores no dan categoría de modo de codificación a la forma icónica, defendiendo la tesis de que la codificación siempre se realiza verbalmente (Anderson, 1976) (Nevell y Simon, 1972). Estos autores, ante la evidencia de que la representación icónica existe, no la niegan, sino que establecen que la manera sustantiva de representación es verbal. Desde esta perspectiva las imágenes en la memoria son reconstrucciones internas efectuadas sobre representaciones verbales. No obstante, todas las investigaciones hasta la fecha avalan

la importancia de la representación icónica – imaginaria – para el proceso de almacenaje de la información y su posterior recuperación.

Una vez que hemos expuesto una síntesis de las características de la MLP, resulta interesante establecer la estructura orgánica que toman el conjunto de informaciones almacenadas sobre la base de los criterios y modos indicados.

En este sentido, está firmemente consolidado a nivel teórico (Anderson, 1990, 2007), que la estructura de la información se asienta en forma reticular, mediante enlaces entre nodos de información que están compuesto por proposiciones.

Por eso, hablamos de las redes proposicionales en las cuales los criterios asociativos constituyen la base sobre la que los nodos se vinculan. Las proposiciones enlazadas en forma reticular constituyen el conjunto de conocimiento almacenado que, en todo caso, puede ser clasificado en función de su naturaleza, en tres conjuntos básicos:

- *Conocimiento declarativo*: informaciones almacenadas sobre hechos, atributos, propiedades, creencias, descripciones, hipótesis, aptitudes. etc. Por ejemplo: la formulación del teorema de Pitágoras” En un triángulo rectángulo se cumple...”.
- *Conocimiento procedimental*: formado por conceptos, reglas, fórmulas y algoritmos. Por ejemplo: el cálculo de la inversa de una matriz.
- *Conocimiento condicional*: Complementario a las dos formas anteriores, nos indican cuando uno y otro debe ser aplicado y cuando no, así como por qué y la forma en que debe ser aplicado.

Desde una perspectiva funcional, el aprendizaje consiste en la formación y/o modificación de las redes proposicionales. El modelo ACT de Anderson (1990,1993) es un ejemplo de modelo reticular de la MLP sobre una estructura de nodos.

Dos nodos forman una proposición mediante la asociación en la cual un nodo es sujeto y el otro es el predicado. La base relacional de las distintas proposiciones la constituye el compartir información común.

Aunque en los años sesenta se pensó que las redes se constituían siguiendo principios jerár-

quicos (Collins y Quillian, 1969), en la actualidad se sugiere que no siempre es así, coexistiendo las redes articuladas con principios jerárquicos junto a redes de difícil sistematización.

¿Cómo construimos las redes de información? Sin duda, construyendo e incorporando conocimientos. Así incorporamos conocimiento declarativo por el proceso de adición de nueva información, que fluye a través del mecanismo de la memoria dual. Este flujo opera de la siguiente manera: los “inputs” nuevos se convierten en proposiciones en la MT y posteriormente se inicia la búsqueda de proposiciones almacenadas en la MLP que estén relacionadas con las producidas por los nuevos “inputs”.

Culminada la búsqueda, se establecen en la MT, las conexiones entre el conocimiento adquirido y el almacenado: por último, el nuevo conocimiento se residencia en la MLP incorporándose a la estructura reticular mediante las conexiones relacionales obtenidas (Anderson, 1990).

Para explicar de una manera simple el proceso de vinculación de la nueva información con la almacenada en la MLP, Anderson (1983, 1984, 1990) estableció el concepto de difusión de la activación. Dicho concepto adquiere sentido y significado en el marco de la teoría de los estados activados y no activados que anteriormente describíamos.

En este sentido, otro modelo más reciente es el llamado modelo OCTR (Chan y otros, 1993) en donde la llamada difusión de la activación se reinterpreta en términos de establecimiento de dos tipos de enlaces entre los nodos: Enlaces débiles y enlaces fuertes.

Las fases en el modelo OCTR (*Orientation, Coaching, Tuning and Routinization*) son:

- *Conexión*: establecimiento de enlaces débiles entre viejo y nuevo conocimiento.
- *Aumento*: el conocimiento se expande creando nuevos enlaces débiles.
- *Articulación*: el conocimiento se refina convirtiendo enlaces débiles en enlaces fuertes.
- *Consolidación*: el conocimiento se asienta y el proceso de aprendizaje culmina. Todas las unidades de información transforman enlaces débiles en fuertes.

Almacenado el conocimiento por su incorporación vinculada al conocimiento preexistente, se plantea teóricamente la cuestión de los mecanismos de recuperación del conocimiento alojado en la MLP. Ya Thomson y Tulving (1970) establecieron la tesis de que la recuperación es una función de la codificación. El mecanismo de codificación aporta las claves de los atributos asociados que van a constituirse en los vehículos de la recuperación. A este hecho se le denomina “*especificidad de la codificación*”. Tanto desde la teoría de la difusión de la activación como desde la teoría OCTR, es posible explicar la especificidad de la codificación. No es casual, de hecho son sistemas formales de explicación con bastante vecindad epistemológica.

Las claves y atributos asociados a la información sirven para codificarla y para difundir la activación de informaciones conexas, también en la perspectiva OCTR sirven para enlazar los nodos. Dichos atributos de codificación sirven para enlazar la información y difundir la activación convirtiéndose en claves de recuperación.

Una vez analizadas las componentes básicas y generales sobre el procesamiento de la información, vamos a establecer los mecanismos básicos de estos procesos cuando se trata de información y conocimiento matemático.

### ***El procesamiento de la información matemática***

La estructura formal y orgánica del conocimiento matemático se desarrolla, en aplicación de la lógica deductiva, a partir del dominio intuitivo de base, conceptos primitivos y axiomas, generando proposiciones y teoremas que concluyen en consecuencias y corolarios. Así mismo, los teóricos del procesamiento de la información, establecen tres tipos de conocimiento: declarativo, procedimental y condicional. En el siguiente esquema describimos la correspondencia entre la estructura orgánica y las categorías del conocimiento matemático y el tipo ó nivel de conocimiento que incorpora, trata y desarrolla.

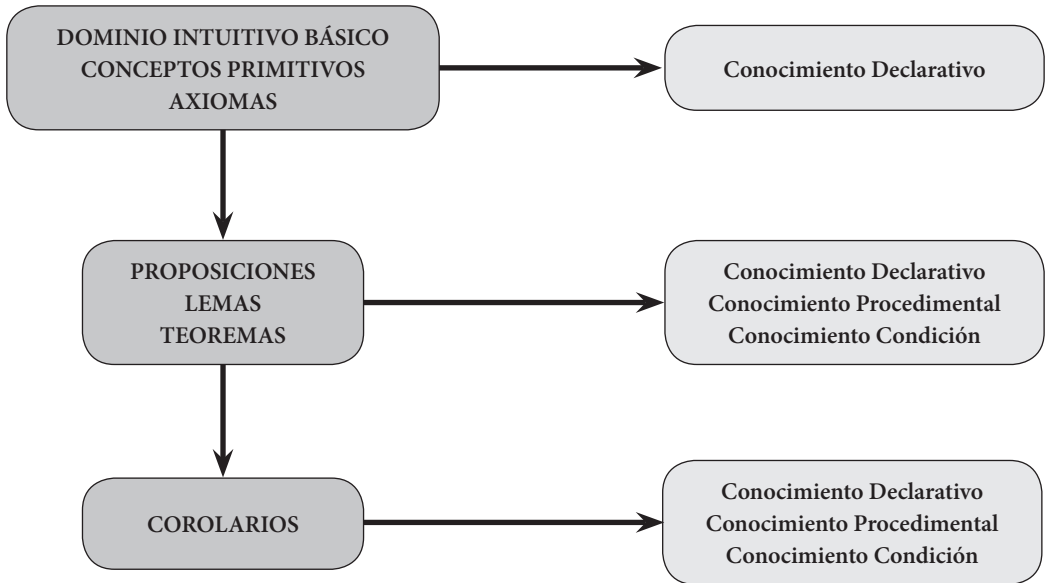


Figura 1. Correspondencia entre estructura orgánica del conocimiento matemático y las categorías de conocimiento.

84

El dominio intuitivo está constituido por conceptos primitivos, es decir, que no se soportan sobre definiciones –aunque tenemos sobre ellos conocimiento representacional que permite un acercamiento intuitivo– y axiomas ó postulados; es decir, proposiciones admitidas por intuición –criterio “a priori”– y por la coherencia de los resultados que se derivan de ellas –criterio “a fortiori”–. Así, el dominio intuitivo soporta un tipo de conocimiento que al ser sobre conceptos y creencias es declarativo.

La aplicación estricta de la lógica deductiva al dominio intuitivo permite el desarrollo de nuevos conceptos definidos –no primitivos– y nuevas proposiciones –por deducción– que constituyen, en función de su posición jerárquica, los lemas, proposiciones y teoremas de la teoría.

El tipo de conocimiento derivado de estos desarrollos es variado:

- *Declarativo*. Por ejemplo: “un triángulo isósceles es aquel que...”
- *Procedimental*. “El algoritmo de Euclídes nos permite el cálculo del m.c.d de la siguiente manera:..
- *Condición*. Si  $x^2 = y^2$  implica que  $x = y$ , entonces  $x$  e  $y$  son números naturales.

Por otra parte, se debe a Anderson (1993) el concepto de producciones como conjunto de secuencias condicionales. Podemos decir que hay un importante porcentaje de teoremas que son, desde la perspectiva de la teoría del procesamiento de la información, producciones. En concreto, todos los de la tipología, “la condición necesaria y suficiente para que se cumpla la proposición A es que sea cierta la B”. Este tipo de conocimiento es procedimental y el teorema - producción indica en qué situaciones y condiciones el procedimiento es aplicable.

Los corolarios son las consecuencias de los teoremas y/o proposiciones, son por tanto, aplicaciones ó acciones derivadas de un determinado conocimiento. Por ello, el tipo de conocimiento que desarrollan es declarativo y procedimental y menos, aunque también, condicional.

**Redes proposicionales y pensamiento transversal en matemáticas**

Todo este tipo de conocimiento, en sus diversas variantes, por los procesos conexos al tratamiento de la información, se almacena en la MLP mediante la formación de redes, según las pautas indicadas anteriormente en el modelo OCTR.

Veamos un ejemplo concreto de formación de redes proposicionales sobre el conocimiento matemático desarrollado en torno al teorema de Pitágoras, tópico, por otra parte, habitual en las programaciones de matemáticas de la educación primaria.

- *Enunciado de la proposición:* “En un triángulo rectángulo se cumple que, la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos es igual al cuadrado de la medida de la hipotenusa”.

En el siguiente esquema reticular planteamos un modelo –no único– de red parcial de conocimientos asociados. Lo que llamamos una red proposicional.

En la red diseñada, sombreado en oscuro, aparece la formulación verbal de la proposición del problema, *conocimiento condicional*. En los otros nodos aparecen unidades de información que son componentes básicas del conocimiento condicional del teorema.

Las líneas de enlace en verde indican, la conexión con el conocimiento de información preexistente, las líneas en negro establecen

los enlaces con las unidades de conocimiento próximo al teorema. Evidentemente, la red podría haber sido extendida más; ya que a su vez los conceptos como medida, triángulo, ángulos, entre otros, están conectado con otro tipo de conocimiento que le da soporte.

Con la indicación RV y RI hemos querido indicar la doble codificación - verbal e icónica - de las unidades de conocimiento. Incluso en los casos en los que no lo hemos puesto, también la MT puede aportar tipos de representación visual. Por ejemplo, la formulación visual de la suma de los cuadrados, o del propio teorema en su formulación algebraica. Nótese, no obstante, que la red proposicional se refiere al conocimiento contenido en la formulación del teorema y no a la información que se requiere procesar en la demostración, que se vincula con la red anterior con otros enlaces hacia otro tipo de informaciones.

Por último, cabe indicar que este, constituye un ejemplo individual de red proposicional y no tanto un modelo, dado que cada individuo en función de sus variables cognitivo - situacionales, desarrolla una red u otra sobre un mismo concepto o teorema.

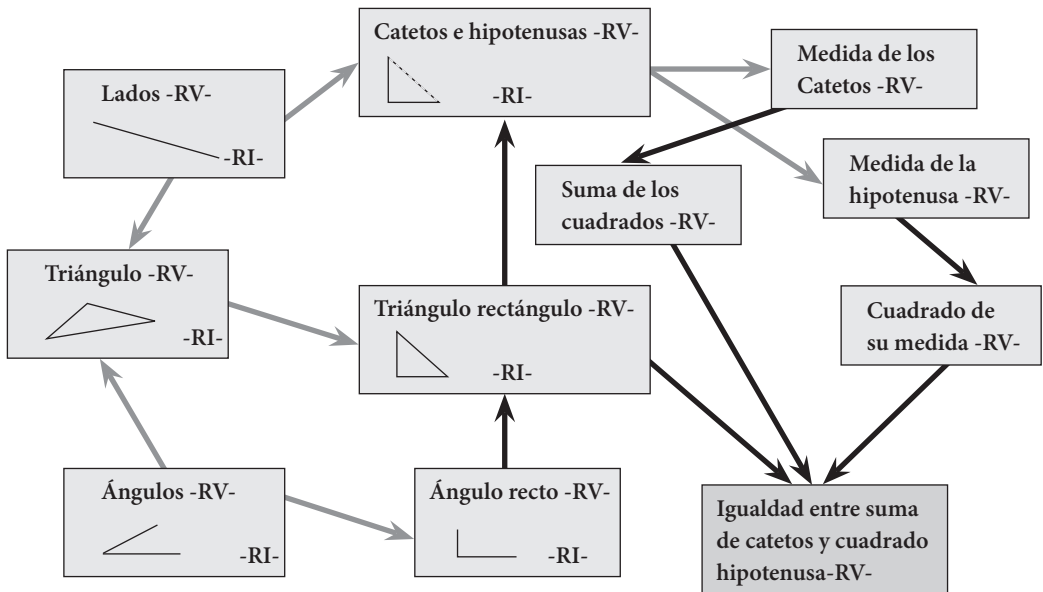


Figura 2. Red parcial de conocimientos asociados del teorema de Pitágoras.

El conocimiento matemático almacenado es esencialmente reticular y se distingue de otro tipo de conocimiento en la complejidad de sus enlaces de conexión transversales. Esta característica específica se deriva de otra característica metodológica de la construcción del pensamiento matemático: *La lógica deductiva es el único procedimiento en el que se puede basar su elaboración.*

La propia representación verbal y/o escrita del conocimiento matemático da buenas pruebas de esto. Si uno observa cualquier libro de texto dedicado a matemáticas, en la elaboración-producción de teoremas, proposiciones y corolarios es habitual encontrarse con las estructuras lingüísticas que representamos en la figura 3.

Esta es una muestra de estructuras lingüísticas típicas de los procesos deductivos que aplicamos en la construcción del pensamiento matemático.

Todas ellas manifiestan la estructura retículo-transversal del conocimiento matemático. En otras palabras, el conocimiento matemático es esencialmente *transversal* y por ello, su construcción se basa en procesos de pensamiento lateral.

Desde el punto de vista de las teorías del procesamiento de la información, diríamos que el conocimiento matemático se construye por formación de redes proposicionales, en donde los nodos están conectados entre sí con múltiples enlaces transversales.

### **Procesos asociativos en la construcción del pensamiento matemático**

El proceso asociativo depende, como ya se ha indicado, de la codificación, elaboración y organización de la información. La naturaleza del conocimiento matemático, también imprime características singulares a esta fase. Siguiendo el modelo de OCTR, diremos que la codificación, la elaboración y la organización van a ser los factores que determinen si los enlaces de asociación son débiles ó fuertes y, por ende, si la difusión de la activación en el proceso de recuperación va a ser eficiente ó ineficiente.

La estructura abstracta y formal del pensamiento matemático dificulta su codificación. El conocimiento matemático, se memoriza en forma semántica aunque en ciertos casos se apoya en representaciones iconográficas que sin duda, siguiendo a Clark y Paivio (1991), facilitan su recuperación. No obstante, cierto tipo de conocimiento matemático no es representable en código visual, lo cual dificulta su aprendizaje.

La búsqueda de la representación y/o simulación en matemáticas es la indagación por tener dos sistemas de codificación de la información –semántico e icónico– lo cual facilita el proceso asociativo y su recuperación en la MLP.

No es casual que el teorema de Pitágoras, sea una proposición bien aprendida, reconocida y recuperada –está bien asentada en la

“Teniendo en cuenta que...”  
 “En base a lo indicado en...”  
 “Recordando lo que dijimos cuando...”  
 “Haciendo el mismo desarrollo que realizamos en...”  
 “Aplicando la condición.....”  
 “Desde otro punto de vista, tenemos que...”  
 “En consecuencia con lo indicado en.....y en...”  
 “Sustituyendo... por...”  
 “Suponiendo que...”

Figura 3. Estructuras lingüísticas típicas de los procesos deductivos en matemáticas.



MLP— por los alumnos, si se observa que la codificación de todos los nodos conexos se puede efectuar en RV o representación verbal, y RI o representación icónica.

La codificación es básica para el almacenaje, pero la elaboración es un proceso esencial para la transformación de los enlaces de conexión débiles en enlaces fuertes. De nuevo aquí la especificidad de la proposición matemática, altamente relacional, añade dificultad al proceso de elaboración.

Cuantas más componentes de información con conexión transversal implique un conocimiento o una información, más compleja se hace la tarea de realizar una completa elaboración. Esencialmente porque la elaboración es un proceso de conexión asociativa.

En el aprendizaje de las matemáticas es habitual el proceso de aproximaciones sucesivas a un determinado concepto. Este proceso manifiesta la dificultad del procesamiento de la información, en su fase de elaboración, en la medida en que reconocemos enlaces de conocimiento asociado, pero no todos los enlaces de conocimiento asociado. Interpretamos y procesamos partes locales de la red proposicional completa. La organización de la información matemática también tiene sus singularidades. En primer lugar, la información matemática está altamente organizada y jerarquizada, y por ello, es fácilmente transferible a esquemas. Sin duda esto es un elemento facilitador de su procesamiento, sin embargo, ciertas técnicas básicas de la organización como la mnemotecnia no son adecuadas para el conocimiento matemático.

## Proposiciones matemáticas y producciones del conocimiento

Otra cuestión central a la hora de valorar la potencialidad interpretativa de las teorías sobre el procesamiento de la información, es efectuar el análisis, desde la perspectiva aportada por ella, de los procesos de demostración proposicional.

Un teorema, desde un punto de vista lógico, es una implicación en la cual una proposición base “A” conduce a otra proposición final “B”.

En esquema y en lenguaje lógico lo representamos por “A, B”.

El método lógico-deductivo es el procedimiento de transición desde la hipótesis hasta la tesis.

Se debe a Anderson (1990), el concepto que en la teoría del procesamiento de la información mejor se adscribe a una interpretación de los mecanismos mentales que se ponen en práctica en los procesos demostrativos de los teoremas. Dicho concepto es el de sistema de producción. Un sistema de producción está constituido por una red de secuencias condicionales y acciones. Las secuencias condicionales a su vez están constituidas por proposiciones del tipo condicional que establecen por ello, las condiciones necesarias para activar el sistema de conocimiento asociado. Ejemplo: dos fracciones “ $a/b$  y  $c/d$ ” son equivalentes si “ $a.d=b.c$ ”.

Como podemos observar, las producciones son formas de conocimiento procedimental que, a su vez, contienen las condiciones de su aplicación. Las acciones son el conjunto de proposiciones consecuentes, también llamadas corolarios asociados en matemáticas.

Tanto las producciones como las acciones, es decir, los sistemas de producción, se almacenan en la MLP. Un teorema y los subsiguientes corolarios, desde esta perspectiva, es un sistema de producción.

Se dice en matemáticas que la potencia significativa de un teorema viene determinada por la simplicidad del teorema y la cantidad y cualidad de los corolarios que se derivan de él. Por ello, la potencialidad de un sistema de producción vendrá determinada por una proporcionalidad inversa. La que determina que redes simples de secuencias condicionales, generen redes complejas de acciones.

Desde la Teoría Conexionista, Farnham-Diggory (1992) incide en que las producciones son desarrollos cognitivos de orden superior que se caracterizan, de una forma representacional, por redes muy amplias del conocimiento. A la vez que por la capacidad para desarrollar el procesamiento transversal continuo de muchas operaciones en paralelo y por múltiples interacciones de nodos simples del conoci-

miento. De hecho, el modelo OCTR se inscribe en una interpretación conexionista del proceso de construcción del conocimiento.

Las teorías conexionistas aportan una interpretación muy útil y coherente del procesamiento de la información que opera en los procesos de demostración de un teorema y en el establecimiento del conjunto de corolarios que lo acompaña.

Vamos a analizar la interpretación del proceso de demostración del denominado Teorema de Euclides:

- *Enunciado del teorema:* “Si un número  $m$ , divide a un producto de dos factores  $a \cdot b$  y es primo con uno de ellos  $a$ , entonces divide al otro factor  $b$ ”.

*Demostración:* desde la perspectiva de las teorías del procesamiento de la información, estamos ante una producción constituida por una secuencia de condicionales. Realicemos la demostración habitual del teorema: por hipótesis, como  $m$  y  $a$  son primos, el máximo común divisor entre ambos números es 1, es decir:

$$m.c.d(m, a) = 1$$

Teniendo en cuenta la propiedad del máximo común divisor, que indica que si los números se multiplican por una constante, que puede ser  $b$ , el mcd queda multiplicado por dicha constante, obtenemos que:

$$m.c.d(m \cdot b, a \cdot b) = 1 \cdot b = b$$

Como  $m$  es un divisor de  $a \cdot b$  –hipótesis del problema– y de  $m \cdot b$  –ya que incorpora a  $m$  como factor y si divide a un factor divide al producto– *divide a  $b$  que es el m.c.d de  $(m \cdot b, a \cdot b)$* , aplicando la propiedad que indica que: “los divisores comunes a “ $a$ ” y a “ $b$ ” son todos los divisores de su máximo común divisor y solo estos”. Por lo tanto, el teorema queda probado.

*Análisis de la demostración:* como puede observarse, el teorema de Euclides de la teoría de la divisibilidad es del tipo denominado conocimiento condicional. Es decir, una determinada proposición se cumple en la medida en que sea cierta una determinada condición.

Su formulación lingüística manifiesta claramente este hecho, al tener el carácter condicional “sí...”. Exactamente, en el teorema de Euclides, dos condiciones hacen cierta una tercera proposición:

Observando la demostración, vemos como efectivamente estamos ante una secuencia de proposiciones condicionales que conducen a la tesis, y por lo tanto, a la demostración del propio teorema.

En la página siguiente la figura 5 nos representa, desde la perspectiva de la teoría del procesamiento de la información, el sistema de producción en el que se basa, el teorema de Euclides y su demostración.

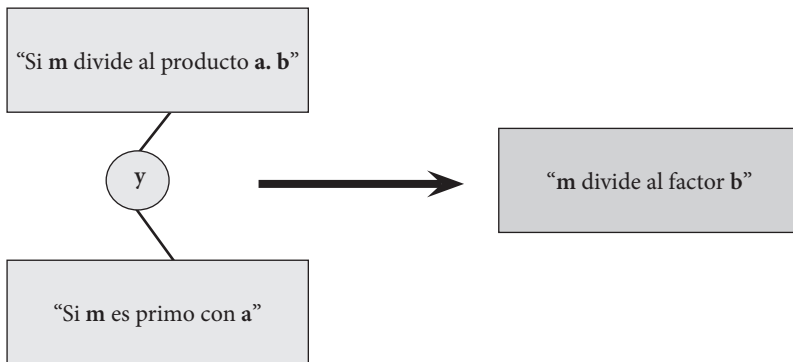


Figura 4. Condiciones y proposición en el Teorema de Euclides.

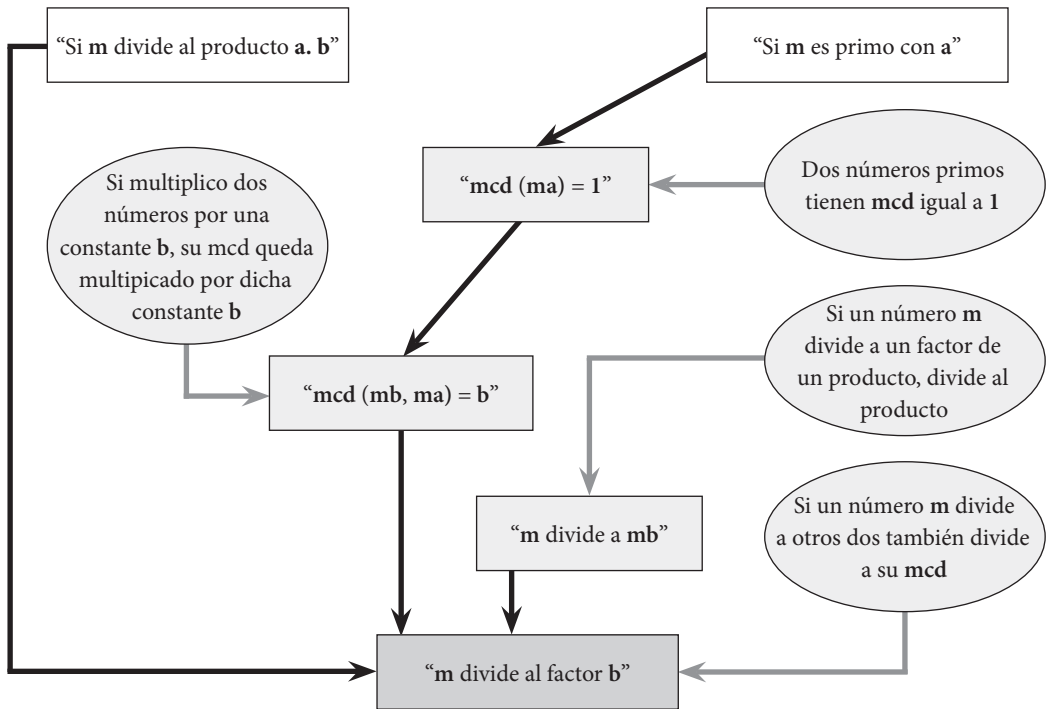


Figura 5. Sistema de producción de la demostración del Teorema de Euclides.

Esta representación esquematiza el sistema de producción del proceso de demostración del teorema de Euclides. Las líneas gruesas representan los enlaces de conexión vía razonamiento lógico-deductivo entre las distintas proposiciones que forman el sistema.

Las líneas delgadas representan enlaces con nodos proposicionales de otro tipo de redes, y por lo tanto, son la vía de conexión del sistema de producción asociado al teorema de Euclides con otros sistemas de producción. De hecho, cada elipse del gráfico representa una proposición obtenida en otro sistema de producción. Como puede verse, la entrada de dos enlaces en una proposición determina el procesamiento en paralelo que hay que efectuar en el proceso de demostración.

Este simple sistema de producción, al que habría que añadirle las acciones o corolarios conectados con otros sistemas de producción (enlaces destacados con líneas finas), que a su vez estaría conectado a otros sistemas, desarrollaría

globalmente la estructura orgánica de la red proposicional sobre la que se sustenta la teoría de la divisibilidad.

## Conclusiones

A lo largo de este trabajo se ha analizado e interpretado el funcionamiento de la memoria, en el marco de las teorías conexionistas y del procesamiento de la información, de la estructura de los procesos lógicos-deductivos sobre los que se fundamenta la demostración de proposiciones, lemas y teoremas de la teoría matemática. Del mismo modo, partiendo de las diferentes tipologías de conocimiento (declarativo, procedimental y condicional) se ha establecido la correspondencia entre estructura orgánica del conocimiento matemático y las diferentes categorías de conocimiento, lo que ha permitido caracterizar dicho conocimiento como reticular y complejo. Al objeto de ejemplificar cuál

es la función de la memoria en el procesamiento de la información matemática, se ha tomado como ejemplo el concepto que en la teoría del procesamiento de la información mejor se adscribe a una interpretación de los mecanismos mentales que se ponen en práctica en los procesos demostrativos de los teoremas. Por ello, se han seleccionado las producciones, en este caso el Teorema de Euclides, como formas de conocimiento procedimental que, a su vez, contienen condiciones de aplicación y acciones, que son el conjunto de proposiciones consecuentes, también llamadas corolarios asociados en matemáticas. Se considera el campo de las matemáticas y en concreto los contenidos establecidos en el curriculum de la Educación Primaria y Secundaria como una plataforma adecuada para seguir investigando sobre memoria y procesos cognitivos subyacentes al aprendizaje de tales conceptos matemáticos.

#### REFERENCIAS

- ANDERSON, J. (1976). *Language, Memory and Thought*. Hillsdale, NJ: Erlbaum Associates.
- ANDERSON, J. (1983). *The architecture of cognition*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- ANDERSON, J. (1984). Spreading activation. En J. R. Anderson y S. M. Kosslyn (Eds.), *Tutorials in learning and memory. Essays in honour of Gordon Bower*. San Francisco: Freeman and Co.
- ANDERSON, J. (1990). *The Adaptive Character of Thought*. Hillsdale, NJ: Erlbaum Associates.
- ANDERSON, J. R. (1993). *Rules of the mind*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.
- ANDERSON, J. R. (2000). *Learning and memory: An integrated approach (2nd ed.)*. New York, NY, US: John Wiley & Sons, Inc.
- ANDERSON, J. (2007). *How can the human mind occur in the physical universe?* New York: Oxford University Press.
- RITTER, S.; ANDERSON, J.; KOENDINGER, K. y CORBETT, A. (2007). Cognitive tutor: Applied research in mathematics education. *Psychonomic Bulletin & Review*, 14(2), 249-255.
- ATKINSON, R. C. y SHIFFRIN, R. M. (1968). "Human memory: A proposed system and its control processes". In Spence, K. W.; Spence, J. T. *The psychology of learning and motivation (2)*. New York: Academic Press. pp. 89-195.
- BADDELEY, A. D. (1986). *Working memory*. Oxford: Oxford University Press.
- BADDELEY, A. D. (1992). Is working memory working? The fifteenth Bartlett lecture. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, 44A, 1-31.
- BADDELEY, A. D. (2000). The episodic buffer: A new component of working memory? *Trends in Cognitive Sciences*, 4, (11): 417-423.
- BADDELEY, A. D. y HITCH, G. (1974). Working memory. In G. H. Bower (Ed.), *The psychology of learning and motivation: Advances in research and theory (Vol. 8)*, pp. 47-89. New York: Academic Press.
- BADDELEY, A. D.; EYSENCK, M. y ANDERSON, M. C. (2009). *Memory*. Hove: Psychology Press.
- COLLINS, A. y QUILLIANM, M. (1969). "Retrieval time from semantic memory". *Journal of verbal learning and verbal behavior* 8 (2): 240-247.
- Craik, F. I. y LOCKHART, R. S. (1972). Levels of processing: A framework for memory research. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior*, 11, 671-684.
- CLARK, J. M. y PAIVIO, A. (1991). Dual coding theory and education. *Educational Psychology Review*, 3(3), 149-170.
- CRAIK, F. I. M. y TULVING, E. (1975). Depth of processing and the retention of words in episodic memory. *Journal of Experimental Psychology: General*, 104, 268-294.
- FARNHAM-DIGGORY, S. (1992). *Cognitive processes in education (2nd Ed.)*. New York: Harper Collins.
- KATONA, G. (1940). *Organizing and memorizing*. New York: Columbia University Press.
- NEWELL, A. y SIMON, H. A. (1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- PAIVIO, A. (1971). *Imagery and Verbal Processes*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- THOMSON, D. M. y TULVING, E. (1970). Associative encoding and retrieval: Weak and strong cues. *Journal of Experimental Psychology*, 86, 255-262.
- TULVING, E. (1983). *Elements of episodic memory*. Oxford: Clarendon Press.

## ABSTRACT

*Memory and acquisition of mathematical knowledge*

We present a study about memory and its relationship with the acquisition of mathematical knowledge. The main goal is to analyze and interpret the functioning of memory and the associated processes on which are based demonstrations of propositions, lemmas and theorems of mathematical theory. In the same way, the correspondence between the organizational structure of the mathematical knowledge and the different categories of knowledge (declarative, procedural, and conditional) has been established. We also operate on propositional networks and, reticulate and complex thinking in mathematics as essential features to take during the instruction. In order to exemplify the role of memory in the mathematical information processing, has been selected as an example the theorem of Euclid. More research in this line is necessary for the understanding of the processes of acquisition of mathematical concepts and improving instruction.

KEYWORDS: *Memory; Theorem of Euclid; Propositional networks; Mathematical learning; instruction.*

## RÉSUMÉ

*La mémoire et l'acquisition des connaissances mathématiques*

Dans cet article, on expose une étude sur la mémoire et sa relation avec l'acquisition de connaissances mathématiques. L'objectif principal est d'analyser et d'interpréter la fonction de la mémoire et les processus connexes pour lesquels les démonstrations des propositions, lemmes et théorèmes de la théorie mathématique est basé. De même, la correspondance est établie entre la structure organique de la connaissance mathématique et les différentes catégories de connaissances (déclaratives, procédurales et conditionnelles). En outre, nous mettons l'accent sur les réseaux propositionnel, réflexion transversale, mathématiques complexes réticulaire est essentiel de prendre en compte lors des caractéristiques d'instruction. Afin d'illustrer ce qui est le rôle de la mémoire dans le traitement de l'information mathématique, a été choisi comme exemple le théorème de Euclide. La recherche dans ce domaine est nécessaire pour comprendre les processus d'acquisition des concepts mathématiques et d'améliorer l'enseignement.

MOTS CLÉ: *Mémoire; Le théorème d'Euclide; L'apprentissage des mathématiques; Réseau propositionnelle; Instruction.*

